第三十二届全国中学生物理竞赛复赛理论考试试题（本站重排版）

2015 年 9 月 19 日 | 8 题 | 15 + 15 + 20 + 25 + 20 + 23 + 22 + 20 分

题干据原卷逐题转录；公式采用 KaTeX 排版；配图为本站重绘矢量图；所有作答须写在答题纸上；详解另册。

一、（15 分）在太阳内部存在两个主要的核聚变反应过程：碳循环和质子-质子循环；其中碳循环是贝蒂在 1938 年提出的，碳循环反应过程如图所示。图中 p、e^+ 和 ν_e 分别表示质子、正电子和电子型中微子；粗箭头表示循环反应进行的先后次序。当从循环图顶端开始，质子 p 与 $^{12}\mathrm{C}$ 核发生反应生成 $^{13}\mathrm{N}$ 核，反应按粗箭头所示的次序进行，直到完成一个循环后，重新开始下一个循环。已知 e^+、p 和 He 核的质量分别为 0.511 MeV/c^2、1.0078 u 和 4.0026 u（1 u ≈ 931.494 MeV/c^2），电子型中微子 ν_e 的质量可以忽略。

（1）写出图中 X 和 Y 代表的核素；

（2）写出一个碳循环所有的核反应方程式；

（3）计算完成一个碳循环过程释放的核能。

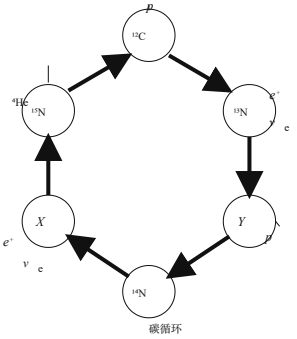

图 1　碳循环反应过程

二、（15 分）如图，在光滑水平桌面上有一长为 L 的轻杆，轻杆两端各固定一质量均为 M 的小球 A 和 B。开始时细杆静止；有一质量为 m 的小球 C 以垂直于杆的速度 v_0 运动，与 A 球碰撞。将小球和细杆视为一个系统。

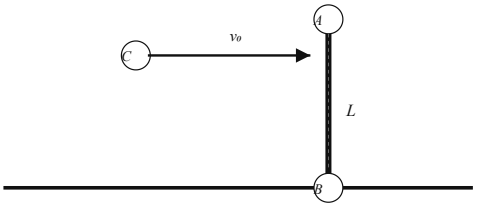

图 2　轻杆两端小球与入射小球 C

（1）求碰后系统的动能（用已知条件和球 C 碰后的速度表出）；

（2）若碰后系统动能恰好达到极小值，求此时球 C 的速度和系统的动能。

三、（20 分）如图，一质量分布均匀、半径为 r 的刚性薄圆环落到粗糙的水平地面前的瞬间，圆环质心速度 V_0 与竖直方向成 θ（$\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$）角，并同时以角速度 ω_0（ω_0 的正方向如图中箭头所示）绕通过其质心 O、且垂直环面的轴转动。已知圆环仅在其所在的竖直平面内运动，在弹起前刚好与地面无相对滑动，圆环与地面碰撞的恢复系数为 k，重力加速度大小为 g。忽略空气阻力。

（1）求圆环与地面碰后圆环质心的速度和圆环转动的角速度；

（2）求使圆环在与地面碰后能竖直弹起的条件和在此条件下圆环能上升的最大高度；

（3）若让 θ 角可变，求圆环第二次落地点到首次落地点之间的水平距离 s 随 θ 变化的函数关系式、s 的最大值以及 s 取最大值时 r、V_0 和 ω_0 应满足的条件。

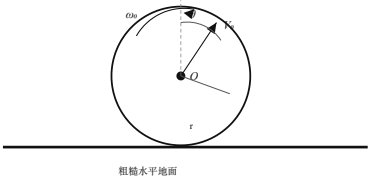

图 3　薄圆环落地前的速度与转动

四、（25 分）如图，飞机在距水平地面（xz 平面）等高的航线 KA（沿 x 正方向）上，以大小为 v（v 远小于真空中的光速 c）的速度匀速飞行；机载雷达天线持续向航线正右侧地面上的被测固定目标 P 点（其 x 坐标为 x_P）发射扇形无线电波束（扇形的角平分线与航线垂直），波束平面与水平地面交于线段 BC（BC 随着飞机移动，且在测量时应覆盖被测目标 P 点），取 K 点在地面的正投影 O 为坐标原点。已知 BC 与航线 KA 的距离为 R_0。天线发出的无线电波束是周期性的等幅高频脉冲余弦波，其频率为 f_0。

（1）已知机载雷达天线经过 A 点（其 x 坐标为 x_A）及此后朝 P 点相继发出无线电波信号，由 P 反射后又被机载雷达天线接收到，求接收到的回波信号的频率与发出信号的频率之差（频移）。

（2）已知 BC 长度为 L_s，讨论上述频移分别为正、零或负的条件，并求出最大的正、负频移。

（3）已知 $R_0 \gg L_s$，求从 C 先到达 P 点、直至 B 到达 P 点过程中最大频移与最小频移之差（带宽），并将其表示成扇形波束的张角 θ 的函数。

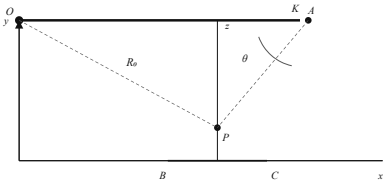

图 4　飞机、波束与地面目标 P

已知：当 $|y| \ll 1$ 时，$\sqrt{1+y^2} \approx 1+\frac{y^2}{2}$。

五、（20 分）如图，“田”字形导线框置于光滑水平面上，其中每个小正方格每条边的长度和电阻 R 分别为 0.10 m 和 1.0 Ω。导线框处于磁感应强度 B = 1.0 T 的均匀磁场中，磁场方向竖直向下，边界（如图中虚线所示）与 de 边平行。今将导线框从磁场中匀速拉出，拉出速度的大小为 v = 2.0 m/s，方向与 de 边垂直，与 ae 边平行。试求将导线框整体从磁场中拉出的过程中外力所做的功。

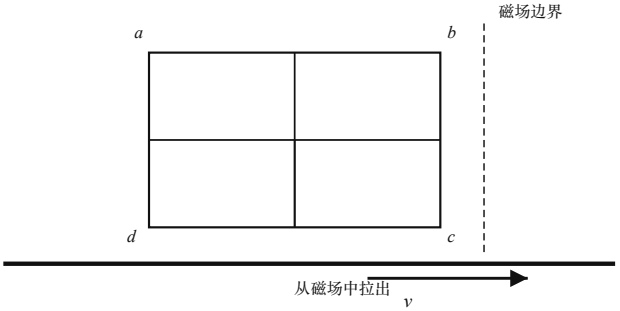

图 5　“田”字形导线框与磁场边界

六、（23 分）如图，一固定的竖直长导线载有恒定电流 I，其旁边有一正方形导线框，导线框可围绕过对边中心的竖直轴 O_1O_2 转动，转轴到长直导线的距离为 b。已知导线框的边长为 $2a$（$a < b$），总电阻为 R，自感可忽略。现使导线框绕轴以匀角速度 ω 逆时针（沿轴线从上往下看）方向转动，以导线框平面与长直导线和竖直轴所在平面重合时开始计时。求在 t 时刻

（1）导线框中的感应电动势 E；

（2）所需加的外力矩 M。

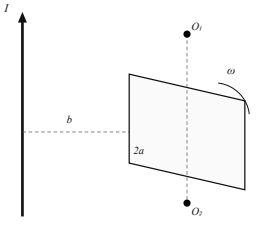

图 6　长直导线与转动正方形线框

七、（22 分）如图，1 mol 单原子理想气体构成的系统分别经历循环过程 $abcda$ 和 $abc'a$。已知理想气体在任一缓慢变化过程中，压强 p 和体积 V 满足函数关系 $p=f(V)$。

（1）试证明：理想气体在任一缓慢变化过程的摩尔热容可表示为

$$C_x = C_V + \frac{pR}{p + V\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V}}$$

式中，C_V 和 R 分别为定容摩尔热容和理想气体常数；

（2）计算系统经 bc' 直线变化过程中的摩尔热容；

（3）分别计算系统经 bc' 直线过程中升降温的转折点在 $p-V$ 图中的坐标 A 和吸放热的转折点在 $p-V$ 图中的坐标 B；

（4）定量比较系统在两种循环过程的循环效率。

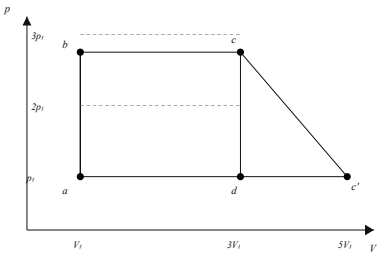

图 7　p-V 循环过程

八、（20 分）如图，介质薄膜波导由三层均匀介质组成：中间层 1 为波导薄膜，其折射率为 n_1，光波在其中传播；底层 0 为衬底，其折射率为 n_0；上层 2 为覆盖层，折射率为 n_2；$n_1 > n_0$，$n_1 > n_2$。光在薄膜层 1 里来回反射，沿锯齿形向波导延伸方向传播。图中，θ_{ij} 是光波在介质 j 表面上的入射角，θ_{ik} 是光波在介质 j 表面上的折射角。

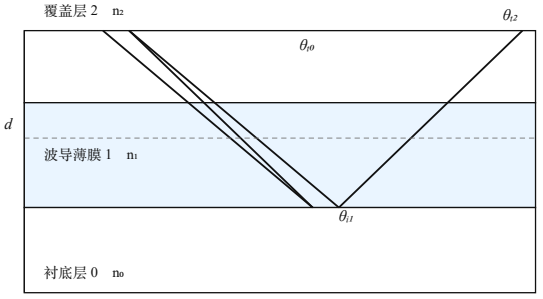

图 8　三层介质薄膜波导

（1）入射角 θ_{i1} 在什么条件下光波可被完全限制在波导薄膜里（即光未折射到衬底层和覆盖层中）？

（2）已知波导薄膜的厚度为 d，求能够在薄膜波导中传输的光波在该介质中的最长波长 $\lambda_{\max}$。

已知：两介质 j 与 k 的交界面上的反射系数（即反射光的电场强度与入射光的电场强度之比）为

$$r_{jk} = \frac{n_j\cos\theta_{ij} - n_k\cos\theta_{ik}}{n_j\cos\theta_{ij} + n_k\cos\theta_{ik}} = |\,r_{jk}\,|\,e^{-i\varphi_{jk}}$$

式中，θ_{ij} 和 θ_{ik} 分别是光波在介质 j 的表面上的入射角和折射角，余类推；正弦函数和余弦函数在复数域中可定义为

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}, \qquad \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$