逐光知理 · 高考物理参考答案与详解

第32届全国中学生物理竞赛复赛理论考试试题

参考答案与详解（本站独立编撰）

竞赛卷 · 2015年9月19日 · 8 道解答题（一至八） · 共 160 分

本册答案与解析由逐光知理物理教研组独立编撰，全部推导与数值均由本站自行完成，并逐条回代核对。第三、五、八题的示意图因原卷矢量层未能完整获取，为本站按题设条件自绘的建模图；若与原卷印刷细节不符，以卷面为准。

答案速查

题号	主考点	答案摘要
1	碳循环（CNO循环）核反应链与核能计算	（1）X 为 $^{15}\mathrm{O}$，Y 为 $^{13}\mathrm{C}$；（2）见解析六个反应式；（3）$Q\approx 25.6\ \mathrm{MeV}$
2	刚体（杆+两球）与质点碰撞：动量、角动量守恒与系统动能极值	（1）$E_k=\dfrac{m^2(v_0-u)^2}{2M}$（$u$ 为碰后 C 的速率）；（2）$u=\dfrac{m-M}{m+M}v_0$，$E_{k,\min}=\dfrac{2Mm^2v_0^2}{(m+M)^2}$
3	薄圆环与粗糙地面碰撞：滑动摩擦冲量、恢复系数与弹跳运动	（1）$v_x'=\dfrac{v_0\sin\theta-\omega_0 r}{2}$，$v_y'=kv_0(-\cos\theta)$，$\omega'=\dfrac{\omega_0 r-v_0\sin\theta}{2r}$；（2）条件 $\omega_0 r=v_0\sin\theta$，$h=\dfrac{k^2v_0^2\cos^2\theta}{2g}$；（3）见解析，$\omega_0 r<v_0$ 时 s 最大
4	机载脉冲多普勒雷达：双程多普勒频移与波束带宽	（1）$\Delta f=\dfrac{2f_0v(x_P-x_A)}{c\sqrt{R_0^2+(x_A-x_P)^2}}$；（2）目标在前为正、并排为零、在后为负，最大 $\pm\dfrac{f_0vL_s}{c\sqrt{R_0^2+L_s^2/4}}$；（3）$B=\dfrac{4f_0v}{c}\sin\dfrac{\theta}{2}$
5	“田”字导线框匀速拉出磁场：回路感应电路网络与外力功	$W=\dfrac{3B^2l^3v}{2R}=3.0\times10^{-3}\ \mathrm{J}$
6	载流长直导线磁场中旋转方形线框的感应电动势与外力矩	（1）$E=\dfrac{2\mu_0Ia^2b(a^2+b^2)\omega\sin\omega t}{\pi[(a^2+b^2)^2-4a^2b^2\cos^2\omega t]}$；（2）$M=\dfrac{E^2}{R\omega}$（表达式见解析）
7	理想气体任意过程摩尔热容、直线过程转折点与两循环效率比较	（1）见证明；（2）$C(V)=R\left[\dfrac{3}{2}+\dfrac{7V_1-V}{7V_1-2V}\right]$；（3）$A\left(\dfrac{7V_1}{2},\dfrac{7p_1}{4}\right)$，$B\left(\dfrac{35V_1}{8},\dfrac{21p_1}{16}\right)$；（4）$\eta_{abcda}=\dfrac{2}{9}\approx22.2\%$，$\eta_{abc'a}=\dfrac{256}{921}\approx27.8\%$，后者更大
8	介质薄膜波导：全反射约束条件与可传输最长波长	（1）$\sin\theta_{i1}>\dfrac{\max(n_0,n_2)}{n_1}$；（2）$\lambda_{\max}=2d\sqrt{1-\dfrac{n_c^2}{n_1^2}}=\dfrac{2d}{n_1}\sqrt{n_1^2-n_c^2}$，$n_c=\max(n_0,n_2)$

解答题（一至八）

1. 计算题 · 15分

> **答案**　（1）X 为 $^{15}\mathrm{O}$，Y 为 $^{13}\mathrm{C}$；（2）见解析六个反应式；（3）$Q \approx 25.6\ \mathrm{MeV}$

详解

(1) 第（1）问：X 与 Y 的核素　按循环图次序：$p + {}^{12}\mathrm{C} \to {}^{13}\mathrm{N} + \gamma$；$^{13}\mathrm{N}$ 放出 e^+ 与 ν_e 后生成 Y，由电荷数与质量数守恒，${}^{13}\mathrm{N} \to {}^{13}\mathrm{C} + e^+ + \nu_e$，故 $Y = {}^{13}\mathrm{C}$；随后 $^{13}\mathrm{C}$ 俘获质子生成 $^{14}\mathrm{N}$，$^{14}\mathrm{N}$ 再俘获质子生成 X，即 $p + {}^{14}\mathrm{N} \to {}^{15}\mathrm{O} + \gamma$，$^{15}\mathrm{O}$ 放出 e^+ 与 ν_e 后经 $^{15}\mathrm{N}$ 回到 $^{12}\mathrm{C}$，故 $X = {}^{15}\mathrm{O}$。校核：X（$Z = 8$）放出 e^+ 后变为 $^{15}\mathrm{N}$（$Z = 7$），与图中 X 经 e^+、ν_e 进入下一支一致。

(2) 第（2）问：一个碳循环的全部核反应方程式　按粗箭头次序共六个反应：

$$p + {}^{12}\mathrm{C} \to {}^{13}\mathrm{N} + \gamma,$$

$$^{13}\mathrm{N} \to {}^{13}\mathrm{C} + e^+ + \nu_e,$$

$$p + {}^{13}\mathrm{C} \to {}^{14}\mathrm{N} + \gamma,$$

$$p + {}^{14}\mathrm{N} \to {}^{15}\mathrm{O} + \gamma,$$

$$^{15}\mathrm{O} \to {}^{15}\mathrm{N} + e^+ + \nu_e,$$

$$p + {}^{15}\mathrm{N} \to {}^{12}\mathrm{C} + {}^{4}\mathrm{He}.$$

每式两边电荷数与质量数（重子数）均守恒；轻子数方面，每个 β^+ 衰变伴随一个 e^+ 与一个 ν_e，轻子数守恒。

(3) 第（3）问：一个循环释放的核能 把六式相加，催化剂核 ^{12}C、^{13}C、^{14}N、^{15}N、^{15}O、^{13}N、^{15}O 全部抵消（光子与中微子各计入净额），净结果为

$$4p \to {}^{4}\mathrm{He} + 2e^{+} + 2\nu_e + \gamma.$$

质量亏损（ν_e 质量忽略）：

$$\Delta m = 4m_p - m_{\mathrm{He}} - 2m_e = 4 \times 1.0078\,u - 4.0026\,u - \frac{2 \times 0.511}{931.494}\,u.$$

即 $\Delta m = 4.0312\,u - 4.0026\,u - 0.001097\,u = 0.027503\,u$。

$$Q = \Delta m \cdot \quad 931.494\ \mathrm{MeV} = 0.027503 \times 931.494\ \mathrm{MeV} \approx 25.6\ \mathrm{MeV}.$$

回代核对：$4 \times 1.0078 = 4.0312$；$2m_e$ 折合 $1.022/931.494 = 0.001097\,u$；$0.027503 \times 931.494 = 25.62$ MeV。即一个碳循环释放核能约 25.6 MeV（即 4.1×10^{-12} J）。

---

2. 计算题 · 15分

> **答案** （1）$E_k = \dfrac{m^2(v_0-u)^2}{2M}$（$u$ 为碰后 C 的速率）；（2）$u = \dfrac{m-M}{m+M}v_0$，$E_{k,\min} = \dfrac{2Mm^2v_0^2}{(m+M)^2}$

详解

(1) 第（1）问：用碰后 C 的速度 u 表出系统动能 碰前杆系统静止，C 以垂直于杆的速度 v_0 与 A 球碰撞。碰撞过程中系统沿 v_0 方向动量守恒，对过杆中点 O 且垂直于桌面的轴角动量守恒（碰撞内力沿 v_0 方向，对 O 轴无内力矩净贡献）。设碰后 C 速度为 u（仍沿原方向，可正可负），杆系统质心速度为 V，转动角速度为 ω：

$$mv_0 = mu + 2MV, \qquad \frac{L}{2}mv_0 = \frac{L}{2}mu + I\omega, \quad I = 2M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{ML^2}{2}.$$

解得 $V = \dfrac{m(v_0-u)}{2M}$，$\omega = \dfrac{m(v_0-u)}{ML}$。杆系统动能为平动与转动之和：

$$E_k = \frac{1}{2}(2M)V^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = MV^2 + \frac{1}{4}ML^2\omega^2 = \frac{m^2(v_0-u)^2}{4M} + \frac{m^2(v_0-u)^2}{4M} = \frac{m^2(v_0-u)^2}{2M}.$$

回代核对：当 $u = v_0$（C 未改变速度，无碰撞效果）时 $E_k = 0$，符合直觉。

(2) 第（2）问：系统动能取极小值时 C 的速度与系统动能 光滑小球碰撞中系统总动能守恒（弹性碰撞）：$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mu^2+E_k$，即 $E_k=\frac{1}{2}m(v_0^2-u^2)$，$u$ 越大系统动能越小。与（1）的结果联立：

$$\frac{1}{2}m(v_0^2-u^2)=\frac{m^2(v_0-u)^2}{2M}\ \Rightarrow\ M(v_0+u)=m(v_0-u).$$

解得

$$u=\frac{m-M}{m+M}v_0.$$

当 $m<M$ 时 $u<0$，即 C 被反弹。代入（1）式：$v_0-u=\dfrac{2M}{m+M}v_0$，

$$E_{k,\min}=\frac{m^2}{2M}\cdot\frac{4M^2v_0^2}{(m+M)^2}=\frac{2Mm^2v_0^2}{(m+M)^2}.$$

回代核对：用 $E_k=\frac{1}{2}m(v_0^2-u^2)$ 验证：$v_0^2-u^2=v_0^2\left[1-\frac{(m-M)^2}{(m+M)^2}\right]=\frac{4mMv_0^2}{(m+M)^2}$，则 $E_k=\frac{2Mm^2v_0^2}{(m+M)^2}$，两式一致。

---

3. 计算题 · 20分

> **答案**　（1）$v_x'=\dfrac{v_0\sin\theta-\omega_0 r}{2}$，$v_y'=kv_0(-\cos\theta)$，$\omega'=\dfrac{\omega_0 r-v_0\sin\theta}{2r}$；　（2）条件 $\omega_0 r=v_0\sin\theta$，$h=\dfrac{k^2v_0^2\cos^2\theta}{2g}$；　（3）见解析，$\omega_0 r<v_0$ 时 s 最大

详解

(1) 第（1）问：碰后质心速度与角速度 取 x 轴水平（沿 v_0 的水平分量为正），y 轴竖直向上。θ 自竖直向上方向量起，故碰前 $v_{cx}=v_0\sin\theta$，$v_{cy}=-v_0\cos\theta$（$\cos\theta<0$，竖直向下分量为 $v_0(-\cos\theta)>0$）。碰撞时间极短，重力可忽略；地面给圆环的法向冲量 N 与摩擦冲量 f（沿 x）。恢复系数给出竖直方向：$v_y'=kv_0(-\cos\theta)$，方向向上。

水平方向对质心动量定理：$mv_x'=mv_0\sin\theta+f$；对质心的转动（薄圆环 $I=mr^2$，摩擦力作用于最低点，力矩为 rf）：$mr^2(\omega'-\omega_0)=rf$，即 $\omega'=\omega_0+\dfrac{f}{mr}$。

题给条件“弹起前刚好与地面无相对滑动”：碰起瞬间接触点不打滑，即 $v_x'+\omega' r=0$。三式联立：

$$v_x'=v_0\sin\theta+\frac{f}{m},\qquad \omega' r=\omega_0 r+\frac{f}{m},$$

相加为零得 $f=-\dfrac{m}{2}(v_0\sin\theta+\omega_0 r)$，于是

$$v_x'=\frac{v_0\sin\theta-\omega_0 r}{2},\qquad \omega'=\frac{\omega_0 r-v_0\sin\theta}{2r}=-\frac{v_x'}{r}.$$

碰后质心速度：水平分量 $\dfrac{v_0\sin\theta-\omega_0 r}{2}$，竖直分量 $kv_0(-\cos\theta)$ 向上；回代核对：$v_x'+\omega' r=0$ 成立。

(2) 第（2）问：竖直弹起的条件与最大高度 竖直弹起要求碰后水平速度为零：$v_x' = \dfrac{v_0\sin\theta - \omega_0 r}{2} = 0$，即条件为

$$\omega_0 r = v_0 \sin\theta.$$

此时圆环竖直上抛，上升最大高度由 $v_y'^2 = 2gh$ 得

$$h = \frac{[kv_0(-\cos\theta)]^2}{2g} = \frac{k^2 v_0^2 \cos^2\theta}{2g}.$$

回代核对：量纲 $\mathrm{m^2/s^2/(m/s^2)} = \mathrm{m}$ 正确；$k = 0$ 时 $h = 0$ 合理。

(3) 第（3）问：$s(\theta)$、s 的最大值及取最大值的条件 碰后圆环以 v_x' 作水平匀速、以 v_y' 作竖直上抛运动，飞行时间 $t = \dfrac{2v_y'}{g} = \dfrac{2kv_0(-\cos\theta)}{g}$，第二次落地点到首次落地点的水平距离

$$s(\theta) = v_x' t = \frac{v_0\sin\theta - \omega_0 r}{2} \cdot \frac{2kv_0(-\cos\theta)}{g} = \frac{kv_0}{g}(-\cos\theta)(v_0\sin\theta - \omega_0 r).$$

对 θ 求极值：$\dfrac{ds}{d\theta} \propto v_0(\sin^2\theta - \cos^2\theta) - \omega_0 r\sin\theta = -v_0\cos 2\theta - \omega_0 r\sin\theta = 0$，即

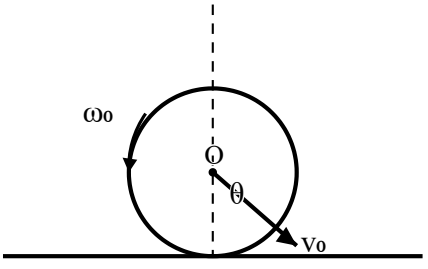
$$2v_0\sin^2\theta - \omega_0 r\sin\theta - v_0 = 0.$$

解得 $\sin\theta^* = S = \dfrac{\omega_0 r + \sqrt{\omega_0^2 r^2 + 8v_0^2}}{4v_0}$（取正根）。利用极值条件可把 $v_0\sin\theta^* - \omega_0 r = \dfrac{v_0\cos^2\theta^*}{S}$，故

$$s_{\max} = \frac{kv_0^2}{g} \cdot \frac{(1-S^2)^{3/2}}{S}.$$

s 取最大值要求 $\theta^* \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ 且 $S < 1$，后者等价于 $\omega_0 r < v_0$（推导：$\sqrt{\omega_0^2 r^2 + 8v_0^2} < 4v_0 - \omega_0 r$，两边平方得 $8v_0^2 < 16v_0^2 - 8\omega_0 r v_0$，即 $\omega_0 r v_0 < v_0^2$）。故 s 最大的条件为

$$\omega_0 r < v_0, \qquad \sin\theta^* = \frac{\omega_0 r + \sqrt{\omega_0^2 r^2 + 8v_0^2}}{4v_0}.$$



圆环落地瞬间（本站按题设重绘）：ω_0 方向如图，v_0 与竖直方向成 θ

本站取竖直向上方向为 θ 的基准方向（与题给 $\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3\pi}{2}$ 及落地方向自洽）；取 x 轴沿 v_0 水平分量为正。

4. 计算题 · 25分

答案　（1）$\Delta f=\dfrac{2f_0v(x_P-x_A)}{c\sqrt{R_0^2+(x_A-x_P)^2}}$；（2）目标在前为正、并排为零、在后为负，最大 $\pm\dfrac{f_0vL_s}{c\sqrt{R_0^2+L_s^2/4}}$；（3）$B=\dfrac{4f_0v}{c}\sin\dfrac{\theta}{2}$

详解

(1) 第（1）问：回波频移 设天线（与 P 的 x 坐标差为 $d=x_A-x_P$）到 P 的斜距为 $R=\sqrt{R_0^2+d^2}$。天线以速度 v 沿 x 正方向运动，$\dot R=\dfrac{dv}{R}$。对 $v\ll c$ 的脉冲双程多普勒频移：波源朝目标运动使目标处接收频率升高 $f_0(1-\dot R/c)$，反射后接收天线再朝波源运动又升高同量级，故

$$\Delta f=f_{\text{回波}}-f_0=-\frac{2f_0\dot R}{c}=-\frac{2f_0vd}{cR}=\frac{2f_0v(x_P-x_A)}{c\sqrt{R_0^2+(x_A-x_P)^2}}.$$

回代核对：天线接近目标（$x_A<x_P$，$\dot R<0$）时 $\Delta f>0$，符合多普勒惯例。

(2) 第（2）问：频移正、零、负的条件与最大正、负频移 被测期间 P 必须处于波束迹线 BC 内，即 $|x_A-x_P|\le L_s/2$。由（1）式：

$x_A<x_P$（目标在航线前方，正在接近）时 $\Delta f>0$；$x_A=x_P$（天线与目标并排，$\dot R=0$）时 $\Delta f=0$；$x_A>x_P$（目标在后方，正在远离）时 $\Delta f<0$。

$|\Delta f|=\dfrac{2f_0v|d|}{c\sqrt{R_0^2+d^2}}$ 在 $|d|$ 最大（即 $d=\pm L_s/2$，波束边缘 B 或 C 刚到达 P）时最大：

$$\Delta f_{\max,\pm}=\pm\frac{2f_0v(L_s/2)}{c\sqrt{R_0^2+L_s^2/4}}=\pm\frac{f_0vL_s}{c\sqrt{R_0^2+L_s^2/4}}.$$

当 $R_0\gg L_s$ 时用题给近似 $\sqrt{1+y^2}\approx1+y^2/2$：

$$\Delta f_{\max,\pm}\approx\pm\frac{f_0vL_s}{cR_0}\left(1-\frac{L_s^2}{8R_0^2}\right).$$

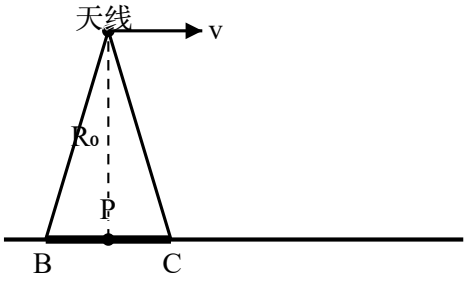
(3) 第（3）问：带宽与张角 θ 的函数关系 从 C 先到达 P（$d=-L_s/2$）到 B 到达 P（$d=+L_s/2$）过程中，$\Delta f(d)=-\dfrac{2f_0vd}{c\sqrt{R_0^2+d^2}}$ 随 d 单调变化，带宽为两端频移之差：

$$B=\Delta f_{\max}-\Delta f_{\min}=\frac{2f_0vL_s}{c\sqrt{R_0^2+L_s^2/4}}.$$

波束全张角为 θ、飞行高度为 R_0，则 $L_s=2R_0\tan\dfrac{\theta}{2}$，且 $\sqrt{R_0^2+L_s^2/4}=R_0\sec\dfrac{\theta}{2}$，代入：

$$B=\frac{2f_0v\cdot\ 2R_0\tan(\theta/2)}{cR_0\sec(\theta/2)}=\frac{4f_0v}{c}\sin\frac{\theta}{2}.$$

回代核对：$\theta\to0$ 时 $B\to0$（波束无限窄，无带宽）合理；$B\le\dfrac{4f_0v}{c}$ 且随 θ 单调增，量纲为频率，正确。



波束几何（本站按题设重绘）：波束沿航线方向在地面扫出 BC，P 位于其下

航线与地面波束迹线 BC 平行，二者间距即飞行高度 R_0；扇形波束张角 θ 为全张角，$L_s=2R_0\tan(\theta/2)$。

5. 计算题 · 20分

答案 $W=\dfrac{3B^2l^3v}{2R}=3.0\times10^{-3}\ \mathrm{J}$

详解

(1) 建模与阶段划分 框沿 v（$\parallel ae$，$\perp de$）匀速拉出，磁场边界 $\parallel de$。与 de 平行的各水平段（长 l、电阻 R，共 6 段：上边 2 段、中间横线 2 段、下边 2 段）切割磁感线，在磁场内的每段电动势 $\varepsilon=Blv$；竖直段（$\parallel v$）不切割，无电动势。设位移 x 从上边到达边界起计：第一阶段 $x\in(0,l)$：上边 2 段已在场外（无电动势），中间横线与下边共 4 段有电动势 ε；第二阶段 $x\in(l,2l)$：仅下边 2 段有电动势 ε。每阶段历时 l/v。对 4 个小格回路（各边电阻 R，格回路总电阻 $4R$）列回路电流方程，相邻回路公共边电流为回路电流之差。

(2) 第一阶段（$0<x<l$）：回路 1、2 有电动势 ε，回路 3、4 为零 设四个格回路电流 J_1, J_2（上排）、J_3, J_4（下排），单位 ε/R：

$$4J_1 - J_2 - J_3 = 1, \quad -J_1 + 4J_2 - J_4 = 1, \quad -J_1 + 4J_3 - J_4 = 0, \quad -J_2 - J_3 + 4J_4 = 0.$$

解得 $J_1 = J_2 = \dfrac{3\varepsilon}{8R}$，$J_3 = J_4 = \dfrac{\varepsilon}{8R}$（回代：各式均满足）。12 段中电流分布：上边及左上、右上竖直段为 $\dfrac{3\varepsilon}{8R}$，下边各段为 $\dfrac{\varepsilon}{8R}$，中横线与中心竖直段的公共边为 0 或 $\dfrac{\varepsilon}{4R}$。总耗散功率

$$P_1 = \sum I^2 R = \frac{48}{64} \cdot \frac{\varepsilon^2}{R} = \frac{3\varepsilon^2}{4R}.$$

(3) 第二阶段（$l<x<2l$）：回路 3、4 有电动势 ε，回路 1、2 为零 方程右端换为 $(0,0,1,1)$：

$$4J_1 - J_2 - J_3 = 0, \quad -J_1 + 4J_2 - J_4 = 0, \quad -J_1 + 4J_3 - J_4 = 1, \quad -J_2 - J_3 + 4J_4 = 1.$$

解得 $J_1 = J_2 = \dfrac{\varepsilon}{8R}$，$J_3 = J_4 = \dfrac{3\varepsilon}{8R}$（回代核对四式均成立）。电流平方和与第一阶段完全相同：

$$P_2 = \frac{3\varepsilon^2}{4R}.$$

这一对称性来自电路上下交换后电动势分布的对偶性。

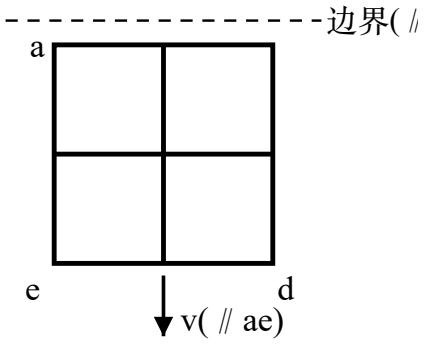
(4) 外力做的总功 匀速拉出时外力功等于焦耳热：

$$W = (P_1 + P_2)\frac{l}{v} = \frac{3\varepsilon^2}{2R} \cdot \frac{l}{v} = \frac{3B^2 l^2 v^2\, l}{2Rv} = \frac{3B^2 l^3 v}{2R}.$$

代入 $B = 1.0\ \mathrm{T}$，$l = 0.10\ \mathrm{m}$，$v = 2.0\ \mathrm{m/s}$，$R = 1.0\ \Omega$：

$$W = \frac{3 \times 1.0^2 \times 0.10^3 \times 2.0}{2 \times 1.0}\ \mathrm{J} = 3.0 \times 10^{-3}\ \mathrm{J}.$$

回代核对：平均阻力 $\bar{F} = W/(2l) = 1.5 \times 10^{-2}\ \mathrm{N}$，与 BlI 量级（$I \sim \varepsilon/R \sim 0.2\ \mathrm{A}$）相符。



“田”字导线框与磁场边界（本站按题设建模重绘）

原卷本题附图未能从取料中获取。本站按题述条件建模：外框 $2l\times 2l$，内部十字与外框共 12 段、每段电阻 R；ae 为拉出方向所在边（$v\parallel ae$），$de\perp ae$ 且磁场边界 $\parallel de$，框整体沿 v 匀速拉出。若原卷图中边的连接方式与此不同，结果需相应修正。

6. 计算题 · 23分

答案　（1）$E=\dfrac{2\mu_0 I a^2 b(a^2+b^2)\omega\sin\omega t}{\pi\left[(a^2+b^2)^2-4a^2b^2\cos^2\omega t\right]}$；　（2）$M=\dfrac{E^2}{R\omega}$（表达式见解析）

详解

(1) 第（1）问：t 时刻的感应电动势 E　取长直导线沿竖直方向，线框转轴到导线的水平距离为 b。t 时刻线框平面转过 $\varphi=\omega t$，线框两条竖直边到导线的水平距离分别为

$$d_{\pm}=\sqrt{b^2+a^2\pm 2ab\cos\varphi}.$$

穿过线框的磁通由积分 $\Phi=\dfrac{\mu_0 I\cdot\ 2a}{2\pi}\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{b\cos\varphi+s}{s^2+2bs\cos\varphi+b^2}\,ds$ 计算（s 为沿框面横向坐标），被积函数恰为 $\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{ds}\ln(\cdots)$，得

$$\Phi(\varphi)=\frac{\mu_0 I a}{2\pi}\ln\frac{b^2+a^2+2ab\cos\varphi}{b^2+a^2-2ab\cos\varphi}$$

（符号依绕行方向，取绝对值计算电动势）。由 $E=\left|\dfrac{d\Phi}{dt}\right|$，对 $\varphi=\omega t$ 求导：$\dfrac{d}{d\varphi}\ln\dfrac{B_+}{B_-}=\dfrac{-4ab(a^2+b^2)\sin\varphi}{(a^2+b^2)^2-4a^2b^2\cos^2\varphi}$，故

$$E(t)=\frac{2\mu_0 I a^2 b(a^2+b^2)\omega\ \left|\ \sin\omega t\ \right|}{\pi\left[(a^2+b^2)^2-4a^2b^2\cos^2\omega t\right]}.$$

回代核对：$t=0$ 时线框平面与导线共面，磁通最大而 $\dfrac{d\Phi}{dt}=0$，$E=0$；$\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ 时 $E=\dfrac{2\mu_0 I a^2 b\omega}{\pi(a^2+b^2)}$，有限，合理。

(2) 第（2）问：所需外力矩 M　线框中感应电流 $i=E/R$。匀角速转动时动能不变，外力矩的功率全部转化为焦耳热：$M\omega=\dfrac{E^2}{R}$，故

$$M=\frac{E^2}{R\omega}=\frac{4\mu_0^2 I^2 a^4 b^2(a^2+b^2)^2\omega\sin^2(\omega t)}{\pi^2 R\left[(a^2+b^2)^2-4a^2b^2\cos^2(\omega t)\right]^2}.$$

方向与磁阻力矩相反，即维持逆时针转动所需的方向。回代核对：$M\propto\sin^2\omega t$，在 $t=0$（电动势为零）时外力矩为零，与该时刻无电磁阻力一致；量纲 $\mathrm{V^2/(\Omega\cdot\ s^{-1})=N\cdot\ m}$ 正确。

7. 计算题 · 22分

> **答案**　（1）见证明；（2）$C(V)=R\left[\frac{3}{2}+\frac{7V_1-V}{7V_1-2V}\right]$；（3）$A\left(\frac{7V_1}{2},\frac{7p_1}{4}\right)$，$B\left(\frac{35V_1}{8},\frac{21p_1}{16}\right)$；（4）$\eta_{abcda}=\frac{2}{9}\approx 22.2\%$，$\eta_{abc'a}=\frac{256}{921}\approx 27.8\%$，后者更大

详解

(1) 第（1）问：证明 $C_\pi=C_V+\dfrac{pR}{p+V\frac{dp}{dV}}$ 对 1 mol 理想气体，任一缓慢过程中 $\delta Q=dU+p\,dV=C_V\,dT+p\,dV$。由 $pV=RT$ 取微分：$p\,dV+V\,dp=R\,dT$，即 $dT=\dfrac{p\,dV+V\,dp}{R}$。代入：

$$\delta Q=\frac{C_V}{R}(p\,dV+V\,dp)+p\,dV=\left[\frac{C_V}{R}\left(p+V\frac{dp}{dV}\right)+p\right]dV.$$

而 $dT=\dfrac{1}{R}\left(p+V\dfrac{dp}{dV}\right)dV$，故摩尔热容

$$C_\pi=\frac{\delta Q}{dT}=C_V+\frac{pR}{p+V\frac{dp}{dV}}.$$

证毕。校核：定容过程 $\dfrac{dp}{dV}\to\infty$，$C_\pi\to C_V$；定压过程 $\dfrac{dp}{dV}=0$，$C_\pi=C_V+R=C_p$，均正确。

(2) 第（2）问：直线 bc' 过程的摩尔热容 由图，$b=(V_1,3p_1)$，$c'=(5V_1,p_1)$，直线方程为 $p=\dfrac{7}{2}p_1-\dfrac{p_1}{2V_1}V$，斜率 $\dfrac{dp}{dV}=-\dfrac{p_1}{2V_1}$。单原子气体 $C_V=\dfrac{3}{2}R$。代入（1）式：

$$C(V)=\frac{3}{2}R+\frac{pR}{p+V\frac{dp}{dV}}=\frac{3}{2}R+\frac{\left(\frac{7}{2}p_1-\frac{p_1V}{2V_1}\right)R}{\left(\frac{7}{2}p_1-\frac{p_1V}{V_1}\right)}=R\left[\frac{3}{2}+\frac{7V_1-V}{7V_1-2V}\right].$$

回代核对：$V=V_1$ 时 $C=\frac{3}{2}R+\frac{6}{5}R=2.7R$；$V=5V_1$ 时 $C=\frac{3}{2}R-\frac{2}{3}R=\frac{5}{6}R>0$；在 $V=\frac{35}{8}V_1$ 处 $C=0$（与第（3）问吸放热转折点一致）。该过程摩尔热容随 V 变化，不是常量。

(3) 第（3）问：升降温转折点 A 与吸放热转折点 B 沿 bc'：$T=\dfrac{pV}{R}=\dfrac{p_1}{R}\left(\dfrac{7}{2}V-\dfrac{V^2}{2V_1}\right)$。升降温转折点满足 $\dfrac{dT}{dV}=0$：$\dfrac{7}{2}-\dfrac{V}{V_1}=0$，得 $V_A=\dfrac{7V_1}{2}$，$p_A=\dfrac{7p_1}{2}-\dfrac{7p_1}{4}=\dfrac{7p_1}{4}$，即 $A\left(\dfrac{7V_1}{2},\dfrac{7p_1}{4}\right)$；$V<V_A$ 升温、$V>V_A$ 降温。

吸放热转折点满足 $\delta Q=C\,dT=0$，即 $C(V)=0$：$\dfrac{7V_1-V}{7V_1-2V}=-\dfrac{3}{2}$，解得 $V_B=\dfrac{35V_1}{8}$，$p_B=\dfrac{7p_1}{2}-\dfrac{35p_1}{16}=\dfrac{21p_1}{16}$，即 $B\left(\dfrac{35V_1}{8},\dfrac{21p_1}{16}\right)$；$V<V_B$ 吸热、$V>V_B$ 放热。两点均在直线段 $V\in[V_1,5V_1]$ 内，回代直线方程无误。

(4) 第（4）问：两循环效率的定量比较 状态温度：$T_a=\dfrac{p_1V_1}{R}$，$T_b=\dfrac{3p_1V_1}{R}$，$T_c=T_{c'}=\dfrac{5p_1V_1}{R}$（$c$ 为 $(3V_1,3p_1)$ 时 $T_c=\dfrac{9p_1V_1}{R}$），$T_d=\dfrac{3p_1V_1}{R}$。

循环 $abcda$：$Q_{ab}=C_V\Delta T=3p_1V_1$；$Q_{bc}=C_p\Delta T=\dfrac{5}{2}\cdot\ 6p_1V_1=15p_1V_1$；$Q_{cd}=-9p_1V_1$；$Q_{da}=-5p_1V_1$。净功 $W_1=4p_1V_1$（等于矩形面积 $2V_1\times 2p_1$，核验通过），吸热 $Q_{in,1}=18p_1V_1$，

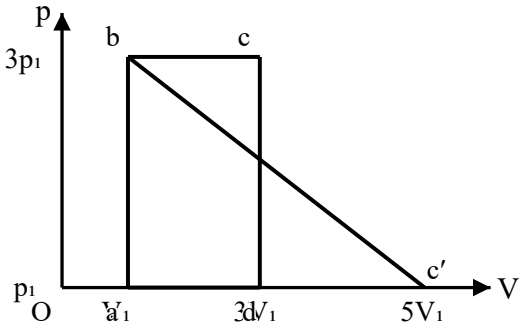
$$\eta_1=\frac{4}{18}=\frac{2}{9}\approx 22.2\%.$$

循环 $abc'a$：$Q_{ab}=3p_1V_1$；$Q_{bc'}=\Delta U+W=\dfrac{3}{2}(2p_1V_1)+\dfrac{(3p_1+p_1)}{2}\cdot\ 4V_1=3p_1V_1+8p_1V_1=11p_1V_1$；$Q_{c'a}=\dfrac{5}{2}(-4p_1V_1)=-10p_1V_1$。净功 $W_2=4p_1V_1$（三角形面积 $\dfrac{1}{2}\cdot\ 4V_1\cdot\ 2p_1$，核验通过）。但 bc' 段在 $V>\dfrac{35}{8}V_1$ 后放热，实际吸热为

$$Q_{in,2}=3p_1V_1+\int_{V_1}^{\frac{35}{8}V_1}p_1\left(\frac{35}{4}-\frac{2V}{V_1}\right)dV=3p_1V_1+\frac{729}{64}p_1V_1=\frac{921}{64}p_1V_1,$$

$$\eta_2=\frac{4}{921/64}=\frac{256}{921}\approx 27.8\%.$$

比较：$\eta_2>\eta_1$，$\dfrac{\eta_2}{\eta_1}=\dfrac{256/921}{2/9}=\dfrac{1152}{921}\approx 1.25$，即循环 $abc'a$ 的效率约为循环 $abcda$ 的 1.25 倍。



两循环过程 $abcda$（矩形）与 $abc'a$（含直线 bc'）的 p-V 图（本站重绘）

8. 计算题 · 20分

答案　（1）$\sin\theta_{i1} > \dfrac{\max(n_0, n_2)}{n_1}$；　（2）$\lambda_{\max} = 2d\sqrt{1-\dfrac{n_c^2}{n_1^2}} = \dfrac{2d}{n_1}\sqrt{n_1^2 - n_c^2}$，$n_c = \max(n_0, n_2)$

详解

(1) 第（1）问：光被完全限制在薄膜内的条件　光要在薄膜层 1 内锯齿形传播而不折射进衬底 0 与覆盖层 2，必须在薄膜的上下两个界面都发生全反射。全反射条件为入射角（自界面法线量起）大于相应临界角：

$$\sin\theta_{i1} > \frac{n_0}{n_1}, \qquad \sin\theta_{i1} > \frac{n_2}{n_1}.$$

两条件需同时满足，而 $n_1 > n_0, n_2$，故

$$\sin\theta_{i1} > \frac{n_c}{n_1}, \qquad n_c = \max(n_0, n_2),$$

即 $\theta_{i1} > \arcsin\dfrac{n_c}{n_1}$。此时按题给反射系数式，$\cos\theta_{t0}$、$\cos\theta_{t2}$ 在复数域中成为纯虚数，$|r_{10}| = |r_{12}| = 1$，光能量全部返回薄膜，波被完全限制在波导薄膜里。

(2) 第（2）问：可传输的最长波长 $\lambda_{\max}$　在薄膜内来回反射的光波须满足横向驻波（谐振）条件：波在薄膜厚度方向往返一次积累的相位 $\dfrac{4\pi d}{\lambda}\cos\theta_{i1}$ 加上两界面反射相移应等于 2π 的整数倍：

$$\frac{4\pi d\cos\theta_{i1}}{\lambda} = 2m\pi - \varphi, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots$$

其中 φ 为两界面反射相移之和。发生全反射时相移随 $\theta_{i1} \to \theta_c$ 而趋于零，故最长波对应最低阶 $m = 1$ 且 θ_{i1} 取临界角 $\theta_c = \arcsin\dfrac{n_c}{n_1}$：

$$\lambda_{\max} = 2d\cos\theta_c = 2d\sqrt{1-\frac{n_c^2}{n_1^2}} = \frac{2d}{n_1}\sqrt{n_1^2 - n_c^2}, \qquad n_c = \max(n_0, n_2).$$

回代核对：$n_c \to n_1$ 时 $\lambda_{\max} \to 0$（无波可导），$n_c \ll n_1$ 时 $\lambda_{\max} \to 2d$，物理上合理；波长为膜内波长，若需真空波长应乘以 n_1。

第（2）问取最低阶横向驻波（$m = 1$）且入射角贴近临界角（此时全反射相移趋于零）求得；若计及全反射相位的精细修正，$\lambda_{\max}$ 略有偏移。

逐光知理 · 竞赛答案册 · 易错点速查

第32届全国中学生物理竞赛复赛 · 易错点速查

补在原册之后：原册答案与详解未作任何改动

共 6 条 · 绑定本卷题号

只挑本卷最容易失分的动作，按「错法 / 机理 / 正解」三段写，题号与原册一致；公式沿用原册口径。

第 1 题 · 第(3)问

错法 算循环质量亏损时只按 $4m_p - m_{\mathrm{He}}$ 相减，漏掉两次 β^+ 衰变带走的两个正电子质量；或把中微子质量也折进质量亏损。

机理 六个反应相加后催化剂核 ^{12}C、^{13}N、^{13}C、^{14}N、^{15}O、^{15}N 全部抵消，净结果为 $4p \to {}^4\mathrm{He} + 2e^+ + 2\nu_e + \gamma$；两个正电子的静质量必须从反应前质量中扣除，中微子质量忽略。漏掉 $2m_e$ 会把 Δm 算大、Q 值偏高。

正解 $\Delta m = 4m_p - m_{\mathrm{He}} - 2m_e$：取 $4 \times 1.0078\,\mathrm{u} - 4.0026\,\mathrm{u} - 2 \times 0.511/931.494\,\mathrm{u} = 0.027503\,\mathrm{u}$，由 $Q = \Delta m \cdot 931.494\,\mathrm{MeV/u}$ 得 $Q \approx 25.6\,\mathrm{MeV}$。核素判定逐式核对电荷数与质量数守恒。

第 2 题 · 第(1)问

错法 碰撞过程只列沿碰撞方向的动量守恒，漏掉对过杆中点且垂直桌面的轴的角动量守恒；或把杆加两球的系统当成一个质点，动能只写一项 $\frac{1}{2}MV^2$。

机理 碰撞内力沿碰撞方向，对 O 轴无内力矩净贡献，杆系统绕自身质心还要转动，因此动量守恒与角动量守恒必须同时用：$mv_0 = mu + 2MV$，$\frac{L}{2}mv_0 = \frac{L}{2}mu + I\omega$（$I = \frac{1}{2}ML^2$）。碰后动能是质心平动动能与绕质心转动动能之和，不能只算平动。

正解 设碰后 C 速度为 u（可正可负），杆系统质心速度 V、角速度 ω；由两守恒式解得 $V = \frac{m(v_0-u)}{2M}$、$\omega = \frac{m(v_0-u)}{ML}$，杆系统动能 $E_k = \frac{1}{2}(2M)V^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$；弹性碰撞下系统总动能守恒，动能取极小值时 $u = v_0\frac{m-M}{m+M}$，$E_{k,\min} = \frac{2Mm}{(m+M)^2}\cdot\frac{v_0^2}{2}$。

第 3 题 · 第(1)问

错法 把恢复系数同时套到水平方向；认为摩擦冲量只改变质心水平速度、不改变转动；或忽略「弹起前刚好与地面无相对滑动」这条接触点速度为零的约束。

机理 恢复系数 k 只约束竖直方向碰后与碰前法向速度之比；水平方向由摩擦冲量改变质心动量，同时摩擦力作用于最低点对质心产生力矩、改变角速度。题给刚弹起时接触点不打滑，即接触点速度为零 $v_x' + \omega' r_0 = 0$，这是联立摩擦冲量与转动方程的关键条件，漏掉它方程组欠定。

正解 竖直方向由恢复系数得 $v_y' = kv_0(-\cos\theta)$ 向上；水平动量定理与绕质心转动方程联立，再代接触点无滑动条件，得 $v_x' = \frac{1}{2}(2v_0\sin\theta - \omega_0 r_0)$、$\omega' = \frac{\omega_0 r_0 - v_0\sin\theta}{2r_0}$。碰前分量按 θ 自竖直向上量起分解，向下的竖直分量注意符号。

第 4 题 · 第(1)问

错法 回波频移只按单程多普勒算一个 v/c 因子；或不辨接近与远离，把目标在航线后方的频移也写成正号。

机理 脉冲先由天线射向目标、再被目标反射回天线，天线朝目标运动使目标处接收频率升高一次，反射后天线作为接收端再朝波源运动又升高同量级，双程频移因子是 2 不是 1。径向距离变化率 $\dot{R} < 0$（目标在前、接近）时 $\Delta f > 0$，并排 $\dot{R} = 0$ 时 $\Delta f = 0$，目标在后、$\dot{R} > 0$ 时 $\Delta f < 0$。

正解 $\Delta f = \frac{2f_0 v(x_P - x_A)}{\sqrt{R_0^2 + (x_P - x_A)^2}}$；目标在前为正、并排为零、在后为负。$|\Delta f|$ 在波束边缘 $|x_P - x_A| = L_s/2$ 时最大，$\Delta f_{\max,\pm} = \pm\frac{f_0 v L_s}{\sqrt{R_0^2 + L_s^2/4}}$。

第 7 题 · 第(3)问

错法　把直线过程的温度极值点当成吸放热转折点；或把该过程摩尔热容当成常量，用一个固定热容算整段吸放热。

机理　升降温转折由 $dT/dV=0$ 判定（$pV=RT$ 微分），吸放热转折由摩尔热容 $C(V)=0$ 判定，两个条件给出不同的点：A 点 $(2V_1/7,\,4p_1/7)$ 是温度极值，B 点 $(8V_1/35,\,16p_1/21)$ 才是吸放热分界。该直线过程 $C(V)$ 随体积变化，定容、定压两个端点之外不是常量。

正解　先由 $dT/dV=0$ 解出 A 点，$V<V_A$ 升温、$V>V_A$ 降温；再令 $C(V)=0$ 解出 B 点，$V<V_B$ 吸热、$V>V_B$ 放热；两点都在直线段 $[V_1,5V_1]$ 内。比较循环效率时，bc' 段在 $V>V_B$ 之后已经放热，实际吸热必须分段积分，不能把整段都算成吸热。

第 8 题 · 第(1)问

错法　只核对薄膜与衬底（或覆盖层）其中一个界面的全反射；临界角直接取 n_0/n_1 或 n_2/n_1 中较小的一个去比。

机理　光在薄膜内锯齿形传播，上下两个界面都不能漏光，必须同时发生全反射；两外侧介质折射率取较大者 $n_c=\max(n_0,n_2)$ 才是更难满足全反射的一侧，临界角由这个较大折射率定出，取较小者会漏掉另一界面的泄光。

正解　两界面全反射条件同时写出 $\sin\theta_{i1}>n_0/n_1$ 与 $\sin\theta_{i1}>n_2/n_1$，合并为 $\sin\theta_{i1}>n_c/n_1$、$n_c=\max(n_0,n_2)$；此时两界面反射系数模为 1，光能量全部返回薄膜。最长波长取最低阶横向驻波 $m=1$ 且入射角贴近临界角，$\lambda_{\max}=2d/\sqrt{n_1^2-n_c^2}$。