第三十二届全国中学生物理竞赛决赛理论试题（本站重排版）

2015 年 | 8 题 | 理论试题 | 原卷合订本已拆分

题干据原合订本前 5 页逐题转录；公式采用 KaTeX 排版；配图为本站重绘矢量图；详解另册。

本试卷可能需要用到下列公式：

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln\frac{x_2}{x_1};\qquad \int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+C;\qquad \ln(1+x)\approx x-\frac{x^2}{2},\ \text{当}\ |x|\ll 1。$$

一、一轻杆通过分别连在其两端的轻质弹簧 A 和 B 悬挂在天花板下，一物块 D 通过轻质弹簧 C 连在轻杆上；A、B 和 C 的劲度系数分别为 k_1、k_2 和 k_3，D 的质量为 m，C 与轻杆的连接点到 A 和 B 的水平距离分别为 a 和 b；整个系统平衡时，轻杆接近水平，如图所示。假设物块 D 在竖直方向做微小振动，A、B 始终可视为竖直，忽略空气阻力。

（1）求系统处于平衡位置时各弹簧相对于各自原长的伸长；

（2）求物块 D 上下微小振动的固有频率；

（3）当 a 和 b 满足什么条件时，物块 D 的固有频率最大？并求出该固有频率的最大值。

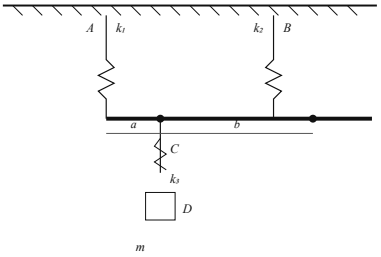


图 1　弹簧悬挂轻杆与物块 D

二、如图，轨道型电磁发射器是由两条平行固定长直刚性金属导轨、高功率电源、接触导电性能良好的电枢和发射体等构成。电流从电源输出，经过导轨、电枢和另一条导轨构成闭合回路，在空间中激发磁场。载流电枢在安培力作用下加速，推动发射体前进。已知电枢质量为 m_s，发射体质量为 m_a；电枢每向前行进单位长度整个回路的电阻和电感的增加量分别为 R_r' 和 L_r'；电枢引入的电阻和电感分别为 R_x 和 L_x；回路连线引入的电阻和电感分别为 R_0 和 L_0。导轨与电枢间摩擦以及空气阻力可忽略。

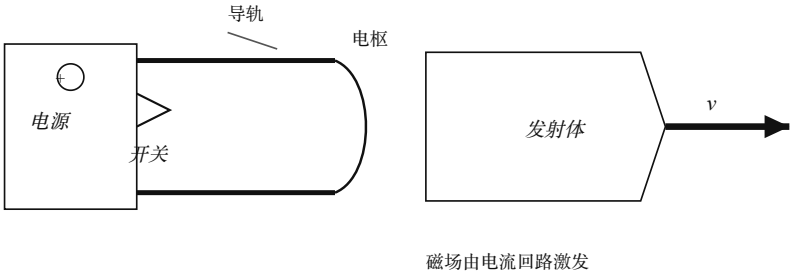


图 2　轨道型电磁发射器

（1）试画出轨道型电磁发射器的等效电路图，并给出回路方程；

（2）求发射体在导轨中运动加速度的大小与回路电流的关系；

（3）设回路电流为恒流（平顶脉冲电流），电枢和发射体的总质量为 $m_s+m_a=0.50$ kg、导轨长度为 $x_{sm}=500$ m、导轨上每单位长度电感增加量 $L_r'=1.0\,\mu$H/m，若发射体开始时静止，出口速度为 $V_{sm}=3.0\times10^3$ m/s，求回路电流 I 和加速时间 τ。

三、俄国火箭专家齐奥尔科夫斯基将火箭发射过程进行模型简化，得出了最早的理想火箭方程，为近代火箭、导弹工程提供了理论依据。该简化模型为：待发射火箭静止于惯性参考系 S 中的某点，忽略火箭所受的地球引力等外力的作用，火箭（包含燃料）的初始静止质量为 M_i；在 $t=0$ 时刻点火，火箭向左排出气体，气体相对于火箭的速度恒为 V_e，使得火箭向右发射。在 S 系中观测，火箭的速度为 V_1，排出气体的速度为 V_2，如图所示。根据此模型，火箭运行一段时间后，当其静止质量由 M_i 变为 M 时，

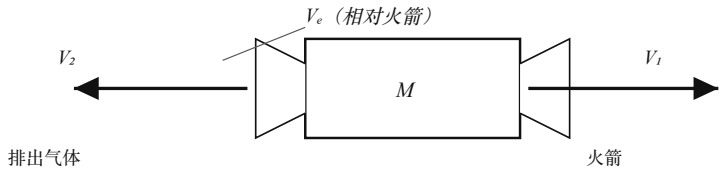


图 3　火箭排气与速度方向

（1）用牛顿力学推导火箭所获得的速度 V_1 与质量比 M/M_i 之间的关系；

（2）用狭义相对论力学推导火箭所获得的速度 V_1 与质量比 M/M_i 之间的关系；

（3）当 V_1 远小于真空中的光速 c 时，计算以上两种结果之差，保留至 $(V_1/c)^2$ 项。

四、光在物体表面反射或者被吸收时，光子将其动量传给物体，产生光的辐射压力（光压）。利用光压，可实现对某些微小粒子的精确操控（光镊）。设在 $|y|\geq L$ 的区域有一匀强激光场，沿 z 轴负方向入射，其强度（单位时间内通过单位横截面积的光能）为 I；在 $y\in(-L,L)$ 之间没有光场，其横截面如图所示。一个密度为 ρ 的三棱柱形小物体（其横截面是底边长为 $2L$、底角为 θ 的等腰三角形）被置于光滑的水平面 xy 上，其朝上的 A 和 B 两面涂有特殊反射层，能完全反射入射光。小物体初始时静止，位置如图。

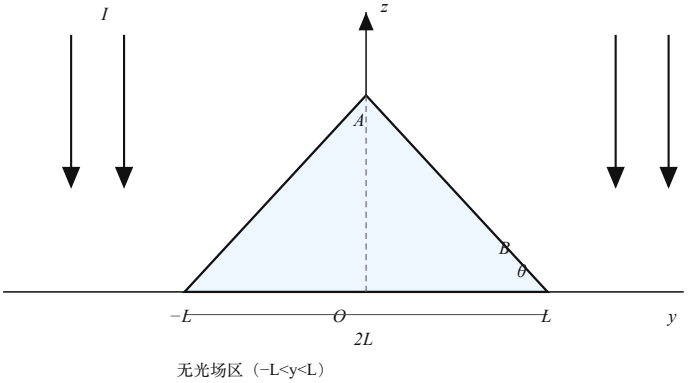


图 4　激光场中的三棱柱小物体

（1）假定光子的反射角等于入射角，且反射前后光子的频率不变。试求：

（a）小物体在受到激光场照射后的动力学方程；

（b）小物体从初始位置向 y 轴负方向移动 $3L/2$ 的距离所需的时间；

（2）若考虑小物体运动对反射光子频率的影响，反射光子频率会有微小的变化；在小物体从初始位置向 y 轴负方向移动到距离为 $3L/2$ 的过程中，定性比较反射光子与入射光子频率的大小及其随时间的变化。

五、如图，一个上端固定、内半径为 R_1 的玻璃圆筒底部浸没在大容器中的水面之下，未与容器底接触；将另一个外半径为 R_2（R_2 略小于 R_1）的同质玻璃制成的圆筒（上端固定）放置其中，不接触容器底，保持两玻璃圆筒的中轴线重合且竖直。设水与玻璃之间的接触角为 θ（即气-液界面在水的最高处的切线与固-液界面的夹角，见局部放大图）。已知水的密度和表面张力系数分别为 ρ 和 α，地面重力加速度的大小为 g。

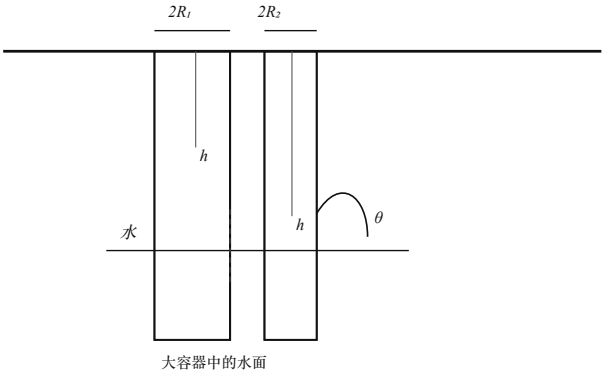


图 5　两同心玻璃圆筒间的毛细上升

（1）在毛细现象中，系统毛细作用引起的势能变化，可以等效地看作固-液-气分界线上液体表面张力在液面上升或下降过程中做的功。试证：以大容器中的水面处为系统势能零点，则当水由于毛细作用上升高度为 h 时，系统毛细作用的势能为

$$E_s(h) = -2\pi\alpha\cos\theta(R_1 + R_2)h;$$

（2）试导出系统在水由于毛细作用上升的过程中释放的热量；

（3）如果在超万米高空飞机中短时间内做此实验，飞机可视为做匀速直线运动。测得该系统在同样过程中放出的热量为 Q，试估计此时飞机距离地面高度。假定该飞机内水的表面张力系数和接触角与地面情形相同。以上计算不考虑地球自转。

六、太阳系内行星的公转方向基本相同。地球上的观测者所看到的行星位置实际上是该行星在遥远的背景星空中的投影。由于各行星的公转速度以及它们在轨道上位置的不同，地球上的观测者看到的行星在背景星空中移动的方向与地球公转方向并非总是相同。人们把看到的行星移动方向与地球公转方向相同的行星视运动叫顺行，方向相反的叫逆行。当行星位于由顺行转成逆行或由逆行转成顺行的转折点时，行星看起来好像停留在星空不动，该位置叫留。天文学把地外行星运行到太阳和地球所在的直线上、且太阳和地外行星位于地球的两侧的情形叫行星冲日。火星冲日是常见的天文现象。设地球和火星都在同一平面内绕太阳做圆周运动，且只考虑太阳对行星的引力。已知火星轨道半径 R_m 为地球轨道半径 R_E 的 1.524 倍，不考虑地球自转，试计算火星在经历相邻两次冲日的时间间隔内其视运动为逆行和顺行的时间间隔。

七、飞行时间质谱仪（TOFMS）的基本原理如图 1 所示，主要由离子源区、漂移区和探测器三部分组成。带正电的离子在离子源中形成后被电场 E_s 加速，经过漂移区（真空无场），到达离子探测器。设离子在离子源区加速的距离为 S，在漂移区漂移的距离为 L。通过记录离子到达探测器的时间，可以把不同的离子按质荷比 m/q 的大小进行分离，这里 m 和 q 分别表示离子的质量和电量。分辨率是 TOFMS 最重要的性能指标，本题将在不同情况下进行讨论或计算。忽略重力的影响。

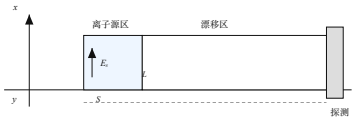


图 7-1　理想 TOFMS

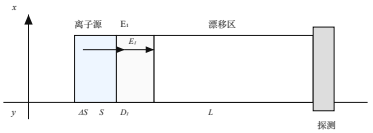


图 7-2　双加速区 TOFMS

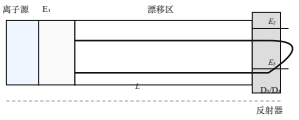


图 7-3　反射式 TOFMS

（1）对于理想的 TOFMS，不同离子在离子源 X 轴方向同一位置、同一时刻 $t = 0$ 产生，且初速度为 0。探测器可以测定离子到达探测器的时刻 t，其最小分辨时间为 Δt（即探测器所测时刻 t 的误差）。定义仪器的分辨率为 $R = m/\Delta m$，其中 Δm 为最小分辨时间 Δt 对应的最小分辨质量。此种情形下，R 完全由 Δt 决定，试推导 R 与 t 和 Δt 之间的关系。

（2）实际上，离子产生的位置也有微小的差别 ΔS（$\Delta S \ll S$），这导致具有相同质荷比的离子不能同时到达探测器，从而影响质谱仪的分辨率。如图 2 所示，在离子源后引入第二加速电场 E_1，该电场区域的长度为 D_1，通过适当选择漂移区的长度 L，可使同一时刻在不同位置产生的质荷比相同的离子尽量同时到达探测器，以使分辨率受 ΔS 的影响最小，试求 L 的值。

（3）为进一步降低离子产生位置的离散性对分辨率的影响，通常采用如图 3 所示的反射式 TOFMS。这里在二级加速电场（E_s 和 E_1）的基础上增加了反射器，它由两级电场 E_2 和 E_3 组成，通过这两级电场对离子的飞行方向进行反转，以使分辨率受 ΔS 的影响最小，试求 L 的值。为简化计算，假设离子的运动是平行于 X 方向的直线运动。（装置的各参数间满足关系 $E_sS + E_1D_1 \le E_2D_2 + E_3D_3$，以使所有离子飞行方向的反转都可以实现。）

八、激光瞄准系统的设计需考虑空气折射率的变化。由于受到地表状况、海拔高度、气温、湿度和空气密度等多种因素的影响，空气的折射率在大气层中的分布是不均匀的，因而激光的传播路径并不是直线。为简化起见，假设某地的空气折射率随高度 y 的变化如下式所示

$$n^2 = n_0^2 + \alpha^2 y,$$

式中 n_0 是 $y = 0$ 处（地面）空气的折射率，n_0 和 α 均为大于零的已知常量。激光本身的传播时间可忽略。激光发射器位于坐标原点 O，如图。

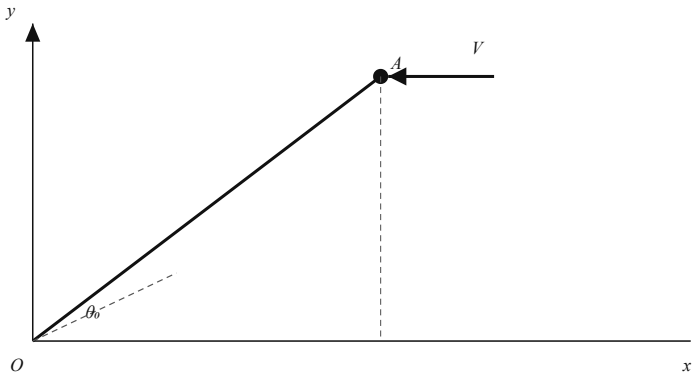


图 8　激光传播路径与目标 A

（1）若激光的出射方向与竖直方向 y 轴的夹角为 θ_0（$0 \le \theta_0 \le \pi/2$），求描述该激光传播路径的方程。

（2）假定目标 A 位于第 I 象限。当目标 A 的高度为 y_a 时，求激光发射器可照射到的目标 A 的最大 x 坐标值 $x_{a\max}$。

（3）激光毁伤目标需要一定的照射时间。若目标 A 处在激光发射器的可攻击范围内，其初始位置为 (x_0, y_0)，该目标在同一高度上以匀速度 V 接近激光发射器。为了使激光能始终照射该目标，激光出射角 θ_0 应如何随时间 t 而变化?

（4）激光发射器的攻击通常遵从安全击毁的原则，即既要击毁目标飞行器 A，又必须使目标飞行器 A 水平投出的所有炸弹，都不能炸到激光发射器（炸弹在投出时相对于 A 静止）。假定 A 一旦进入激光发射器可攻击范围，激光发射器便立即用激光照射它。已知水平飞行目标 A 的高度为 y_a，击毁 A 需要激光持续照射的时间为 t_a，且位于坐标原点 O 的激光器能安全击毁它；试求 A 的速度范围。不考虑空气阻力，重力加速度大小为 g。