第三十三届全国中学生物理竞赛复赛试题（本站重排版）

2016 年 | 第 33 届复赛 | 理论部分 | 8 题 | 原合订本已拆分

题干据原合订本前 5 页逐题转录；原卷答案自第 5 页下半页起，已剥离；公式采用 KaTeX；配图为本站重绘矢量图；详解另册。

一、如图，上、下两个平凸透光柱面的半径分别为 R_1、R_2，且两柱面外切；其剖面（平面）分别平行于各自的轴线，且相互平行；各自过切点的母线相互垂直。取两柱面切点 O 为直角坐标系 O-XYZ 的原点，下侧柱面过切点 O 的母线为 X 轴，上侧柱面过切点 O 的母线为 Y 轴。一束在真空中波长为 λ 的可见光沿 Z 轴负方向傍轴入射，分别从上、下柱面反射回来的光线会发生干涉；借助于光学读数显微镜，逆着 Z 轴方向，可观测到原点附近上方柱面上的干涉条纹在 X-Y 平面的投影。R_1 和 R_2 远大于傍轴光线干涉区域所对应的两柱面间最大间隙。空气折射率为 $n_0 = 1.00$。试推导第 k 级亮纹在 X-Y 平面的投影的曲线方程。

已知：a. 在两种均匀、各向同性的介质的分界面两侧，折射率较大（小）的介质为光密（疏）介质；光线在光密（疏）介质的表面反射时，反射波存在（不存在）半波损失。任何情形下，折射波不存在半波损失。伴随半波损失将产生大小为 π 的相位突变。b. $\sin x \approx x$，当 $|x| \ll 1$。

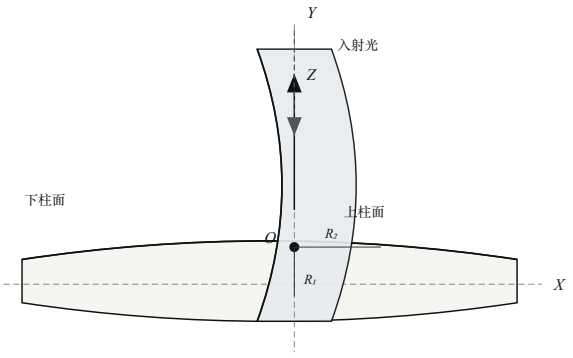

图 1　两个正交平凸柱面与入射光

二、某秋天清晨，气温为 4.0°C，一加水员到实验园区给一内径为 2.00 m、高为 2.00 m 的圆柱形不锈钢蒸馏水罐加水。罐体导热良好。罐外有一内径为 4.00 cm 的透明圆柱形观察柱，底部与罐相连（连接处很短），顶部与大气相通，如图所示。加完水后，加水员在水面上覆盖一层轻质防蒸发膜（不溶于水，与罐壁无摩擦），并密闭了罐顶的加水口。此时加水员通过观察柱上的刻度看到罐内水高为 1.00 m。

（1）从清晨到中午，气温缓慢升至 24.0°C，问此时观察柱内水位为多少？假设中间无人用水，水的蒸发及罐和观察柱体积随温度的变化可忽略。

（2）从密闭水罐后至中午，罐内空气对外做的功和吸收的热量分别为多少？求这个过程中罐内空气的热容量。

已知罐外气压始终为标准大气压 $p_0 = 1.01 \times 10^5$ Pa，水在 4.0°C 时的密度为 $\rho_0 = 1.00 \times 10^3$ kg · m⁻3，水在温度变化过程中的平均体积膨胀系数为 $\kappa = 3.03 \times 10^{-4}$ K^{-1}，重力加速度大小为 $g = 9.80$ m · s^{-2}，绝对零度为 −273.15°C。

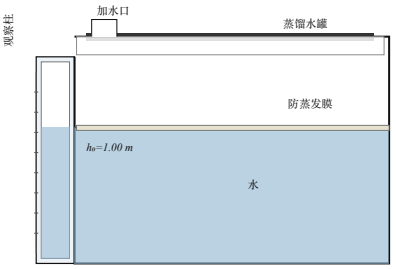

图 2　蒸馏水罐与透明观察柱

三、（20 分）木星是太阳系内质量最大的行星（其质量约为地球的 318 倍）。假设地球与木星均沿圆轨道绕太阳转动，两条轨道在同一平面内。将太阳、地球和木星都视为质点，忽略太阳系内其它星体的引力；且地球和木星之间的引力在有太阳时可忽略。已知太阳和木星质量分别为 m_s 和 m_j，引力常量为 G。地球和木星绕太阳运行的轨道半径分别是 r_e 和 r_j。假设在某个时刻，地球与太阳的连线和木星与太阳的连线之间的夹角为 θ。这时若太阳质量突然变为零，求

（1）此时地球相对木星的速度大小 v_e 和地球不被木星引力俘获所需要的最小速率 v_0。

（2）试讨论此后地球是否会围绕木星转动，可利用（1）中结果和数据 $m_s = 2.0 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$、$m_j = 1.9 \times 10^{27}\,\mathrm{kg}$、木星公转周期 $T_j = 12\,\mathrm{y}$。

四、（20 分）蹦极是年轻人喜爱的运动。为研究蹦极过程，现将一长为 L、质量为 m、当仅受到绳本身重力时几乎不可伸长的均匀弹性绳的一端系在桥沿 b，绳的另一端系一质量为 M 的小物块（模拟蹦极者）；假设 M 比 m 大很多，以至于均匀弹性绳受到绳本身重力和蹦极者的重力向下拉时会显著伸长，但仍在弹性限度内。在蹦极者从静止下落直至蹦极者到达最下端、但未向下拉紧绳之前的下落过程中，不考虑水平运动和可能的能量损失。重力加速度大小为 g。

（1）求蹦极者从静止下落距离 y（$y < L$）时的速度和加速度的大小，蹦极者在所考虑的下落过程中的速度和加速度大小的上限。

（2）求蹦极者从静止下落距离 y（$y < L$）时，绳在其左端悬点 b 处张力的大小。

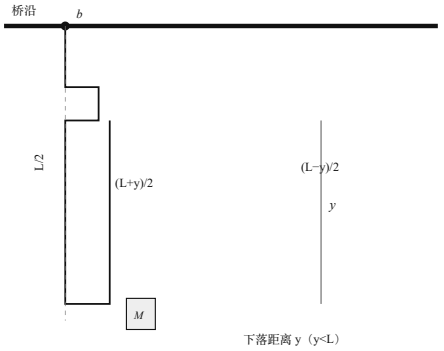

图 4　蹦极绳下落过程中的几何关系

五、一种拉伸传感器的示意图如图 a 所示：它由一半径为 r_2 的圆柱形塑料棒和在上面紧密缠绕 N（$N \gg 1$）圈的一层细绳组成；绳柔软绝缘，半径为 r_1，外表面均匀涂有厚度为 t（$t \ll r_1 \ll r_2$）、电阻率为 ρ 的石墨烯材料；传感器两端加有环形电极（与绳保持良好接触）。未拉伸时，缠绕的绳可视为 N 个椭圆环挨在一起放置；该椭圆环面与圆柱形塑料棒的横截面之间的夹角为 θ（见图 a），相邻两圈绳之间的接触电阻为 R_c。

现将整个传感器沿塑料棒轴向朝两端拉伸，绳间出现 n 个缝隙，每个缝隙中刚好有一整圈绳，这圈绳被自动调节成由一个未封闭圆环和两段短直线段（与塑料棒轴线平行）串接而成（见图 b）。假设拉伸前后 θ、r_1、r_2、ρ、t 均不变。

（1）求拉伸后传感器的伸长率 ε（ε 是传感器两电极之间距离的伸长与其原长之比）和两环形电极间电阻的变化率；

（2）在传感器两环形电极间通入大小为 I 的电流，求此传感器在未拉伸及拉伸后，在塑料棒轴线上离塑料棒中点 O 距离为 D（D 远大于传感器长度）的 P 点（图中未画出）处沿轴向的磁感应强度。

已知：长半轴和短半轴的长度分别为 a 和 b 的椭圆的周长为 $\pi\left(3\dfrac{a+b}{2} - \sqrt{ab}\right)$，其中 $b \neq 0$。

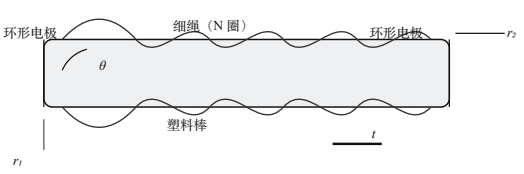

图 5a　未拉伸时的传感器

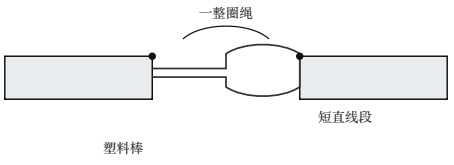

图 5b　拉伸后某一缝隙

六、（20 分）光电倍增管是用来将光信号转化为电信号并加以放大的装置，其结构如图 a 所示：它主要由一个光阴极、n 个倍增级和一个阳极构成；光阴极与第 1 倍增级、各相邻倍增级及第 n 倍增级与阳极之间均有电势差 V；从光阴极逸出的电子称为光电子，其中大部分（百分比 η）被收集到第 1 倍增级上，余下的被直接收集到阳极上；每个被收集到第 i 倍增级（$i = 1, \cdots, n$）的电子在该电极上又使得 δ 个电子（$\delta > 1$）逸出；第 i 倍增级上逸出的电子有大部分（百分比 σ）被第 $i+1$ 倍增级收集，其他被阳极收集；直至所有电子被阳极收集，实现信号放大。已知电子电荷量绝对值为 e。

（1）求光电倍增管放大一个光电子的平均能耗，已知 $\delta\sigma > 1$，$n \gg 1$；

（2）为使尽可能多的电子从第 i 倍增级直接到达第 $i+1$ 倍增级而非阳极，早期的光电倍增管中，会施加垂直于电子运行轨迹所在平面（纸面）的匀强磁场。设倍增级的长度为 a 且相邻倍增级间的几何位置如图 b 所示，倍增级间电势差引起的电场很小可忽略。所施加的匀强磁场应取什么方向以及磁感应强度大小为多少时，才能使从第 i 倍增级垂直出射的能量为 E_c 的电子中直接打到第 $i+1$ 倍增级的电子最多？磁感应强度大小为多少时，可以保证在第 $i+1$ 倍增级上至少收集到一些从第 i 倍增级垂直出射的能量为 E_c 的电子？

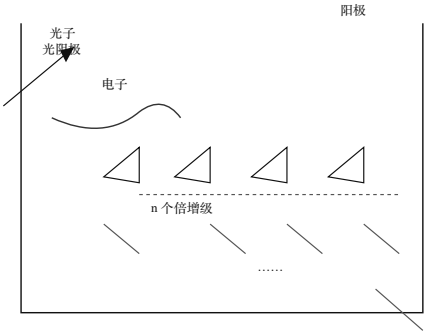

图 6a　光电倍增管结构

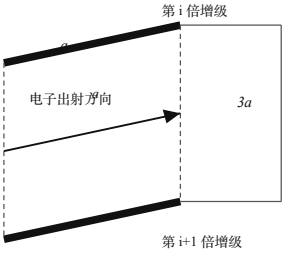

图 6b　相邻倍增级几何位置

七、两根质量均匀分布的杆 AB 和 BC，质量均为 m，长均为 l，A 端被光滑铰接到一固定点（即 AB 杆可在竖直平面内绕 A 点无摩擦转动）。开始时 C 点有外力保持两杆静止，A、C 在同一水平线 AD 上，A、B、C 三点都在同一竖直平面内，$\angle ABC = 60^\circ$。某时刻撤去外力后两杆始终在竖直平面内运动。

（1）若两杆在 B 点固结在一起，求

（i）初始时两杆的角加速度；

（ii）当 AB 杆运动到与水平线 AD 的夹角为 θ 时，AB 杆绕 A 点转动的角速度。

（2）若两杆在 B 点光滑铰接在一起（即 BC 杆可在竖直平面内绕 B 点无摩擦转动），求初始时两杆的角加速度以及两杆间的相互作用力。

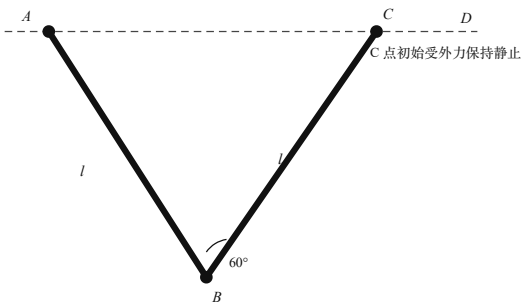

图 7　两根均质杆与固定铰点 A

八、质子是由更小的所谓“部分子”构成的。欧洲大型强子对撞机（LHC）是高能质子-质子对撞机，质子束内单个质子能量为 $E = 7.0\,\mathrm{TeV}$（$1\,\mathrm{TeV} = 10^3\,\mathrm{GeV} = 10^{12}\,\mathrm{eV}$）；两束能量相同的质子相向而行对撞碎裂，其中相撞的两个部分子 a、b 相互作用湮灭产生一个新粒子。设部分子 a、b 的动能在质子能量中所占的比值分别为 x_a、x_b，且远大于其静能。

（1）假设两个部分子 a、b 对撞湮灭产生了一个静质量为 $m_S = 1.0\,\mathrm{TeV}/c^2$ 的新粒子 S，求 x_a 和 x_b 的乘积 $x_a x_b$；

（2）假设新粒子 S 产生后衰变到两个光子，在新粒子 S 静止的参考系中，求两光子的频率；

（3）假设新粒子 S 产生后在其静止坐标系中衰变到两个质量为 $m_A = 1.0\,\mathrm{GeV}/c^2$ 的轻粒子 A，每个轻粒子 A 再衰变到两个同频率的光子，求在这个坐标系中这两个光子动量之间的夹角。

已知：$\sin\alpha \approx \alpha$，当 $\alpha \ll 1$；普朗克常量 $h = 6.63 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\cdot\ s}$，电子电荷量绝对值 $e = 1.60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$。