第三十三届全国中学生物理竞赛决赛试题（本站重排版）

2016 年 ｜ 第 33 届决赛 ｜ 理论部分 ｜ 8 题 ｜ 原合订本已拆分

题干据原合订本前 6 页逐题转录；第 7 页起为答案部分，已剥离；公式采用 KaTeX；配图为本站重绘矢量图；详解另册。

可能用到的物理常量和公式：

真空中光速 $c = 2.998 \times 10^8\ \mathrm{m/s}$；地球表面重力加速度大小为 g；普朗克常量 h，$\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$；

$\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + C, \quad |x| < 1$。

一、山西大同某煤矿相对于秦皇岛的高度为 h_c。质量为 m_t 的火车载有质量为 m_c 的煤，从大同沿大秦线铁路行驶路程 l 后到达秦皇岛，卸载后空车返回。从大同到秦皇岛的过程中，火车和煤总势能的一部分克服铁轨和空气阻力做功，其余部分由发电机转换成电能，平均转换效率为 η_1，电能被全部储存于蓄电池中以用于返程。空车在返程中由储存的电能驱动电动机克服重力和阻力做功，存储电能转化为对外做功的平均转换效率为 η_2。假设大秦线轨道上火车平均每运行单位距离克服阻力需要做的功与运行时（火车或火车和煤）总重量成正比，比例系数为常数 μ，火车由大同出发时携带的电能为零。

（1）若空车返回大同时还有剩余的电能，求该电能 E。

（2）问火车至少装载质量为多少的煤，才能在不另外提供能量的条件下刚好返回大同？

（3）已知火车在从大同到秦皇岛的铁轨上运行的平均速率为 V，请给出 V 与发电机平均输出功率 P 和其它物理量的关系。

二、如图 a，AB 为一根匀质细杆，质量为 m，长度为 l_2；杆上端 B 通过一不可伸长的软轻绳悬挂到固定点 O，绳长为 l_1。开始时绳和杆均静止下垂。此后所有运动均在同一竖直面内。

（1）现对杆上的 D 点沿水平方向施加一瞬时冲量 I，若在施加冲量后的瞬间，B 点绕悬点 O 转动的角速度和杆绕其质心转动的角速度相同，求 D 点到 B 点的距离 x 和 B 点绕悬点 O 转动的初始角速度 ω_0。

（2）设在某时刻，绳和杆与竖直方向的夹角分别为 θ_1 和 θ_2（如图 b 所示），绳绕固定点 O 和杆绕其质心转动的角速度分别为 ω_1 和 ω_2，求绳绕固定点 O 和杆绕其质心转动的角加速度 α_1 和 α_2。

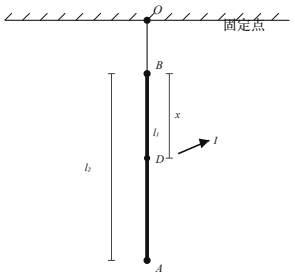

图 2a　绳与杆的初始竖直位置

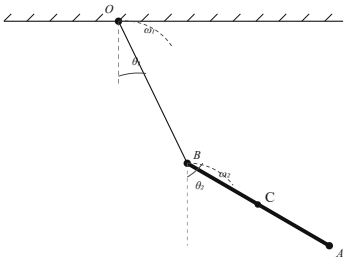

图 2b　绳、杆与竖直方向的夹角

三、（15 分）火星大气可视为仅由很稀薄的 CO_2 组成，此大气的摩尔质量记为 μ，且同一高度的大气可视为处于平衡态的理想气体。火星质量为 M_m（远大于火星大气总质量），半径为 R_m。假设火星大气的质量密度与距离火星表面的高度 h 的关系为

$$\rho(h) = \rho_0 \left(\frac{R_m}{R_m + h}\right)^{n-1},$$

其中 ρ_0 为常量，n（$n > 4$）为常数。

（1）求火星大气温度随高度 h 变化的表达式。

（2）为了对火星表面进行探测，需将一质量为 m_l、质量密度较大的着陆器释放到火星表面。在某一远小于 R_m 的高度处将该着陆器由静止开始释放，经过时间 t_l，着陆器落到火星表面。在着陆器下降的过程中，着陆器没有转动，火星的重力加速度和大气密度均可视为与它们在火星表面的值相等。当着陆器下降速度大小为 v 时，它受到的大气阻力正比于大气密度和 v^2 的乘积，比例系数为常量 k。求着陆器在着陆前的瞬间速度的大小。

四、具有一定能量、动量的光子还具有角动量。圆偏振光的光子的角动量大小为 $\hbar$。光子被物体吸收后，光子的能量、动量和角动量就全部传给物体。物体吸收光子获得的角动量可以使物体转动。科学家利用这一原理，在连续的圆偏振激光照射下，实现了纳米颗粒的高速转动，获得了迄今为止液体环境中转速最高的微尺度转子。

如图，一金纳米球颗粒放置在两片水平光滑玻璃平板之间，并整体（包括玻璃平板）浸在水中。一束圆偏振激光从上往下照射到金纳米颗粒上。已知该束入射激光在真空中的波长 $\lambda = 830\,\mathrm{nm}$；经显微镜聚焦后（仍假设为平面波，每个光子具有沿传播方向的角动量 $\hbar$）光斑直径 $d = 1.20 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}$，功率 $P = 20.0\,\mathrm{mW}$。金纳米球颗粒的半径 $R = 100\,\mathrm{nm}$，金的密度 $\rho = 19.32 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$。忽略光在介质界面上的反射以及玻璃、水对光的吸收等损失，仅从金纳米颗粒吸收光子获得角动量驱动其转动的角度分析下列问题（计算结果取 3 位有效数字）：

（1）求该束激光的频率 ν 和光强 I（在传播方向上单位横截面积所传输的功率）。

（2）给出金纳米球颗粒的质量 m 和它绕其对称轴的转动惯量 J 的值。

（3）假设颗粒对光的吸收截面（颗粒吸收的光功率与入射光强之比）为 $\sigma_{\mathrm{abs}} = 0.123\pi R^2$，求该束激光作用在颗粒上沿旋转对称轴的力矩的大小 M。

（4）已知半径为 r 的球形颗粒在粘滞系数为 η 的液体中以角速度 ω 旋转时，受到的粘滞摩擦力矩大小为 $M_f = 8\pi\eta r^3\omega$。已知水的粘滞系数 $\eta = 8.00 \times 10^{-4}\,\mathrm{Pa\cdot\ s}$，求金纳米球颗粒在此光束照射下达到稳定旋转时的转速（转数/秒）f。

（5）取光开始照到静止金纳米颗粒的瞬间为计时零点 $t_0 = 0$，求任意时刻 t（$t > 0$）该颗粒转速 $f(t)$ 的表达式。

（6）若把入射激光束换成方波脉冲激光束，脉冲宽度为 T_1（此期间内光强仍为 I），脉冲之间的间歇时间为 T_2。取第一个脉冲的光开始照到颗粒的时刻为计时零点 $t_0 = 0$，求第 n 个完整脉冲周期（$T_1 + T_2$）后的瞬间颗粒的转速 f_n 的表达式，并给出转速极限 $f_{n\to\infty}$ 的表达式。

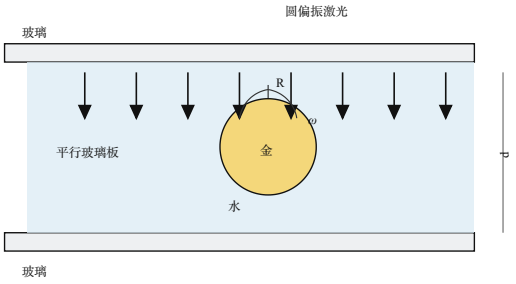

图 4　金纳米球颗粒在圆偏振激光束中

五、许多赛车上都装有可调节的导流翼片，可以为水平道路上的赛车提供竖直向上或向下的附加压力。如果赛车速度的大小为 V，则上述压力的大小为 $f_B = c_B V^2$，c_B 为一常量。当导流翼片的前方上翘时，压力方向向上；当导流翼片的后方上翘时，压力方向向下。赛车在运动过程中受到迎面空气的阻力，阻力大小为 $f_A = c_A V^2$，c_A 为一常量。已知赛车质量为 m，轮胎与路面之间的静摩擦系数为 μ_s（$\mu_s < 1$）。

（1）赛车在水平直道上匀速行驶时，考虑到在运动过程中轮胎的形变，路面对赛车会形成阻力，阻力大小与车对路面的正压力大小成正比，比例系数为 μ_R（$\mu_R < \mu_s$）。若导流翼片被调至前方上翘，求当赛车行驶速度大小为多大时，赛车发动机输出的功率最大？最大输出功率为多少？

（2）不考虑赛车在运动过程中轮胎的形变所引起的地面阻力，求当赛车在水平地面内沿半径为 r 的圆形道路上匀速率行驶、且不沿路面发生滑动或飞离地面时所允许的速率最大值 $v_{\max}$。在这种情况下，导流翼片应被调至前方上翘还是后方上翘，$v_{\max}$ 可以更大？假设赛车发动机输出的功率可以足够大。

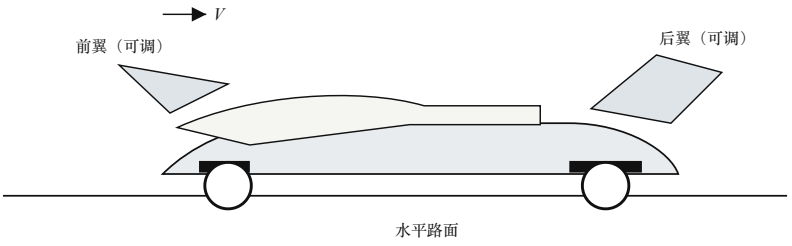

图 5　装有可调导流翼片的赛车

六、Hyperloop 是一款利用胶囊状的运输车在水平管道中的快速运动来实现超高速运输的系统（见图 a）。它采用了“气垫”技术和“直线电动机”原理。

“气垫”技术是将内部高压气体从水平放置的运输车下半部的细孔快速喷出（见图 b），以至于整个运输车被托离管壁非常小的距离，从而可忽略摩擦。运输车横截面是半径为 R 的圆，运输车下半部壁上均匀分布有沿径向的大量细孔，单位面积内细孔个数为 n（$n \gg 1$），单个细孔面积为 s。运输车长度为 L，质量为 m。气体的流动可认为遵从伯努利方程，且温度不变，细孔出口处气体的压强为较低的环境压强 P_{low}。

如图 c，在水平管道中固定有两条平行的水平光滑供电导轨（粗实线），运输车上固定有与导轨垂直的两根导线（细实线）；导轨横截面为圆形，半径为 r_d，电阻率为 ρ_d，两导轨轴线间距为 $2(D + r_d)$；两根导线的粗细可忽略，间距为 D；每根导线电阻是长度为 D 的导轨电阻的 2 倍。两导线和导轨轴线均处于同一水平面内。导轨、导线电接触良好，且所有接触电阻均可忽略。

（1）求内部高压气体压强为多大时运输车才刚好能被托起?

（2）如图 d 所示，当运输车进站时，运输车以速度 v_0 沿水平光滑导轨滑进匀强磁场区域，磁场边界与导线平行，磁感应强度大小为 B，方向垂直于导轨—导线平面向下。当两根导线全部进入磁场后，求运输车滑动速度的大小。

（3）当运输车静止在水平光滑导轨上准备离站时，在导线 2 后间距为 D 处接通固定在导轨上电动势为 $\mathcal{E}$ 的恒压直流电源（如图 e 所示）。设电源体积及其所连导线的电阻可忽略，求刚接通电源时运输车的加速度大小。

已知某恒流闭合回路中的一圆柱形直导线段，电流沿横截面均匀分布，如图 f 所示，其在空间中距导线轴线距离为 r_0 的某点产生的磁感应强度方向垂直于该点和导线轴线构成的平面，大小可用下式近似计算

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}(\cos\theta_1 + \cos\theta_2),$$

其中 I 为电流，θ_1、θ_2 是此点与导线段轴线两端连线与导线轴线的夹角。



图 6a　运输车在水平管道中

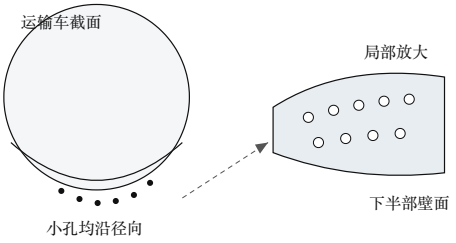

图 6b　运输车截面与下半部细孔

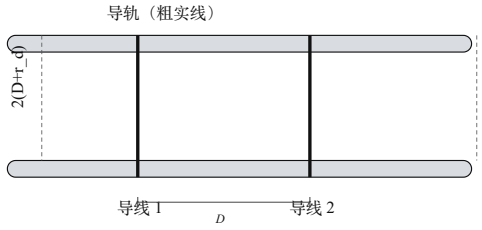

图 6c　两根导线与导轨

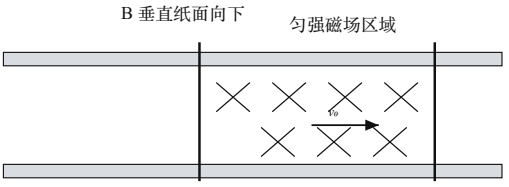

图 6d　进入磁场区域

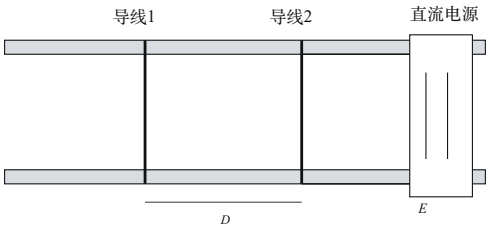

图 6e　接通直流电源

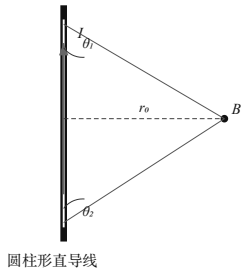

图 6f　直导线段的磁场

七、爱因斯坦引力理论预言物质分布的变化会导致时空几何结构的波动——引力波。为简明起见，考虑沿 z 轴传播的平面引力波。对于任意给定的 z，在 x-y 二维空间中两个无限邻近点 (x, y) 和 $(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y)$ 之间距离 $\mathrm{d}r$ 的表达式为

$$\mathrm{d}r = \sqrt{(1 + f_1)(\mathrm{d}x)^2 + f_2(\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \mathrm{d}y\mathrm{d}x) + (1 - f_1)(\mathrm{d}y)^2}.$$

引力波体现为 f_1 和 f_2 的变化（波动）。

（1）假设一列平面引力波传来时，f_1 和 f_2 可表示为

$$f_1 = A\sin\left[\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)\right],\quad f_2 = 0;\quad 0 < A \ll 1.$$

式中，A 和 ω 分别是波的振幅和角频率，c 是引力波的传播速度（其值等于光速）。

（i）无引力波穿过时，在 x-y 平面上，在原点 O 处和与 O 点距离为 R、与 x 轴夹角为 θ 处各放置一个微探测器。求当所考虑的引力波穿过时，两个探测器之间的距离相对于 R 的偏离的近似表达式。

（ii）设无引力波穿过时，在 x-y 平面上，在以 R 为半径、原点 O 为圆心的圆周上放置了一个微探测器阵列。当前述引力波存在时，可将空间坐标重新定义为 (X, Y)，使得 X-Y 二维空间中邻近两点 (X, Y) 和 $(X+\mathrm{d}X, Y+\mathrm{d}Y)$ 距离为 $\sqrt{(\mathrm{d}X)^2+(\mathrm{d}Y)^2}$。求对于给定的时刻 t，微探测器阵列在新定义的坐标系中的分布形状。

（iii）若一列平面引力波

$$f_1 = A\sin\left[\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)\right],\quad f_2 = 0$$

和另一列平面引力波

$$f_1 = A\sin\left[\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)+\phi\right],\quad f_2 = 0,\quad \phi\ (0\le\phi<2\pi)\text{ 是常数}$$

同时沿 z 轴正向传播，问 ϕ、θ 满足什么条件，可使引力波对原点 O 处和 x-y 二维空间中坐标为 $(R\cos\theta, R\sin\theta)$ 的点处的两个微探测器之间距离的扰动的振幅达到最大或者最小?

（2）假定引力波的波源为双星系统。设该双星系统两星体质量均为 M。取双星系统的质心为坐标原点 O'，双星系统在 x'-y' 二维空间中旋转。已知在特定条件下，f_1 和 f_2 可近似表示为

$$f_1 = \frac{8\pi G}{c^4}\frac{2}{l}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left[I_1\left(t-\frac{l}{c}\right)\right],\quad f_2 = \frac{8\pi G}{c^4}\frac{2}{l}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left[I_2\left(t-\frac{l}{c}\right)\right],$$

式中 G 为引力常量，l 为在 z' 轴上引力波探测点到 O' 点的距离（远大于双星系统中两星体之间的距离），而

$$I_1(t) = \left[x_1'^2(t)+x_2'^2(t)\right]M,\quad I_2(t) = x_1'(t)y_1'(t)M.$$

$(x_1'(t), y_1'(t))$、$(x_2'(t), y_2'(t))$ 为两星体在其质心系中的坐标（注：在这样的定义下，$\mathrm{d}r$ 表达中的系数应替换为 $f_1 \to f_1$，$f_2 \to 2f_2$）。已知该引力波的频率为 ω，假设引力波辐射对双星系统轨道运动的影响可忽略，求 f_1 和 f_2 在探测点处的振幅。

八、电子偶素原子（Ps）是由电子 e^- 与正电子 e^+（电子的反粒子，其质量与电子的相同，电荷与电子的大小相等、符号相反）组成的量子束缚体系，其能级可类比氢原子能级得出。根据玻尔氢原子理论，电子绕质子的圆周运动轨道角动量的取值是量子化的，即为 $\hbar$ 的整数倍。考虑到质子质量是有限的，氢原子量子化条件应修正为：电子与质子质心系中相对其质心的总轨道角动量取值为 $\hbar$ 的整数倍。这一量子化条件可直接推广到其它两体束缚体系，如电子偶素等。以下计算结果均保留四位有效数字。

（1）写出电子偶素基态能量。

（2）电子偶素基态原子不稳定，可很快发生湮没而生成两个光子：

$$\mathrm{Ps} \to \gamma_1 + \gamma_2.$$

当基态电子偶素原子相对于实验室参照系以远小于光速的某速度运动时发生湮没，在相对于该速度方向的偏角为 θ_1 的方向上观测到生成的一个光子 γ_1，同时在相对于光子 γ_1 速度反方向的偏角为 $\Delta\theta$（$\Delta\theta \ll 1$）的方向上观测到另一个光子 γ_2，如图所示。

（i）求基态电子偶素原子速度 V_0 的大小、两个光子 γ_1 和 γ_2 的能量 E_1 和 E_2 的表达式；并给出当 $\theta_1 = \dfrac{\pi}{3}$、$\Delta\theta = 3.464 \times 10^{-3}$ 时 V_0、E_1 和 E_2 的值。

（ii）当基态电子偶素原子静止时，求两个光子 γ_1、γ_2 各自的能量 E_1、E_2 与单个自由电子静能之差。

（3）当基态电子偶素原子相对于实验室参照系以与光速 c 可比拟的速度 V_0 运动时湮没生成两个光子，求生成的两个光子 γ_1 和 γ_2 的能量 E_1 和 E_2、以及光子 γ_2 的运动方向相对于 V_0 方向的偏角 θ_2（如图所示）与 θ_1 之间的关系式；并给出当 $V_0 = \dfrac{c}{2}$、$\theta_1 = \dfrac{\pi}{3}$ 时 E_1、E_2 和 θ_2 的值。

已知：氢原子基态能量 $E_{n=1}^{\mathrm{H}} = -13.60\,\mathrm{eV}$，电子质量 $m_e = 0.5110\,\mathrm{MeV}/c^2$，质子与电子的质量之比为 1836。

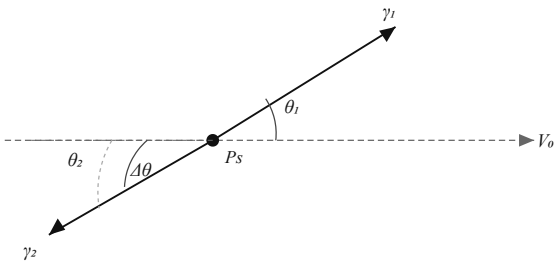

图 8　电子偶素湮没生成的两个光子