第 34 届全国中学生物理竞赛复赛理论考试试题（本站重排版）

2017 年 9 月 16 日 | 复赛理论 | 8 道计算大题 | 全卷主观点

题干据中国物理学会 2017 年复赛理论卷逐题转录；公式采用 KaTeX；配图为本站重绘矢量图；详解另册。

一、一个半径为 r、质量为 m 的均质实心小圆柱被置于一个半径为 R、质量为 M 的薄圆筒中，圆筒和小圆柱的中心轴均水平，横截面如图所示。重力加速度大小为 g。试在下述两种情形下，求小圆柱质心在其平衡位置附近做微振动的频率：

（1）圆筒固定，小圆柱在圆筒内底部附近作无滑滚动；

（2）圆筒可绕其固定的光滑中心细轴转动，小圆柱仍在圆筒内底部附近作无滑滚动。

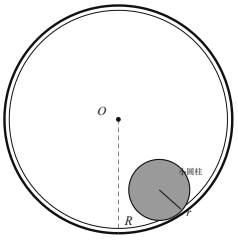

图 1　圆筒与小圆柱横截面

二、星体 P（行星或彗星）绕太阳运动的轨迹为圆锥曲线

$$r=\frac{k}{1+\varepsilon\cos\theta}$$

式中，r 是 P 到太阳 S 的距离，θ 是矢径 SP 相对于极轴 SA 的夹角（以逆时针方向为正），$k=\dfrac{L^2}{GMm^2}$，L 是 P 相对于太阳的角动量，$G=6.67\times10^{-11}\ \mathrm{m^3\cdot\ kg^{-1}\cdot\ s^{-2}}$ 为引力常量，$M=1.99\times10^{30}\ \mathrm{kg}$ 为太阳的质量，$\varepsilon=\sqrt{1+\dfrac{2EL^2}{G^2M^2m^3}}$ 为偏心率，m 和 E 分别为 P 的质量和机械能。假设有一颗彗星绕太阳运动的轨道为抛物线，地球绕太阳运动的轨道可近似为圆，两轨道相交于 C、D 两点，如图所示。已知地球轨道半径 $R_E\approx1.49\times10^{11}\ \mathrm{m}$，彗星轨道近日点 A 到太阳的距离为地球轨道半径的三分之一，不考虑地球和彗星之间的相互影响。求彗星

（1）先后两次穿过地球轨道所用的时间；

（2）经过 C、D 两点时速度的大小。

已知积分公式 $\displaystyle\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x+a}}=\frac{2}{3}(x+a)^{3/2}-2a(x+a)^{1/2}+C$，式中 C 是任意常数。

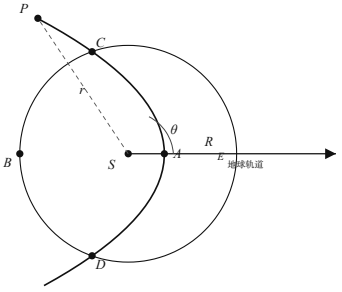

图 2　彗星抛物线轨道与地球轨道

三、一质量为 M 的载重卡车 A 的水平车板上载有一质量为 m 的重物 B，在水平直公路上以速度 v_0 做匀速直线运动，重物与车厢前壁间的距离为 L（$L>0$）。因发生紧急情况，卡车突然制动。已知卡车车轮与地面间的动摩擦因数和最大静摩擦因数均为 μ_1，重物与车厢底板间的动摩擦因数和最大静摩擦因数均为 μ_2（$\mu_2<\mu_1$）。若重物与车厢前壁发生碰撞，则假定碰撞时间极短，碰后重物与车厢前壁不分开。重力加速度大小为 g。

（1）若重物和车厢前壁不发生碰撞，求卡车从制动开始到卡车停止的过程所花的时间和走过的路程、重物从制动开始到重物停止的过程所花的时间和走过的路程，并导出重物 B 与车厢前壁不发生碰撞的条件；

（2）若重物和车厢前壁发生碰撞，求卡车从制动开始到卡车和重物都停止的过程所经历的时间、卡车走过的路程、以及碰撞过程中重物对车厢前壁的冲量。

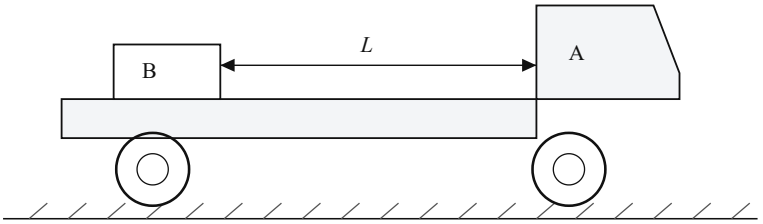

图 3　卡车与车厢底板上的重物

四、如俯视图，在水平面内有两个分别以 O 点与 O_1 点为圆心的导电半圆弧内切于 M 点，半圆 O 的半径为 $2a$，半圆 O_1 的半径为 a；两个半圆弧和圆 O 的半径 ON 围成的区域内充满垂直于水平面向下的匀强磁场（未画出），磁感应强度大小为 B；其余区域没有磁场。半径 OP 为一均匀细金属棒，以恒定的角速度 ω 绕 O 点顺时针旋转，旋转过程中金属棒 OP 与两个半圆弧均接触良好。已知金属棒 OP 的电阻为 R，两个半圆弧的电阻可忽略。开始时 P 点与 M 点重合。在 t（$0\le t\le \pi/\omega$）时刻，半径 OP 与半圆 O_1 交于 Q 点。求

（1）沿回路 $QPMQ$ 的感应电动势；

（2）金属棒 OP 所受到的原磁场 B 的作用力的大小。

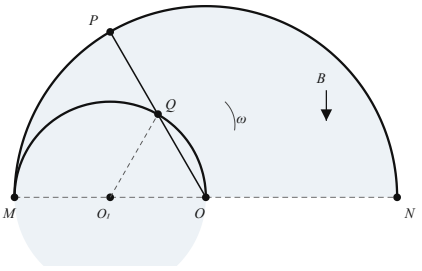

图 4　两个内切半圆弧与旋转金属棒

五、某种回旋加速器的设计方案如俯视图 a 所示，图中粗黑线段为两个正对的极板，其间仅在带电粒子经过的过程中存在匀强电场，两极板间电势差为 U。两个极板的板面中部各有一狭缝（沿 OP 方向的狭长区域），带电粒子可通过狭缝穿越极板（见图 b）；两细虚线间（除开两极板之间的区域）既无电场也无磁场；其它部分存在匀强磁场，磁感应强度方向垂直于纸面。在离子源 S 中产生的质量为 m、带电量为 q（$q > 0$）的离子，由静止开始被电场加速，经狭缝中的 O 点进入磁场区域，O 点到极板右端的距离为 D，到出射孔 P 的距离为 bD（常数 b 为大于 2 的自然数）。已知磁感应强度大小在零到 $B_{\max}$ 之间可调，离子从离子源上方的 O 点射入磁场区域，最终只能从出射孔 P 射出。假设如果离子打到器壁或离子源外壁便即被吸收。忽略相对论效应。求

（1）可能的磁感应强度 B 的最小值；

（2）磁感应强度 B 的其它所有可能值；

（3）出射离子能量的最大值。

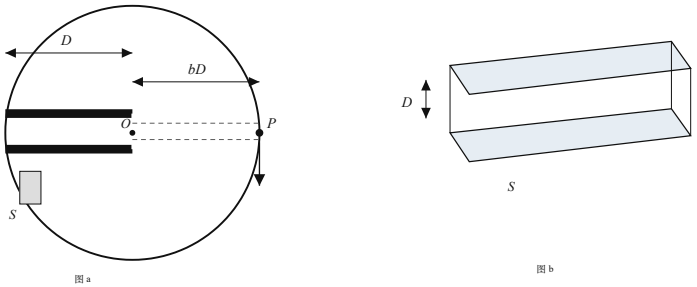

图 5　特种回旋加速器（a 俯视图；b 极板与狭缝）

六、1914 年，弗兰克-赫兹用电子碰撞原子的方法使原子从低能级激发到高能级，从而证明了原子能级的存在。加速电子碰撞自由的氢原子，使某氢原子从基态激发到激发态。该氢原子仅能发出一条可见光波长范围（400 nm ~ 760 nm）内的光谱线。仅考虑一维正碰。

（1）求该氢原子能发出的可见光的波长；

（2）求加速后电子动能 E_k 的范围；

（3）如果将电子改为质子，求加速质子的加速电压的范围。

已知 $hc = 1240\,\text{nm}\cdot\ \text{eV}$，其中 h 为普朗克常量，c 为真空中的光速；质子质量近似为电子质量的 1836 倍，氢原子在碰撞前的速度可忽略。

七、如气体压强-体积（P-V）图所示，摩尔数为 v 的双原子理想气体构成的系统经历一正循环过程（正循环指沿图中箭头所示的循环），其中自 A 到 B 为直线过程，自 B 到 A 为等温过程。双原子理想气体的定容摩尔热容量为 $\frac{5}{2}R$，R 为气体常量。

（1）求直线 AB 过程中的最高温度；

（2）求直线 AB 过程中气体的摩尔热容量随气体体积变化的关系式，说明气体在直线 AB 过程各段体积范围内是吸热过程还是放热过程，确定吸热和放热过程发生转变时的温度 T_c；

（3）求整个直线 AB 过程中所吸收的净热量和一个正循环过程中气体对外所作的净功。

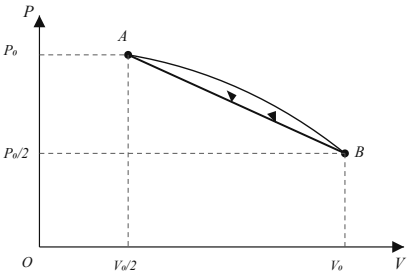

图 7　直线 AB 与等温过程 B→A 的 P-V 图

八、菲涅尔透镜又称同心圆阶梯透镜，它是由很多个同轴环带套在一起构成的，其迎光面是平面，折射面除中心是一个球冠外，其它环带分别是属于不同球面的球台侧面，其纵剖面如右图所示。这样的结构可以避免普通大口径球面透镜既厚又重的缺点。菲涅尔透镜的设计主要是确定每个环带的齿形（即它所属球面的球半径和球心），各环带都是一个独立的（部分）球面透镜，它们的焦距不同，但必须保证具有共同的焦点（即图中 F 点）。已知透镜材料的折射率为 n，从透镜中心 O（球冠的顶点）到焦点 F 的距离（焦距）为 f（平行于光轴的平行光都能经环带折射后会聚到 F 点），相邻环带的间距为 d（d 很小，可忽略同一带内的球面像差；d 又不是非常小，可忽略衍射效应）。求

（1）每个环带所属球面的球半径和球心到焦点的距离；

（2）该透镜的有效半径的最大值和有效环带的条数。

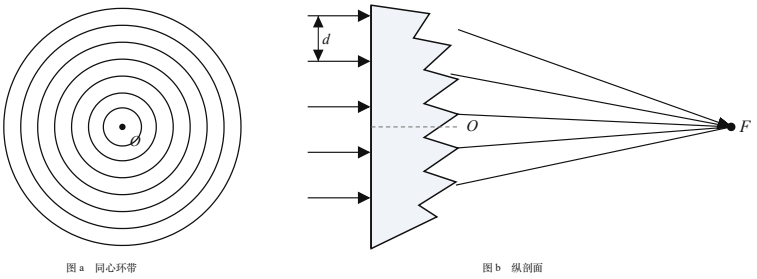

图 8　菲涅尔透镜（a 同心环带；b 纵剖面）