逐光知理 · 高考物理参考答案与详解

第34届全国中学生物理竞赛复赛理论考试试题

参考答案与详解（本站独立编撰）

竞赛理论卷 · 8 道大题（力学、电磁学、热学、光学、原子物理各占其一） · 全卷主观点满分

本册答案与解析由逐光知理物理教研组独立编撰，全部推导过程为本站自行完成，不含任何外部评分标准内容。竞赛题为开放性大题，本站按题给条件独立建模求解；若个别数值与原卷印刷值存在差异，以卷面为准。

答案速查

题号	主考点	答案摘要
1	圆柱在圆筒内滚动的微振动频率	（1）$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2g}{3(R-r)}}$；（2）$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2(M+m)g}{(3M+m)(R-r)}}$
2	抛物线轨道彗星穿越地球轨道的时间与交点速度	（1）$t=\frac{5\sqrt{3}}{27\pi}T_E\approx 0.102$ 年 ≈ 37 天；（2）$v=\sqrt{2GM/R_E}\approx 4.2\times10^4$ m/s
3	卡车紧急制动中重物的滑动、碰撞与冲量	（1）$t_A=\frac{Mv_0}{\mu_1(M+m)g}$，$s_A=\frac{Mv_0^2}{2\mu_1(M+m)g}$，$t_B=\frac{v_0}{\mu_2 g}$，$s_B=\frac{v_0^2}{2\mu_2 g}$，不碰条件 $\frac{v_0^2}{2g}(\frac{1}{\mu_2}-\frac{M}{\mu_1(M+m)})\le L$；（2）碰前 $t_1=\sqrt{\frac{2L}{a_A-a_B}}$，碰后共同减速 $a'=\mu_1 g$，总时间 $t=t_1+\frac{v'}{\mu_1 g}$，冲量 $J=m(v_{B1}-v')$
4	旋转金属棒在扇形磁场区中的感应电动势与安培力	（1）$\varepsilon=2Ba^2\omega\sin^2(\omega t)$；（2）$F=\frac{4B^2a^3\omega}{R}\sin^2(\omega t)$
5	特种回旋加速器中磁感应强度的可能值与最大出射能量	（1）$B_{\min}=\frac{2}{bD}\sqrt{\frac{2mU}{q}}$；（2）$B_n=\frac{2}{bD}\sqrt{\frac{2nmU}{q}}$（$n=2,3,\dots,n_{\max}$）；（3）$E_{\max}=n_{\max}qU$
6	弗兰克-赫兹实验：电子（质子）碰撞激发氢原子的能量条件	（1）$\lambda\approx 656$ nm；（2）5.56×10^3 eV $\le E_k<5.86\times10^3$ eV；（3）12.09 V $\le U<$ 12.75 V
7	直线-等温循环：最高温度、摩尔热容与净功	（1）$T_{\max}=\frac{9P_0V_0}{16\nu R}$；（2）$C=R\frac{21-24V/V_0}{6-8V/V_0}$，$V<\frac{7}{8}V_0$ 吸热、$V>\frac{7}{8}V_0$ 放热，$T_c=\frac{35P_0V_0}{64\nu R}$；（3）$Q_{AB}=\frac{3}{8}P_0V_0$，$W=P_0V_0(\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\ln 2)$
8	菲涅尔阶梯透镜的环带球半径与有效口径	（1）距轴 y 的环带：球心到焦点 $CF=n\sqrt{f^2+y^2}$，球半径 $R=\sqrt{(n\sqrt{f^2+y^2}-f)^2+y^2}$；中心球冠 $CF_0=nf$，$R_0=(n-1)f$；（2）$R_{\max}=f\sqrt{n^2-1}$，有效环带数 N 为不超过 $\frac{f\sqrt{n^2-1}}{d}$ 的最大整数

全卷大题详解

1. 计算题

答案　（1）$f=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{2g}{3(R-r)}}$；　（2）$f=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{2(M+m)g}{(3M+m)(R-r)}}$

详解

(1) 第（1）问：建立坐标与运动学关系 设小圆柱质心偏离最低点的角位置为 θ。小圆柱质心到圆筒轴的距离为 $(R-r)$，其质心速度大小 $v=(R-r)\dot\theta$。无滑滚动要求小圆柱自转角速度 $\omega_c=\dfrac{(R-r)\dot\theta}{r}$。

(2) 动能与势能 均质实心圆柱 $I=\dfrac{1}{2}mr^2$，故

$$T=\frac{1}{2}m(R-r)^2\dot\theta^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2\cdot\frac{(R-r)^2\dot\theta^2}{r^2}=\frac{3}{4}m(R-r)^2\dot\theta^2.$$

以最低点为势能零点，$U=mg(R-r)(1-\cos\theta)\approx\frac{1}{2}mg(R-r)\theta^2$（微振动近似）。

(3)　（1）圆筒固定时的频率 比较 $T=\frac{1}{2}M_{\text{eff}}\dot\theta^2$ 得 $M_{\text{eff}}=\frac{3}{2}m(R-r)^2$，恢复系数 $k=mg(R-r)$，故

$$\omega^2=\frac{mg(R-r)}{\frac{3}{2}m(R-r)^2}=\frac{2g}{3(R-r)},\qquad f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2g}{3(R-r)}}.$$

(4) 第（2）问：引入圆筒转角与约束 设薄圆筒绕其光滑中心轴转角为 φ，薄圆筒对中心轴的转动惯量 $I_M=MR^2$。接触点无滑约束：小圆柱质心速度 $(R-r)\dot\theta$ 减去其表面线速度 $r\omega_c$ 等于筒壁线速度 $R\dot\varphi$，即

$$(R-r)\dot\theta-r\omega_c=R\dot\varphi.$$

(5) 系统总动能

$$T=\frac{1}{2}m(R-r)^2\dot\theta^2+\frac{1}{4}mr^2\omega_c^2+\frac{1}{2}MR^2\dot\varphi^2.$$

(6) 利用广义动量守恒消去 $\dot\varphi$ φ 为循环坐标（势能不含 φ），且系统由静止开始运动，$p_\varphi=\dfrac{\partial T}{\partial\dot\varphi}=MR^2\dot\varphi-\frac{1}{2}mRr\omega_c=0$，得 $\dot\varphi=\dfrac{mr\omega_c}{2MR}$。代回约束式得

$$\omega_c=\frac{(R-r)\dot\theta}{r\,(1+\frac{m}{2M})}.$$

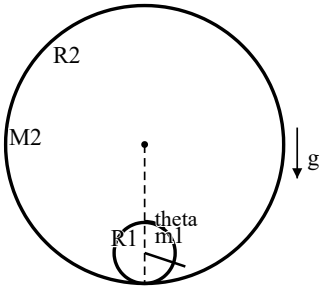
(7) 化简有效惯量 把 ω_c、$\dot\varphi$ 代入总动能，逐项除以 $\frac{1}{2}m(R-r)^2\dot\theta^2$：第二项贡献 $\dfrac{1}{2(1+m/2M)^2}$，第三项贡献 $\dfrac{m/(4M)}{(1+m/2M)^2}$，两项之和恰为 $\dfrac{1}{2\,(1+\frac{m}{2M})}$，故

$$T=\frac{1}{2}m(R-r)^2\dot\theta^2\cdot\frac{3M+m}{2(M+m)}.$$

(8) （2）频率结果 $\omega^2=\dfrac{mg(R-r)}{\frac{m(R-r)^2(3M+m)}{2(M+m)}}=\dfrac{2(M+m)g}{(3M+m)(R-r)}$，

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2(M+m)g}{(3M+m)(R-r)}}.$$

校验：令 $M\to\infty$ 退化为（1）的结果 $\sqrt{2g/[3(R-r)]}$，自洽。



题1 截面图：小圆柱在圆筒内底部附近

2. 计算题

答案　（1）$t=\dfrac{5\sqrt{3}}{27\pi}T_E\approx 0.102$ 年 ≈ 37 天；（2）$v=\sqrt{2GM/R_E}\approx 4.2\times10^4$ m/s

详解

(1) 确定抛物线轨道参数 题目给 $r=\dfrac{k}{1+\varepsilon\cos\theta}$ 且 $k=\dfrac{L^2}{GMm^2}$。抛物线 $\varepsilon=1$，近日点 $\theta=0$ 处 $r_{\min}=k/2=\dfrac{R_E}{3}$，故 $k=\dfrac{2R_E}{3}$。比角动量平方 $h^2=\left(\dfrac{L}{m}\right)^2=GMk=\dfrac{2GMR_E}{3}$。

(2) （1）**求与地球轨道交点的极角** 交点处 $r=R_E$：$1+\cos\theta=\dfrac{k}{r}=\dfrac{2}{3}$，$\cos\theta=-\dfrac{1}{3}$，$\theta=\pm\theta_0$，$\theta_0=\arccos(-1/3)\approx 109.5^\circ$。

(3) 用掠面速度积分求时间 $\dfrac{d\theta}{dt}=\dfrac{h}{r^2}=\dfrac{h(1+\cos\theta)^2}{k^2}$，故两次穿越间隔

$$t=\frac{k^2}{h}\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\frac{d\theta}{(1+\cos\theta)^2}.$$

利用 $1+\cos\theta=2\cos^2\dfrac{\theta}{2}$，令 $u=\theta/2$：

$$\int\frac{d\theta}{(1+\cos\theta)^2}=\frac{1}{4}\int\sec^4u\,du=\frac{1}{4}\left(\tan u+\frac{1}{3}\tan^3u\right).$$

(4) 计算定积分值 $\tan\dfrac{\theta_0}{2}=\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta_0}{1+\cos\theta_0}}=\sqrt{\dfrac{4/3}{2/3}}=\sqrt{2}$，$\tan^3\dfrac{\theta_0}{2}=2\sqrt{2}$。代入：

$$t=\frac{k^2}{h}\cdot\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=\frac{5\sqrt{2}}{6}\cdot\frac{k^2}{h}.$$

(5) 用地球公转周期表示 $\dfrac{k^2}{h}=\dfrac{4R_E^2/9}{\sqrt{2GMR_E/3}}=\dfrac{4}{9}\sqrt{\dfrac{3}{2}}\sqrt{\dfrac{R_E^3}{GM}}$，而 $\sqrt{R_E^3/GM}=\dfrac{T_E}{2\pi}$（$T_E$ 为地球公转周期），故

$$t=\frac{5\sqrt{2}}{6}\cdot\ \frac{4}{9}\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\ \frac{T_E}{2\pi}=\frac{5\sqrt{3}}{27\pi}T_E\approx 0.102\,T_E\approx 37\ \text{天}.$$

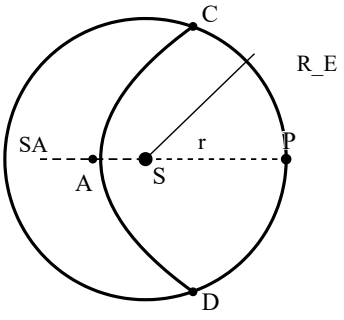
(6) （2）C、D 两点的速度 抛物线轨道机械能 $E=0$：$\dfrac{1}{2}v^2-\dfrac{GM}{r}=0$，在 $r=R_E$ 处

$$v=\sqrt{\frac{2GM}{R_E}}.$$

以 $GM=GM_{\odot}=6.67\times10^{-11}\times1.99\times10^{30}=1.33\times10^{20}\ \text{m}^3/\text{s}^2$ 代入：

$$v=\sqrt{\frac{2\times1.33\times10^{20}}{1.49\times10^{11}}}\approx 4.2\times10^{4}\ \text{m/s}.$$

该值是地球轨道速度（≈ 29.8 km/s）的 $\sqrt{2}$ 倍，两交点由对称性速度大小相同。



题2 地球圆轨道与彗星抛物线轨道相交于 C、D

3. 计算题

答案　（1）$t_A=\dfrac{Mv_0}{\mu_1(M+m)g}$，$s_A=\dfrac{Mv_0^2}{2\mu_1(M+m)g}$，$t_B=\dfrac{v_0}{\mu_2 g}$，$s_B=\dfrac{v_0^2}{2\mu_2 g}$，不碰条件 $\dfrac{v_0^2}{2g}\left(\dfrac{1}{\mu_2}-\dfrac{M}{\mu_1(M+m)}\right)\le L$；（2）碰前 $t_1=\sqrt{\dfrac{2L}{a_A-a_B}}$，碰后共同减速 $a'=\mu_1 g$，总时间 $t=t_1+\dfrac{v'}{\mu_1 g}$，冲量 $J=m(v_{B1}-v')$

详解

(1) 判断两者是否发生相对滑动及各自动力　卡车车轮抱死，地面对整车的滑动摩擦力为 $\mu_1(M+m)g$（重物压在车板上，正压力含 B 的重量），该力作用在卡车上，故卡车减速大小

$$a_A=\frac{\mu_1(M+m)g}{M}>\mu_1 g.$$

若 B 相对车板滑动，其摩擦力为 $\mu_2 mg$，对应减速 $a_B=\mu_2 g$。由 $\mu_2<\mu_1$ 且 $\dfrac{M+m}{M}>1$ 知 $a_A>a_B$：制动时卡车减速更快，B 相对车板向前滑，B 受向前？不——B 相对车向前滑，受向后的摩擦 $\mu_2 mg$，以 $a_B=\mu_2 g$ 减速；同时卡车还额外受到 B 施加的向前摩擦力 $\mu_2 mg$，但这不改变整车（含 B）受地面摩擦 $\mu_1(M+m)g$ 制动的事实，且地面对卡车静摩擦上限 $\mu_1(M+m)g$ 足以同时提供，上述 a_A、a_B 自洽。

(2)　（1）卡车与重物各自停住的时间和路程　卡车：$t_A=\dfrac{v_0}{a_A}=\dfrac{Mv_0}{\mu_1(M+m)g}$，

$$s_A=\frac{v_0^2}{2a_A}=\frac{Mv_0^2}{2\mu_1(M+m)g}.$$

重物：$t_B=\dfrac{v_0}{\mu_2 g}$，

$$s_B=\frac{v_0^2}{2\mu_2 g}.$$

（卡车先停：$t_A<t_B$；卡车停后地面静摩擦足以抵抗 B 施加的 $\mu_2 mg$，卡车保持静止。）

(3)　（1）不碰撞条件　两者相对位移 $\Delta s=s_B-s_A=\dfrac{v_0^2}{2g}\left(\dfrac{1}{\mu_2}-\dfrac{M}{\mu_1(M+m)}\right)$（$B$ 相对卡车向前多走的距离）。不发生碰撞要求

$$\Delta s\le L,\quad 即\quad \frac{v_0^2}{2g}\left(\frac{1}{\mu_2}-\frac{M}{\mu_1(M+m)}\right)\le L.$$

(4)　（2）碰撞时刻与碰前速度（碰撞发生在卡车停止之前的情形）　发生碰撞即 $L<\Delta s$。相对速度 $u=v_B-v_A=(a_A-a_B)t$，相对位移 $\frac{1}{2}(a_A-a_B)t^2$ 达到 L 的时刻

$$t_1=\sqrt{\frac{2L}{a_A-a_B}},\qquad a_A-a_B=\mu_1\frac{M+m}{M}g-\mu_2 g.$$

当 $t_1\le t_A$（即 $L\le\frac{1}{2}(a_A-a_B)t_A^2$）时碰前速度

$$v_{A1}=v_0-a_A t_1,\qquad v_{B1}=v_0-\mu_2 g\,t_1,\qquad v_{B1}>v_{A1}.$$

(5)　(2) 碰撞与碰后运动 碰撞时间极短，摩擦冲量可忽略，动量守恒（碰后 B 与前壁不分开，与卡车共同运动）：

$$(M+m)v' = Mv_{A1} + mv_{B1}, \qquad v' = \frac{Mv_{A1} + mv_{B1}}{M+m}.$$

碰后整体（B 抵住前壁）仅受地面摩擦 $\mu_1(M+m)g$（车板对 B 的摩擦为内力），减速 $a' = \mu_1 g$，再经 $t_2 = \dfrac{v'}{\mu_1 g}$ 停止。

(6)　(2) 总时间、卡车路程与冲量 总时间

$$t = t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2L}{a_A - a_B}} + \frac{Mv_{A1} + mv_{B1}}{(M+m)\mu_1 g}.$$

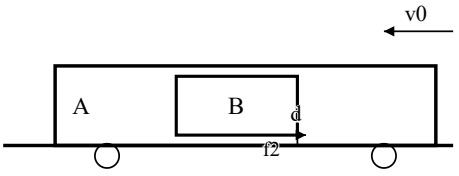
卡车路程

$$s = s_{A1} + s_2 = (v_0 t_1 - \frac{1}{2}a_A t_1^2) + \frac{v'^2}{2\mu_1 g}.$$

碰撞中前壁对 B 的冲量 $J' = m(v' - v_{B1})$（向前），由牛顿第三定律，重物对前壁的冲量大小

$$J = m(v_{B1} - v') = \frac{Mm}{M+m}(v_{B1} - v_{A1}), \quad \text{方向向后}.$$

(7) 补充：若碰撞发生在卡车停止之后（$t_A < t_1$） 此时卡车已以 $v_{A1} = 0$ 静止，B 以 $v_{B2} = v_0 - \mu_2 g\, t_A$ 继续滑行撞上前壁，碰后共同速度 $v' = \dfrac{mv_{B2}}{M+m}$，其余公式中令 $v_{A1} = 0$、t_1 改为卡车停止后 B 滑完剩余距离 $L - (s_B(t_A) - s_A)$ 所用时间即可；冲量相应为 $J = \dfrac{Mm}{M+m}v_{B2}$。按本站对该题的建模给出，若与原卷标准表述的讨论范围不同，以卷面为准。



题3 制动前：卡车 A 与重物 B 以 v0 匀速运动

4. 计算题

答案　(1) $\varepsilon = 2Ba^2\omega \sin^2(\omega t)$；　(2) $F = \dfrac{4B^2a^3\omega}{R}\sin^2(\omega t)$

详解

(1) 几何关系：确定 Q 的位置与有场杆段 取 O 为原点，O_1 在 O 左方距离 a 处，M、N 分别在大圆（半径 $2a$）直径两端。磁场区为大半圆内部挖去小半圆（圆 O_1）所得的月牙形区域。设 t 时刻棒已从 OM 转过 $\theta = \omega t$。棒上距 O 为 r 的点到 O_1 距离满足 $r^2 + 2ar\cos\theta = a^2$，解得交点 Q：$r_Q = 2a\cos\theta$（$0 \le \theta \le \pi/2$ 时 Q 在小半圆弧上）。棒段 OQ 位于小半圆内（无场），QP 段位于磁场区。

(2) （1）**用动生电动势直接计算** 回路 $QPMQ$ 中只有棒段 QP 在磁场中运动，弧静止。杆元 dr 处速度 $v=\omega r$、$v\perp B$，故

$$\varepsilon=\int_{r_Q}^{2a} B\omega r\,dr=\frac{1}{2}B\omega\left[(2a)^2-(2a\cos\theta)^2\right]=2Ba^2\omega\sin^2\theta=2Ba^2\omega\sin^2(\omega t).$$

(3) （1）**用磁通量变化核对** 回路面积 = 大扇形 OMP（$\frac{1}{2}(2a)^2\theta=2a^2\theta$）减去由 OM、OQ 与小弧 MQ 围成的区域。后者 = 三角形 OMQ（面积 $2a^2\sin\theta\cos\theta$，因 $Q=(-2a\cos^2\theta,\,2a\sin\theta\cos\theta)$）加弓形（$\frac{1}{2}a^2(2\theta-\sin 2\theta)$），合计 $a^2\theta+a^2\sin\theta\cos\theta$。故

$$A=a^2(\theta-\sin\theta\cos\theta),\quad \varepsilon=B\frac{dA}{dt}=Ba^2\omega(1-\cos 2\theta)=2Ba^2\omega\sin^2\theta.$$

两种方法一致。

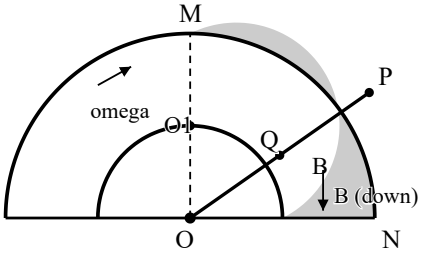
(4) （2）**回路电流** 电流只流过棒段 QP（OQ 段为开路盲端且无场）。棒总电阻 R 均匀，QP 段电阻 $r_{QP}=R\cdot\dfrac{2a(1-\cos\theta)}{2a}=R(1-\cos\theta)$，故

$$I=\frac{\varepsilon}{r_{QP}}=\frac{2Ba^2\omega\sin^2\theta}{R(1-\cos\theta)}.$$

(5) （2）**安培力大小** 只有载流的 QP 段受安培力，其长度 $2a(1-\cos\theta)$，各元电流方向沿杆、磁场垂直向下，$F=IB\cdot\ 2a(1-\cos\theta)$：

$$F=\frac{2Ba^2\omega\sin^2\theta}{R(1-\cos\theta)}\cdot\ B\cdot\ 2a(1-\cos\theta)=\frac{4B^2a^3\omega}{R}\sin^2(\omega t).$$

(6) **适用范围与延伸讨论** 上述结果在棒与小圆弧保持接触期间（$0\le\omega t\le\pi/2$，Q 在弧上）成立；由题设“棒与两个半圆弧均接触良好”，接触阶段即此范围。当 $\omega t>\pi/2$ 时棒不再与小弧相交，回路断开、无电流，棒两端间仍有动生电动势 $2Ba^2\omega$ 但安培力为零。按本站对该题的建模给出，若与原卷印刷的时间范围表述不同，以卷面为准。



题4 俯视图：两半圆内切于 M，阴影为磁场区，OP 绕 O 顺时针转动

5. 计算题

答案　（1）$B_{\min}=\dfrac{2}{bD}\sqrt{\dfrac{2mU}{q}}$；　（2）$B_n=\dfrac{2}{bD}\sqrt{\dfrac{2nmU}{q}}$（$n=2,3,\dots,n_{\max}$）；　（3）$E_{\max}=n_{\max}qU$

详解

(1) 轨道半径与加速次数的关系　离子每穿过一次两极板间的电场区被加速一次，第 n 次加速后动能 $E_n=nqU$，速率 $v_n=\sqrt{2nqU/m}$。在磁场中做圆周运动：

$$r_n=\frac{mv_n}{qB}=\frac{1}{B}\sqrt{\frac{2nmU}{q}}.$$

(2)　（1）最小磁感应强度：半个圆周直达 P　离子从 O 沿狭缝方向进入磁场后，在磁场中偏转。出射孔 P 与 O 相距 bD。若离子从 O 射出后只运动半个圆周即到达 P，则圆周直径

$$2r_1=bD,\qquad r_1=\frac{1}{B_{\min}}\sqrt{\frac{2mU}{q}}=\frac{bD}{2},$$

解得

$$B_{\min}=\frac{2}{bD}\sqrt{\frac{2mU}{q}}.$$

若 $B<B_{\min}$（$r_1>bD/2$），第一个半圆越出 P 点，离子打到器壁被吸收，不能出射。

(3)　（2）轨迹的阶段性结构　极板占据 $0<x<D$，狭缝走廊（无磁场）沿轴延伸到 P（$x=bD$）。离子在磁場中的半圆弧两端落在轴线上，弧在轴线上的跨度为 $2r_n$。落点在极板区（$x\le D$）时，离子穿入电场区被减速到零再反向加速回原处（弹跳），并向右跨进 $2r_n$；落点在 $D<x<bD$ 时，离子越过极板右端绕到下方，再从下方穿过狭缝向上穿越电场区被加速，能量增加 qU，回到 O 附近进入下一阶段。故每一阶段从 O 附近出发的弧落点为 $2r_k$。

(4)　（2）出射条件与可能的 B 值　离子恰好在 P 出射要求某一阶段的弧落点恰为 bD：

$$2r_n=bD\quad\Longrightarrow\quad r_n=\frac{bD}{2}=\frac{1}{B_n}\sqrt{\frac{2nmU}{q}},$$

即

$$B_n=\frac{2}{bD}\sqrt{\frac{2nmU}{q}},\qquad n=1,2,3,\dots$$

其中 $n=1$ 即（1）的 $B_{\min}$。各中间阶段（$k<n$）的弧落点 $2r_k=\sqrt{\frac{k}{n}}\,bD$ 必须落在极板右端之外、P 之前（$D<2r_k<bD$），由 $k=1$ 得约束 $\dfrac{bD}{\sqrt{n}}>D$，即 $n<b^2$。

(5) （2）n 的上限 综合几何约束 $n<b^2$ 与磁场可调范围 $B_n \le B_{\max}$（即 $n \le \dfrac{B_{\max}^2 b^2 D^2 q}{8mU}$），得

$$n_{\max}=\min\left(b^2-1,\ \frac{B_{\max}^2 b^2 D^2 q}{8mU}\right)\ （第二项取整数部分），$$

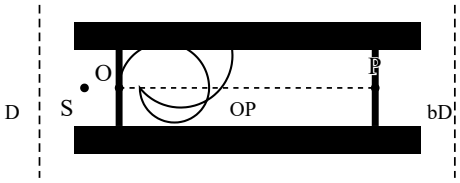
磁感应强度的其它所有可能值为

$$B_n=\frac{2}{bD}\sqrt{\frac{2nmU}{q}},\qquad n=2,3,\ldots,n_{\max}.$$

(6) （3）出射离子能量的最大值 离子经 n 次加速后出射，能量为 $E_n=nqU$。取 $n=n_{\max}$ 得

$$E_{\max}=n_{\max}qU.$$

(7) 建模说明 本题按本站对题意与图 α 的几何建模给出：把狭缝走廊理想化为无宽度的轴线、极板理想化为零厚度，并把各阶段弧落点近似取在轴线上；若计及狭缝宽度、极板厚度与离子源尺寸，各阶段的落点会有 O(缝宽/r_n) 量级的修正，且 B 偏大时离子经多次弹跳与绕行后终因不能恰好落到 P 而被器壁或离子源外壁吸收。若与原卷标准解答的讨论范围有出入，以卷面为准。



题5 俯视图 α：极板、狭缝、离子源 S 与出射孔 P

6. 计算题

答案　（1）$\lambda \approx 656\ \text{nm}$；（2）$5.56\times10^3\ \text{eV} \le E_k < 5.86\times10^3\ \text{eV}$；（3）$12.09\ \text{V} \le U < 12.75\ \text{V}$

详解

(1) （1）确定激发态与可见光波长 氢原子能级 $E_n=-\dfrac{13.6}{n^2}\ \text{eV}$。可见光谱线属巴耳末系（跃迁到 $n=2$）。原子只发出一条可见光：若激发到 $n=3$，只能发生 $3\to2$（可见，$\lambda\approx656\ \text{nm}$）和 $3\to1$（紫外），恰一条可见线；若激发到 $n\ge4$，则 $4\to2$、$5\to2$ 等多条可见线并存（且 $4\to3\to2$ 级联也给出 $3\to2$），不止一条。故原子被激发到 $n=3$。

$$\frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)=1.097\times10^7\times\frac{5}{36},\qquad \lambda=\frac{36}{5\times1.097\times10^7}\approx6.56\times10^{-7}\ \text{m}=656\ \text{nm}.$$

(2) 激发所需能量 $\Delta E_{13}=13.6\left(1-\dfrac{1}{9}\right)=13.6\times\dfrac{8}{9}\approx12.09\ \text{eV}$；激发到 $n=4$ 需 $\Delta E_{14}=13.6\left(1-\dfrac{1}{16}\right)=12.75\ \text{eV}$。

(3) （2）**一维正碰中电子可转移的最大能量** 质量 m 的粒子与质量 M 的静止粒子一维完全弹性碰撞，可转移的最大能量份数

$$\eta = \frac{4mM}{(m+M)^2}.$$

取 $M = 1836\,m$：$\eta = \dfrac{4\times 1836}{1837^2} = \dfrac{7344}{3374569} \approx 2.176\times 10^{-3}$。

(4) （2）**电子动能范围** 要能把原子激发到 $n=3$，需可转移的最大能量不低于 ΔE_{13}：

$$\eta E_k \geq 12.09\ \text{eV} \quad\Rightarrow\quad E_k \geq \frac{12.09}{2.176\times 10^{-3}} \approx 5.56\times 10^{3}\ \text{eV}.$$

又不能激发到 $n=4$（否则可见谱线多于一条）：

$$\eta E_k < 12.75\ \text{eV} \quad\Rightarrow\quad E_k < \frac{12.75}{2.176\times 10^{-3}} \approx 5.86\times 10^{3}\ \text{eV}.$$

故

$$5.56\times 10^{3}\ \text{eV} \leq E_k < 5.86\times 10^{3}\ \text{eV}.$$

(5) （3）**改用质子时的加速电压范围** 质子质量近似等于氢原子质量（$m_p \approx M$），等质量一维正碰可将全部动能转移给原子，故只需质子动能介于 ΔE_{13} 与 ΔE_{14} 之间。加速电压 U 满足 $eU = E_p$：

$$12.09\ \text{eV} \leq eU < 12.75\ \text{eV} \quad\Longrightarrow\quad 12.09\ \text{V} \leq U < 12.75\ \text{V}.$$

---

7. 计算题

答案 （1）$T_{\max} = \dfrac{9P_0V_0}{16\nu R}$；（2）$C = R\dfrac{21-24V/V_0}{6-8V/V_0}$，$V < \dfrac{7}{8}V_0$ 吸热、$V > \dfrac{7}{8}V_0$ 放热，$T_c = \dfrac{35P_0V_0}{64\nu R}$；（3）$Q_{AB} = \dfrac{3}{8}P_0V_0$，$W = P_0V_0\left(\dfrac{3}{8}+\dfrac{1}{2}\ln 2\right)$

详解

(1) 直线 AB 的过程方程 A 点 $(V_0/2, P_0)$，B 点 $(V_0, P_0/2)$，直线斜率 $\dfrac{P_0/2-P_0}{V_0-V_0/2} = -\dfrac{P_0}{V_0}$，故

$$P = \frac{3P_0}{2} - \frac{P_0}{V_0}V, \qquad \frac{V_0}{2} \leq V \leq V_0.$$

(2) （1）**最高温度** $T = \dfrac{PV}{\nu R} = \dfrac{1}{\nu R}\left(\dfrac{3P_0}{2}V - \dfrac{P_0}{V_0}V^2\right)$，对 V 求导为零得 $V^* = \dfrac{3V_0}{4}$（在区间内），

$$P_{V^*} = \frac{3P_0}{2} - \frac{3P_0}{4} = \frac{3P_0}{4}, \qquad T_{\max} = \frac{(3P_0/4)(3V_0/4)}{\nu R} = \frac{9P_0V_0}{16\nu R}.$$

(3)　（2）摩尔热容随体积的关系 沿 AB 有 $\dfrac{dT}{dV}=\dfrac{1}{vR}\left(\dfrac{3P_0}{2}-\dfrac{2P_0V}{V_0}\right)$。由第一定律 $\delta Q=vC_V\,dT+P\,dV$（$C_V=\dfrac{5}{2}R$）：

$$\frac{\delta Q}{dV}=\frac{5R}{2}\cdot\frac{1}{vR}\left(\frac{3P_0}{2}-\frac{2P_0V}{V_0}\right)v+\frac{3P_0}{2}-\frac{P_0V}{V_0}=\frac{21P_0}{4}-\frac{6P_0V}{V_0}.$$

摩尔热容

$$C=\frac{\delta Q}{v\,dT}=R\cdot\frac{\frac{21}{4}-\frac{6V}{V_0}}{\frac{3}{2}-\frac{2V}{V_0}}=R\,\frac{21-24V/V_0}{6-8V/V_0}.$$

(4)　（2）吸热放热分段与转变温度 吸放热由 δQ 的符号（即 $\dfrac{21}{4}-\dfrac{6V}{V_0}$）决定：$V<\dfrac{7}{8}V_0$ 时 $\delta Q>0$ 吸热，$V>\dfrac{7}{8}V_0$ 时 $\delta Q<0$ 放热（注意 $V=\dfrac{3}{4}V_0$ 处 $dT=0$、摩尔热容发散，$\dfrac{3}{4}V_0<V<\dfrac{7}{8}V_0$ 间 $C<0$：放热降温）。转变点 $V_c=\dfrac{7}{8}V_0$ 处 $P_c=\dfrac{3P_0}{2}-\dfrac{7P_0}{8}=\dfrac{5P_0}{8}$，

$$T_c=\frac{P_cV_c}{vR}=\frac{35P_0V_0}{64vR}.$$

(5)　（3）AB 过程吸收的净热量

$$Q_{AB}=\int_{V_0/2}^{V_0}\left(\frac{21P_0}{4}-\frac{6P_0V}{V_0}\right)dV=\frac{21P_0}{4}\cdot\frac{V_0}{2}-\frac{6P_0}{V_0}\cdot\frac{3V_0^2}{8}=\frac{21P_0V_0}{8}-\frac{18P_0V_0}{8}=\frac{3}{8}P_0V_0.$$

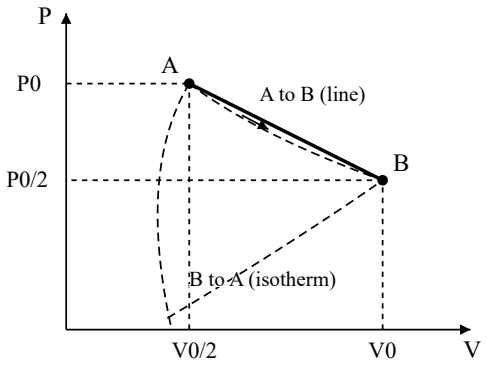
核对：$T_A=T_B=\dfrac{P_0V_0}{2vR}$，$\Delta U_{AB}=0$，故 $Q_{AB}=W_{AB}=\dfrac{1}{2}(P_0+\dfrac{P_0}{2})\cdot\dfrac{V_0}{2}=\dfrac{3}{8}P_0V_0$ ✓。

(6)　（3）一个正循环的净功 净功为循环所围面积：$W=W_{AB}-W_{BA等温}$。等温过程 $B\to A$：$T=\dfrac{P_0V_0}{2vR}$，

$$W_{B\to A}=vRT\ln\frac{V_A}{V_B}=\frac{P_0V_0}{2}\ln\frac{1}{2}=-\frac{P_0V_0}{2}\ln 2.$$

故

$$W=\frac{3}{8}P_0V_0+\frac{P_0V_0}{2}\ln 2=P_0V_0\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\ln 2\right)\approx 0.72\,P_0V_0.$$



题7 P-V 图：A 到 B 为直线过程，B 到 A 为等温过程

8. 计算题

答案　（1）距轴 y 的环带：球心到焦点 $CF = n\sqrt{f^2+y^2}$，球半径 $R = \sqrt{\left(n\sqrt{f^2+y^2}-f\right)^2+y^2}$；中心球冠 $CF_0 = nf$，$R_0 = (n-1)f$；　（2）$R_{\max} = f\sqrt{n^2-1}$，有效环带数 N 为不超过 $\dfrac{f\sqrt{n^2-1}}{d}$ 的最大整数

详解

(1) 单个球面折射的几何设定　考察第 k 环带：设计光线在玻璃内平行于光轴、距轴 y，射到球面（球心 C 在光轴上、半径 R）上的 A 点后折射，穿过焦点 F。菲涅尔透镜作薄透镜设计：A 取在过中心顶点 O 且垂直于光轴的平面内，故 A 到 F 的水平距离为 f。设折射线与轴夹角 γ，则

$$\tan\gamma = \frac{y}{f}, \qquad \sin\gamma = \frac{y}{\sqrt{f^2+y^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{f}{\sqrt{f^2+y^2}}.$$

(2) 折射定律与角度关系　入射角 i 是入射线（沿轴）与法线 CA 的夹角；折射线在法线另一侧，与法线夹角 r 满足

$$n\sin i = \sin r.$$

由几何，折射线与轴夹角 γ 满足 $r = i+\gamma$，故

$$n\sin i = \sin(i+\gamma) = \sin i\cos\gamma + \cos i\sin\gamma,$$

整理得

$$\tan i = \frac{\sin\gamma}{n-\cos\gamma} = \frac{y}{n\sqrt{f^2+y^2}-f}.$$

(3)　（1）球半径与球心到焦点的距离　记 $D = n\sqrt{f^2+y^2}-f$，则 $\sin i = \dfrac{y}{\sqrt{D^2+y^2}}$，$\cos i = \dfrac{D}{\sqrt{D^2+y^2}}$。由 $\sin i = \dfrac{y}{R}$（C 在轴上，CA 与轴夹角为 i）得

$$R = \frac{y}{\sin i} = \sqrt{D^2+y^2} = \sqrt{\left(n\sqrt{f^2+y^2}-f\right)^2+y^2}.$$

球心 C 在 A 沿法线向轴的投影方向上，C 到 A 的水平距离为 $R\cos i = D$，故球心到焦点的距离

$$CF = f + R\cos i = f + D = n\sqrt{f^2+y^2}.$$

即第 k 环带（$y = kd$，$k = 1, 2, \ldots$）：

$$CF_k = n\sqrt{f^2+k^2d^2}, \qquad R_k = \sqrt{\left(n\sqrt{f^2+k^2d^2}-f\right)^2+k^2d^2}.$$

(4) 中心球冠　中心球冠对应 $y \to 0$：

$$CF_0 = nf, \qquad R_0 = (n-1)f.$$

即中心球冠是一个焦距为 f 的平凸透镜表面，与通常薄透镜公式 $\dfrac{1}{f} = (n-1)/R_0$ 一致，自洽。

(5)　(2) 最大有效半径 折射角不能超过 90°（否则发生全反射，光线不能会聚到 F）。极限情形 $r=90^\circ$，即 $i+\gamma=90^\circ$，$\tan i=\cot\gamma$。代入 $\tan i=\dfrac{\sin\gamma}{n-\cos\gamma}$：

$$\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}=\frac{\sin\gamma}{n-\cos\gamma}\implies n\cos\gamma=\cos^2\gamma+\sin^2\gamma=1\implies\cos\gamma=\frac{1}{n}.$$

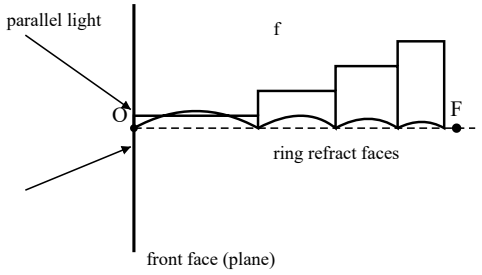
此时 $\tan\gamma=\sqrt{n^2-1}$，而 $\tan\gamma=y/f$，故透镜能达到的最大有效半径

$$R_{\max}=f\sqrt{n^2-1}.$$

(6)　(2) 有效环带条数 环带半径依次为 $d,2d,3d,\ldots$，只有 $y\le f\sqrt{n^2-1}$ 的环带有效，故有效环带条数为不超过 $\dfrac{f\sqrt{n^2-1}}{d}$ 的最大整数：

$$N=\frac{f\sqrt{n^2-1}}{d}$$

（N 取其整数部分；中心球冠不计入环带序号；若计入则相应加一，以卷面约定为准）。



题8 菲涅尔同心圆阶梯透镜纵剖面（示意）

逐光知理 · 竞赛答案册 · 易错点速查

第34届全国中学生物理竞赛复赛 · 易错点速查

补在原册之后：原册答案与详解未作任何改动

共 6 条 · 绑定本卷题号

只挑本卷最容易失分的动作，按「错法 / 机理 / 正解」三段写，题号与原册一致；公式沿用原册口径。

第 1 题 · 第(2)问

错法 圆筒可自由转动时，仍按圆筒固定的单一转动惯量算小圆柱自转角速度；或列总动能后把圆筒转角 φ 当成独立自由度参与振动，未消去循环坐标。

机理 圆筒可转后，接触点无滑约束把小圆柱自转角速度与圆筒转角联系起来；φ 不出现在势能中，是循环坐标，系统由静止开始运动，对应广义动量守恒，可先把 $\dot{\varphi}$ 消去再代入总动能。直接保留两个角速度会把有效惯量算错，频率随之偏差。

正解 先由无滑约束 $(R-r)\dot{\theta}-r\omega_c=R\dot{\varphi}$，再由 $\partial T/\partial\dot{\varphi}=0$ 消去 $\dot{\varphi}$，化简后 $f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2(M+m)g}{(3M+m)(R-r)}}$；令 $M\to\infty$ 应退化为圆筒固定结果。

第 3 题 · 第(1)问

错法 认为重物相对车板向前滑时受向前摩擦；或把卡车减速加速度取成 $\mu_2 g$，与重物减速加速度混为一谈。

机理 重物相对车板向前滑，摩擦力方向向后，阻碍相对滑动；地面对整车的滑动摩擦力为 $\mu_1(M+m)g$（正压力含重物重量），作用在卡车上，卡车减速 $a_A=\mu_1(M+m)g/M$；重物只受车板摩擦 $\mu_2 mg$，减速 $a_B=\mu_2 g$。两者摩擦系数与正压力都不同，加速度不可互换。

正解 先比较 a_A 与 a_B 判断相对滑动方向：$\mu_2<\mu_1\frac{M+m}{M}$ 时卡车减速更快，重物相对车板前滑；再分别按 $t_A=v_0/a_A$、$t_B=v_0/(\mu_2 g)$ 算停车时间与路程。

第 4 题 · 第(1)(2)问

错法 动生电动势按整根旋转棒积分，安培力与电阻也按整根棒长计算；或把小半圆内的 OQ 段也算进载流段。

机理 磁场区是大半圆挖去小半圆的月牙形，棒段 OQ 位于小半圆内（无场），只有 QP 段在磁场中运动；电动势只对 QP 段积分，回路电流只流过 QP 段，棒的电阻也应按 QP 长度占全长的比例折算，整根棒计入会把电动势、电流与安培力同时放大。

正解 几何上由交点关系得 $r_Q=2a\cos\theta$，对 QP 段积分得 $\varepsilon=2Ba^2\omega\sin^2(\omega t)$；QP 段电阻按长度比例取 $r_{QP}=R(1-\cos\theta)$，电流 $I=\varepsilon/r_{QP}$，安培力只作用在 QP 段，$F=\frac{4B^2a^3\omega}{R}\sin^2(\omega t)$。

第 6 题 · 第(2)(3)问

错法 用电子碰撞时直接把电子动能当作可转移给原子的能量；改用质子后又乘上质量比份额 η。

机理 一维完全弹性碰撞中，质量 m 的入射粒子传给静止质量 M 的粒子的最大能量份额为 $\eta=\frac{4mM}{(m+M)^2}$；电子质量远小于原子质量，$\eta\approx 2.18\times10^{-3}$，只有份额部分能用于激发，电子动能要除以 η 才够激发能。质子质量近似等于氢原子质量，等质量正碰可把全部动能转移，不再乘 η。

正解 电子情形由 $\eta E_k\ge\Delta E_{13}$ 且 $\eta E_k<\Delta E_{14}$ 定动能区间；质子情形直接由 $12.09\,\mathrm{eV}\le eU<12.75\,\mathrm{eV}$ 定加速电压。

第 7 题 · 第(2)问

错法　用温度升降（dT 正负）判断过程吸热放热；或把最高温度点取在直线与坐标轴的端点。

机理　吸放热由 δQ 的符号判定，沿直线过程 δQ 与摩尔热容 C_V 及 dT 有关；温度先升后降，降温段仍可能吸热，单看 dT 会把放热段判反。最高温度由 $T = PV/(\nu R)$ 沿直线求导为零得到，极值点在区间内部 $V^* = 3V_0/4$，不在端点。

正解　写出直线过程方程 $P = P_0 - \frac{3P_0}{2V_0}V$，由 $\mathrm{d}T/\mathrm{d}V = 0$ 定最高温度点；吸放热转变点由 $\delta Q = 0$（$V_c = 7V_0/8$）分出，$V < V_c$ 吸热、$V > V_c$ 放热。

第 8 题 · 第(2)问

错法　求最大有效半径时忽略全反射限制，直接按环带间距排满口径；有效环带数按四舍五入取整。

机理　折射角达到 90° 后发生全反射，光线不能会聚到焦点，这是口径的上限；极限情形 $r = 90°$ 给出 $\cos\gamma = 1/n$，对应最大有效半径 $R_{\max} = f/\sqrt{n^2-1}$。半径超过该值的环带无效，条数只能取不超过比值的最大整数（向下取整），四舍五入会把无效环带计入。

正解　由全反射极限定 $R_{\max} = f/\sqrt{n^2-1}$；环带半径依次 $d, 2d, 3d, \ldots$，有效环带数 N 为不超过 $\frac{f}{d\sqrt{n^2-1}}$ 的最大整数，中心球冠不计入环带序号。