逐光知理 · 高考物理参考答案与详解

第34届全国中学生物理竞赛决赛理论试题

参考答案与详解（本站独立编撰）

全国中学生物理竞赛决赛理论卷（2017） · 8 道大题（原卷一至八题） · 本站独立详解

本册答案与解析由逐光知理物理教研组独立编撰：编撰者依据原卷题面独立建模、独立推导与验算，未参照、未照录任何机构公布的答案。竞赛压轴题存在多种等价建模途径，本册在个别题目处标明了所用模型；若个别数值与原卷印刷值不符，以卷面为准。

答案速查

题号	主考点	答案摘要
1	两体系统沿连线方向的相对振动（折合质量法）与带电弹簧系统的微振动	（1）$v_a=\frac{m_av_0}{m_a+m_b}+\frac{m_bv_0}{m_a+m_b}\cos\omega t$，$v_b=\frac{m_av_0}{m_a+m_b}-\frac{m_av_0}{m_a+m_b}\cos\omega t$，$\omega=\sqrt{k_0(m_a+m_b)/(m_am_b)}$；（2）$q=L_0\sqrt{k_0(L_0-l_0)/K}$，$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_0(3L_0-2l_0)}{L_0}\cdot\frac{m_a+m_b}{m_am_b}}$
2	双星圆周运动、星体各向同性爆炸失质后的轨道变化与逃逸条件	（1）$r_0=[\frac{G(M+m)T_0^2}{4\pi^2}]^{1/3}$；（2）$T_1=2\pi\sqrt{\frac{a^3}{G(M+m-\Delta M)}}$，其中 $a=r_0\frac{M+m-\Delta M}{M+m-2\Delta M}$；（3）$\Delta M\geq\frac{M+m}{2}$
3	荡秋千的参数驱动（站起与蹲下时的角动量守恒与做功）及含损耗的递推关系	（1）各阶段机械能：$E_A=mgh_1$；$A\to A'$：E 减少 $mg\Delta h_A$，$\Delta h_A=\frac{d(l+d-h_1)}{l}$；$A'\to B$：守恒，$E=mgh_{A'}$，$h_{A'}=\frac{(l+d)(h_1-d)}{l}$；$B\to B'$：$E$ 增加 $mgd+mgh_{A'}[(\frac{l+d}{l})^2-1]$；$B'\to C$：守恒，$h_2=d+\frac{(l+d)^3}{l^3}(h_1-d)$。（2）（i）$h_{n+1}=Ah_n+C$；（ii）$h_n=A^{n-1}h_1+\frac{1-A^{n-1}}{1-A}C$，$h_{n+1}-h_n=A^{n-1}(h_2-h_1)$
4	载流正方形线框在磁场中绕水平轴的磁力矩摆动、断电后的匀速转动与感应电动势、短路后的电磁制动	（1）$J=\frac{ml^2}{6}$；（2）$\theta=\theta_0\cos\omega t$，$\dot\theta=-\theta_0\omega\sin\omega t$，$\ddot\theta=-\theta_0\omega^2\cos\omega t$，$\omega=\sqrt{6BI/m}$；（3）匀角速转动，$V_{PQ}=Bl^2\omega_0\sin[\omega_0(t-t_0)]$，$\omega_0=\theta_0\omega$；（4）$\alpha=\frac{mR}{12B^2l^2\sin^2\theta_1}$，$\alpha_{\min}=\frac{mR}{12B^2l^2}$
5	正交平行电磁场（E、B 均沿 z 轴）中带电粒子的螺旋运动、弹性与按比例减小的非弹性碰撞	（1）$R=\frac{mv}{qB}$；（2）（i）$s_{\max}=\frac{mv^2}{qE}$（发射仰角 45° 时）；（ii）$s=\frac{10\sqrt{2}mv^2}{qE}$
6	毛细管与悬挂水滴的拉普拉斯压差、浸水毛细管的受力平衡	（1）$a\approx2.79\times10^{-3}\,\mathrm{m}$；（2）$F\approx7.87\times10^{-2}\,\mathrm{N}$
7	引力红移与等效原理（加速箱中的多普勒效应）、穆斯堡尔引力红移实验	（1）（i）$\lambda'=\lambda_0[1+\frac{GM}{c^2}(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+L})]\approx\lambda_0(1+\frac{GML}{c^2R^2})$；（ii）$\lambda''\approx\lambda_0(1+\frac{aL}{c^2})$；（iii）$a=\frac{GM}{R^2}$；（2）$v=\frac{gL}{c}\approx$

		7.39×10^{-7} m/s，方向竖直向下
8	氮化镓薄膜的反射干涉（色散关系求膜厚）与涂层样品受激光辐射压的转动平衡	（1）$d\approx256$ nm，另一加强波长 $\lambda_2\approx1.17\times10^{3}$ nm；（2）（3）辐射压力与力矩模型及平衡方程见解析；因卷面可读文本中未给出样品长 a、宽 b 的数值，第（3）问数值解暂缺，列为存疑

全卷大题详解（对应原卷第一至第八题）

1. 计算题

答案　（1）$v_a=\dfrac{m_av_0}{m_a+m_b}+\dfrac{m_bv_0}{m_a+m_b}\cos\omega t$，$v_b=\dfrac{m_av_0}{m_a+m_b}-\dfrac{m_av_0}{m_a+m_b}\cos\omega t$，$\omega=\sqrt{k_0(m_a+m_b)/(m_am_b)}$；（2）$q=L_0\sqrt{k_0(L_0-l_0)/K}$，$f=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k_0(3L_0-2l_0)}{L_0}\cdot\dfrac{m_a+m_b}{m_am_b}}$

详解

(1) 第（1）问：化为质心运动与相对运动　系统在光滑水平面上不受外力，质心以 $V=\dfrac{m_av_0}{m_a+m_b}$ 匀速运动。两球只在沿连线方向相互作用，引入折合质量 $\mu=\dfrac{m_am_b}{m_a+m_b}$，相对运动等效为一个质量 μ 的振子与劲度系数 k_0 的弹簧：$\mu\ddot{x}=-k_0(x-l_0)$，其中 x 为两球间距。角频率 $\omega=\sqrt{k_0/\mu}=\sqrt{\dfrac{k_0(m_a+m_b)}{m_am_b}}$。初始条件 $x(0)=l_0$、$\dot{x}(0)=v_0$，故相对速度 $\dot{x}(t)=v_0\cos\omega t$。

(2) 第（1）问：回代求两球速度　由质心定理 $m_av_a+m_bv_b=(m_a+m_b)V$ 与相对速度关系 $v_a-v_b=\dot{x}$ 联立解得 $v_a=V+\dfrac{m_b}{m_a+m_b}v_0\cos\omega t$，$v_b=V-\dfrac{m_a}{m_a+m_b}v_0\cos\omega t$。核对 $t=0$：$v_a=\dfrac{(m_a+m_b)v_0}{m_a+m_b}=v_0$，$v_b=0$，与初始条件一致。

(3) 第（2）问：由平衡条件求电荷量　平衡时库仑斥力与弹力等值反向：$k_0(L_0-l_0)=\dfrac{Kq^2}{L_0^2}$，解得 $q=L_0\sqrt{\dfrac{k_0(L_0-l_0)}{K}}$。

(4) 第（2）问：微振动频率　在平衡长度 L_0 附近设间距偏离 ξ，回复力系数为势场二阶导数：$k_{\text{eff}}=-\dfrac{d}{dr}\left[k_0(r-l_0)-\dfrac{Kq^2}{r^2}\right]_{r=L_0}=k_0+\dfrac{2Kq^2}{L_0^3}$。代入 $Kq^2=k_0L_0^2(L_0-l_0)$ 得 $k_{\text{eff}}=k_0\left(3-\dfrac{2l_0}{L_0}\right)=\dfrac{k_0(3L_0-2l_0)}{L_0}$。相对运动仍用折合质量 μ，故 $f=\dfrac{\omega}{2\pi}=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k_0(3L_0-2l_0)}{L_0}\cdot\dfrac{m_a+m_b}{m_am_b}}$。

2. 计算题

答案　（1）$r_0=\left[\dfrac{G(M+m)T_0^2}{4\pi^2}\right]^{1/3}$；（2）$T_1=2\pi\sqrt{\dfrac{a^3}{G(M+m-\Delta M)}}$，其中 $a=r_0\dfrac{M+m-\Delta M}{M+m-2\Delta M}$；（3）$\Delta M\geq\dfrac{M+m}{2}$

详解

(1) 第（1）问：爆炸前圆轨道　双星绕质心转动，间距 r_0，每星受引力 GMm/r_0^2，圆轨道条件 $\omega^2=\dfrac{G(M+m)}{r_0^3}$（二体标准结果）。由 $T_0=\dfrac{2\pi}{\omega}$ 得 $r_0^3=\dfrac{G(M+m)T_0^2}{4\pi^2}$，即 $r_0=\left[\dfrac{G(M+m)T_0^2}{4\pi^2}\right]^{1/3}$。

(2) 第（2）问：爆炸后相对运动的机械能 爆炸是瞬时且各向同性的，m 星速度不变，M 星残余体 $M'=M-\Delta M$ 速度与爆炸前相同，故相对速度不变：$v_{\mathrm{rel}}=\omega r_0$，$v_{\mathrm{rel}}^2=\dfrac{G(M+m)}{r_0}$。以折合质量 $\mu'=\dfrac{M'm}{M'+m}$ 写相对运动能量：$E'=\dfrac{1}{2}\mu' v_{\mathrm{rel}}^2-\dfrac{GM'm}{r_0}=\dfrac{G\mu'(M+m)}{2r_0}-\dfrac{GM'm}{r_0}=-\dfrac{GM'm}{2r_0}\cdot\dfrac{M+m-2\Delta M}{M'+m}$。

(3) 第（2）问：新轨道半长轴与周期 由开普勒轨道能量关系 $E'=-\dfrac{GM'm}{2a}$ 得 $a=r_0\dfrac{M'+m}{M+m-2\Delta M}=r_0\dfrac{M+m-\Delta M}{M+m-2\Delta M}$。周期由开普勒第三定律（以 $M'+m$ 为总质量）：$T_1=2\pi\sqrt{\dfrac{a^3}{G(M'+m)}}=2\pi\sqrt{\dfrac{a^3}{G(M+m-\Delta M)}}$。该结果在 $E'<0$ 即 $\Delta M<\dfrac{M+m}{2}$ 时成立，此时 m 星速度不变、新椭圆过爆炸点，周期表达式自洽。

(4) 第（3）问：永远分开的条件 永远分开即新轨道能量 $E'\geq 0$（抛物线或双曲线）：$\dfrac{M+m-2\Delta M}{M'+m}\leq 0$，即 $\Delta M\geq\dfrac{M+m}{2}$（自然还要求 $\Delta M\leq M$）。其物理含义：瞬时各向同性抛掉的质量超过系统总质量的一半时，剩余两体的相对动能超过其引力势能，系统不再束缚。

---

3. 计算题

> **答案** （1）各阶段机械能：$E_A=mgh_1$；$A\to A'$：E 减少 $mg\Delta h_A$，$\Delta h_A=\dfrac{d(l+d-h_1)}{l}$；$A'\to B$：守恒，$E=mgh_{A'}$，$h_{A'}=\dfrac{(l+d)(h_1-d)}{l}$；$B\to B'$：$E$ 增加 $mgd+mgh_{A'}\left[\left(\dfrac{l+d}{l}\right)^2-1\right]$；$B'\to C$：守恒，$h_2=d+\dfrac{(l+d)^3}{l^3}(h_1-d)$。（2）（i）$h_{n+1}=Ah_n+C$；（ii）$h_n=A^{n-1}h_1+\dfrac{1-A^{n-1}}{1-A}C$，$h_{n+1}-h_n=A^{n-1}(h_2-h_1)$

详解

(1) 第（1）问：几何关系 以 B（蹲姿最低点）为势能零点。蹲下时质心距悬点 $l+d$，站立时为 l。第 1 个最高点 A 处于站姿，摆角 θ_A 满足 $h_1=d+l(1-\cos\theta_A)$，即 $1-\cos\theta_A=\dfrac{h_1-d}{l}$。在 A 点迅速蹲下到 A'（角速度 ≈ 0，动能不变），A' 高度 $h_{A'}=(l+d)(1-\cos\theta_A)=\dfrac{(l+d)(h_1-d)}{l}$，质心下降 $\Delta h_A=h_1-h_{A'}=\dfrac{d(l+d-h_1)}{l}$。

(2) 第（1）问：$A\to A'$ 与 $A'\to B$ $A\to A'$：动能不变、质心下降 Δh_A，无损失模型中减少的势能 $mg\Delta h_A$ 由人体（做负功）储存，人+秋千系统机械能减少 $mg\Delta h_A$，$E_{A'}=mgh_{A'}$。$A'\to B$：蹲姿单摆无损耗下摆，机械能守恒，B 点动能 $\dfrac{1}{2}m(l+d)^2\omega_B^2=mgh_{A'}$，故 $\omega_B^2=\dfrac{2gh_{A'}}{(l+d)^2}$，$E_B=mgh_{A'}$。

(3) 第（1）问：$B\to B'$（站起） 迅速站起过程中人-秋千相互作用力沿摆杆，对悬点 O 力矩为零，对 O 角动量守恒：$m(l+d)^2\omega_B=ml^2\omega_{B'}$，$\omega_{B'}=\omega_B\left(\dfrac{l+d}{l}\right)^2$。站起后动能 $\dfrac{1}{2}ml^2\omega_{B'}^2=mgh_{A'}\left(\dfrac{l+d}{l}\right)^2$，动能增加 $\Delta E_k=mgh_{A'}\left[\left(\dfrac{l+d}{l}\right)^2-1\right]$；同时质心升高 d，势能增加 mgd。二者均由人体做正功提供，故 $E_{B'}-E_B=mgd+mgh_{A'}\left[\left(\dfrac{l+d}{l}\right)^2-1\right]$，$E_{B'}=mgd+mgh_{A'}\left(\dfrac{l+d}{l}\right)^2$。

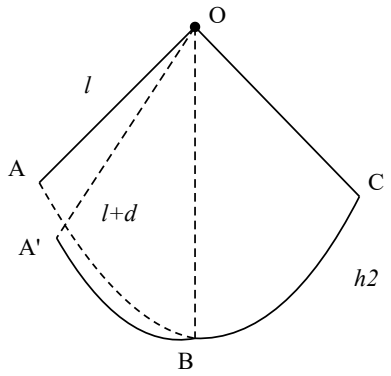
(4) 第（1）问：$B'\to C$ 站姿上摆机械能守恒：$mgh_2=E_{B'}$，故 $h_2=d+(\dfrac{l+d}{l})^2\cdot\dfrac{(l+d)(h_1-d)}{l}=d+\dfrac{(l+d)^3}{l^3}(h_1-d)$。由于 $l+d>l$，$h_2>h_1$，这就是秋千越荡越高的原因。

(5) 第（2）（i）：相邻两个最高点高度的递推关系 重复（1）的几何关系，把 h_1 换成 h_n：蹲下后高度 $h_{A'}=\dfrac{(l+d)(h_n-d)}{l}$，下蹲高度差 $\Delta h_n=h_n-h_{A'}=\dfrac{d(l+d-h_n)}{l}$，蹲下损耗 $k_1mg(h_0+\Delta h_n)$，站起损耗 $k_2mg(h_0'+d)$。到 B 点动能 $\dfrac{1}{2}m(l+d)^2\omega^2=mgh_{A'}-k_1mg(h_0+\Delta h_n)$；站起（角动量仍守恒，动能放大 $(\dfrac{l+d}{l})^2$ 倍）后再扣除站起损耗并升高 d：

$$mgh_{n+1}=[mgh_{A'}-k_1mg(h_0+\Delta h_n)](\frac{l+d}{l})^2+mgd-k_2mg(h_0'+d)$$

整理成线性递推 $h_{n+1}=Ah_n+C$，其中 $A=\dfrac{(l+d)(l+d+k_1d)}{l^2}$，$C=d-(1+k_1)d(\dfrac{l+d}{l})^3-k_1h_0(\dfrac{l+d}{l})^2-k_2(h_0'+d)$。

(6) 第（2）（ii）：h_n 与 h_1、$h_{n+1}-h_n$ 与 h_1 的关系 递推 $h_{n+1}=Ah_n+C$ 对 h_n 逐项求和：$h_n=A^{n-1}h_1+\dfrac{1-A^{n-1}}{1-A}C$（$A\neq1$；若 $A=1$ 则 $h_n=h_1+(n-1)C$）。相邻差满足 $h_{n+1}-h_n=A^{n-1}(h_2-h_1)$，其中 $h_2=Ah_1+C$。由于 $A=\dfrac{(l+d)(l+d+k_1d)}{l^2}>1$，只要 $h_2>h_1$ 振幅按公比 A 的等比方式增长；数值回代可核对 $h_2-h_1=[\dfrac{(l+d)^3}{l^3}-1](h_1-d)+$（损耗修正项），与（1）中 $k_1=k_2=0$ 的结果一致。



题3 模型示意：在最高点 A 蹲下（A→A'），下摆至最低点 B，在 B 站起（B→B'）后荡至更高点 C

关键在于区分两类过程：下摆/上摆机械能守恒；迅速站起时对悬点角动量守恒导致动能放大 $((l+d)/l)^2$ 倍，这是能量注入的根源。

4. 计算题

答案　（1）$J=\dfrac{ml^2}{6}$；（2）$\theta=\theta_0\cos\omega t$，$\dot\theta=-\theta_0\omega\sin\omega t$，$\ddot\theta=-\theta_0\omega^2\cos\omega t$，$\omega=\sqrt{6BI/m}$；（3）匀角速转动，$V_{PQ}=Bl^2\omega_0\sin[\omega_0(t-t_0)]$，$\omega_0=\theta_0\omega$；（4）$\alpha=\dfrac{mR}{12B^2l^2\sin^2\theta_1}$，$\alpha_{\min}=\dfrac{mR}{12B^2l^2}$

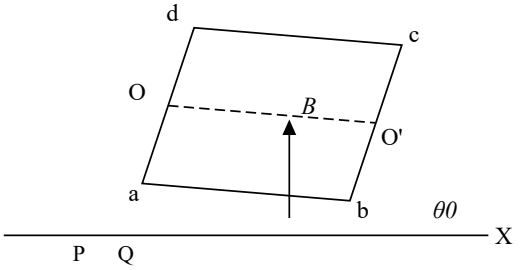
详解

(1) 第（1）问：转动惯量　轴 OO' 通过 ad、bc 两边中点，故 ad、bc 两边（各质量 $m/4$）绕过其中心的垂直轴转动，贡献各 $\dfrac{m}{4}\cdot\dfrac{l^2}{12}$；ab、cd 两边（各 $m/4$）与轴平行、相距 $l/2$，贡献各 $\dfrac{m}{4}\left(\dfrac{l}{2}\right)^2$。合计 $J=2\cdot\dfrac{ml^2}{48}+2\cdot\dfrac{ml^2}{16}=\dfrac{ml^2}{24}+\dfrac{ml^2}{8}=\dfrac{ml^2}{6}$。

(2) 第（2）问：小角度下的运动方程与解　线框磁矩大小 $\mu=Il^2$，方向沿线框法线。线框平面与水平面（含 X 轴）成 θ 角时，法线与竖直方向 B 成 θ 角，磁力矩大小 $\tau=\mu B\sin\theta=BIl^2\sin\theta$。按题给电流方向 $P\to a\to b\to c\to d\to Q$，磁力矩指向 θ 减小的方向（把线框平面拉回水平），故 $J\ddot\theta=-BIl^2\sin\theta$。$\theta_0$ 很小时 $\sin\theta\approx\theta$：$\ddot\theta+\omega^2\theta=0$，$\omega^2=\dfrac{BIl^2}{J}=\dfrac{6BI}{m}$。初始 $\theta(0)=\theta_0$、$\dot\theta(0)=0$，解得 $\theta=\theta_0\cos\omega t$，$\dot\theta=-\theta_0\omega\sin\omega t$，$\ddot\theta=-\theta_0\omega^2\cos\omega t$。

(3) 第（3）问：断电后的运动与 V_{PQ}　$t_0=\dfrac{\pi}{2\omega}$ 时 $\theta=0$（平面恰转至水平），角速度 $\omega_0=\theta_0\omega=\theta_0\sqrt{6BI/m}$。断开后无电流、无磁力矩；线框均匀且质心在轴上，重力对轴无力矩，故线框以恒定角速度 ω_0 继续逆时针转动：$\theta=\omega_0(t-t_0)$。磁通 $\Phi=Bl^2\cos\theta$，感应电动势 $\varepsilon=-\dfrac{d\Phi}{dt}=Bl^2\omega_0\sin[\omega_0(t-t_0)]$。开路时 P、Q 间电压即电动势：$V_{PQ}=Bl^2\omega_0\sin[\omega_0(t-t_0)]=Bl^2\theta_0\sqrt{6BI/m}\,\sin\left[\theta_0\sqrt{6BI/m}\,(t-t_0)\right]$（正负号依 P、Q 的标定，上式给出幅值规律）。

(4) 第（4）问：短路后滑行小角 α 及其最小值　在夹角 θ_1 处短路，此时角速度仍为 ω_0（断电期间匀速）。感应电流 $i=\dfrac{\varepsilon}{R}=\dfrac{Bl^2\omega_0\sin\theta_1}{R}$，电磁制动力矩 $\tau=-Bil^2\sin\theta_1=-\dfrac{B^2l^4\omega_0\sin^2\theta_1}{R}$。因 α 很小，把 $\sin\theta_1$、ω_0 视为常量，由动能定理 $\dfrac{1}{2}J\omega_0^2=\dfrac{B^2l^4\omega_0^2\sin^2\theta_1}{R}\alpha$，得 $\alpha=\dfrac{JR}{2B^2l^4\sin^2\theta_1}=\dfrac{mR}{12B^2l^2\sin^2\theta_1}$（代入 $J=ml^2/6$）。在 $\dfrac{\pi}{4}\le\theta_1\le\dfrac{3\pi}{4}$ 内 $\sin^2\theta_1$ 于 $\theta_1=\dfrac{\pi}{2}$ 取最大值 1，故 $\alpha_{\min}=\dfrac{mR}{12B^2l^2}$。



题4 模型示意：正方形线框 abcd 绕通过 ad、bc 中点的水平轴 OO' 转动，B 竖直向上

（2）问中电流方向使水平位置（平面水平）为稳定平衡，故作简谐振动而非倒摆；断电后因重力对过质心之轴无力矩，线框匀速转动，电动势为正弦形式。

5. 计算题

答案　（1）$R=\dfrac{mv}{qB}$；　（2）　（i）$s_{\max}=\dfrac{mv^2}{qE}$（发射仰角 45° 时）；　（ii）$s=\dfrac{10\sqrt{2}mv^2}{qE}$

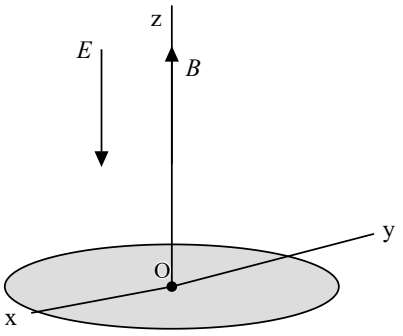
详解

(1) 第（1）问：运动的分解　电场沿 $-z$、磁场沿 $+z$，二者平行，洛伦兹力只在水平面内。运动可严格分解：水平方向为绕磁场的匀速圆周运动，圆半径 $r_c=\dfrac{mv_h}{qB}$（$v_h=v\cos\varphi$，φ 为发射仰角），圆心固定在距原点 r_c 处；竖直方向为 $-z$ 向匀强场中的竖直上抛，到最高点高度 $\dfrac{mv^2\sin^2\varphi}{2qE}$ 后落回表面，往返时间 $T=\dfrac{2mv\sin\varphi}{qE}$。弹性碰撞使 v_z 反向、v_h 大小方向均不变，故每次碰撞后粒子沿同一圆周运动，水平范围最大为圆心距加半径即 $2r_c=\dfrac{2mv\cos\varphi}{qB}$。

(2) 第（1）问：束缚条件与圆半径　粒子始终束缚在半径 R 的圆柱内（柱外无磁场，一旦水平越界即失控），条件为 $2r_c\le R$，即 $\cos\varphi\le\dfrac{qBR}{2mv}$。发射方向在上半空间均匀分布，$\cos\varphi$ 在 $[0,1]$ 均匀分布，束缚比例 $\eta=1-\dfrac{qBR}{2mv}$。令 $\eta=50\%$：$\dfrac{qBR}{2mv}=\dfrac{1}{2}$，得 $R=\dfrac{mv}{qB}$。回代核对：此时 $\varphi\ge60^\circ$ 的粒子（占一半）均被束缚，与 $\eta=50\%$ 一致。

(3) 第（2）（i）：第一次碰撞前投影点路程的最大值　投影点（水平位置）走过的弧长 $s=v_hT=\dfrac{2mv^2\sin\varphi\cos\varphi}{qE}=\dfrac{mv^2\sin2\varphi}{qE}$。当 $\varphi=45^\circ$ 时取最大值 $s_{\max}=\dfrac{mv^2}{qE}$。

(4) 第（2）（ii）：耗尽前走过的总路程　每次碰撞后竖直与水平速率均按同一比例 $\gamma=\sqrt{0.9}$ 缩小（动能减少 10%）。第 k 次飞行（$k=0,1,2,\ldots$）：速率 $v_k=v\gamma^k$，往返时间 $T_k=\dfrac{2mv\gamma^k\sin\varphi}{qE}$，该次路径长 $v_kT_k=\dfrac{2mv^2\cdot\ 0.9^k\sin\varphi}{qE}$。取 $\varphi=45^\circ$、$\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，总路程 $s=\dfrac{\sqrt{2}mv^2}{qE}\sum_{k=0}^{\infty}0.9^k=\dfrac{\sqrt{2}mv^2}{qE}\cdot\ \dfrac{1}{1-0.9}=\dfrac{10\sqrt{2}\,mv^2}{qE}$。粒子动能逐次衰减，最终沉积于材料表面，级数收敛，结果自洽。



题5 模型示意：圆形薄片置于 xOy 面，柱内 B 沿 +z，柱上方 E 沿 −z，粒子自 O 点发出

6. 计算题

答案　（1）$a \approx 2.79\times10^{-3}\,\mathrm{m}$；　（2）$F \approx 7.87\times10^{-2}\,\mathrm{N}$

详解

(1) 第（1）问：拉普拉斯压差方程　管内水柱顶部弯月面（接触角为零）凹向上，其内外压差为 $p_{内}-p_0=-\dfrac{2\sigma}{r}$（$r=0.500\ \mathrm{mm}$ 为内半径）；水滴底部表面凸向下，曲率半径 a，压差 $p_{内底}-p_0=+\dfrac{2\sigma}{a}$。两处由高度差 $h=3.50\ \mathrm{cm}$ 的水柱连通：$p_{内底}=p_{内顶}+\rho g h$。代入得 $\dfrac{2\sigma}{a}=\rho g h-\dfrac{2\sigma}{r}$。

(2) 第（1）问：数值回代　$\rho g h=1.00\times10^{3}\times9.80\times0.0350=343\,\mathrm{Pa}$；$\dfrac{2\sigma}{r}=\dfrac{2\times7.27\times10^{-2}}{0.500\times10^{-3}}=290.8\,\mathrm{Pa}$；故 $\dfrac{2\sigma}{a}=52.2\,\mathrm{Pa}$，$a=\dfrac{0.1454}{52.2}\approx2.79\times10^{-3}\,\mathrm{m}\approx2.79\ \mathrm{mm}$。

(3) 第（2）问：管内水柱上升高度　浸入深度为管长的三分之一即 $2.00\ \mathrm{cm}$。由朱里定律管内水在外水面以上升高 $h_c=\dfrac{2\sigma}{\rho g r}=\dfrac{0.1454}{1.00\times10^{3}\times9.80\times0.500\times10^{-3}}=0.0297\,\mathrm{m}\approx2.97\ \mathrm{cm}$，管内水柱顶距管底 $2.00+2.97=4.97\ \mathrm{cm}<6.00\ \mathrm{cm}$，未溢出。

(4) 第（2）问：受力平衡求 F　对管壁逐项核算竖直力：玻璃管重力 $W_g=2\rho\pi(R^2-r^2)Lg=2\times10^{3}\times\pi\times(2.475\times10^{-5})\times0.0600\times9.80=9.14\times10^{-2}\,\mathrm{N}$；浸入部分浮力 $F_b=\rho g\pi(R^2-r^2)\times0.0200=1.52\times10^{-2}\,\mathrm{N}$；内接触线弯月面把水柱重量传给管壁，反作用力向下 $2\pi r\sigma=2\pi\times0.500\times10^{-3}\times7.27\times10^{-2}=2.29\times10^{-4}\,\mathrm{N}$（恰等于管内高出外水面的水柱重 $\rho g\pi r^2 h_c=2.28\times10^{-4}\,\mathrm{N}$，自洽）；外壁因完全润湿水沿外壁爬升，外接触线对管壁向下拉力 $2\pi R\sigma=2\pi\times5.00\times10^{-3}\times7.27\times10^{-2}=2.28\times10^{-3}\,\mathrm{N}$。故所需向上力 $F=W_g-F_b+2\pi(R+r)\sigma=9.14\times10^{-2}-1.52\times10^{-2}+2.51\times10^{-3}\approx7.87\times10^{-2}\,\mathrm{N}$。

> 本题压差符号极易出错：凹面（弯月面）使液内压强低于大气压，凸面（水滴底部）使液内压强高于大气压；两式相减即得曲率半径。

7. 计算题

答案　（1）　（i）$\lambda'=\lambda_0\left[1+\dfrac{GM}{c^2}\left(\dfrac{1}{R}-\dfrac{1}{R+L}\right)\right]\approx\lambda_0\left(1+\dfrac{GML}{c^2R^2}\right)$；　（ii）$\lambda''\approx\lambda_0\left(1+\dfrac{aL}{c^2}\right)$；　（iii）$a=\dfrac{GM}{R^2}$；　（2）$v=\dfrac{gL}{c}\approx7.39\times10^{-7}\,\mathrm{m/s}$，方向竖直向下

详解

(1)　（1）　（i）：弱场引力红移　光子能量 $h\nu$ 在引力场中守恒，其等效引力质量为 $h\nu/c^2$；光自 A（R 处）升至 B（$R+L$ 处）反抗引力做功，频率降低。一阶近似下频率相对变化等于引力势差除以 c^2：$\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda_0}=\dfrac{\Delta\Phi}{c^2}=\dfrac{GM}{c^2}\left(\dfrac{1}{R}-\dfrac{1}{R+L}\right)$，故 $\lambda'=\lambda_0\left[1+\dfrac{GM}{c^2}\left(\dfrac{1}{R}-\dfrac{1}{R+L}\right)\right]$；因 $R\gg L$，$\lambda'\approx\lambda_0\left(1+\dfrac{GML}{c^2R^2}\right)$。

(2)　（1）　（ii）：加速箱中的接收波长　光自 A 传到 B 所需时间一阶为 $t_1\approx L/c$；接收时刻 B 处（随箱加速）的速度 $v=at_1\approx\dfrac{aL}{c}$，方向背离光源。相对论多普勒效应 $\nu''=\nu_0\sqrt{\dfrac{1-\beta}{1+\beta}}\approx\nu_0(1-\beta)$，$\beta=\dfrac{aL}{c}\ll1$。故 $\lambda''=\dfrac{\lambda_0}{1-\beta}\approx\lambda_0\left(1+\dfrac{aL}{c^2}\right)$。

(3)　(1)　(iii)：等效原理要求的 a 比较（i）（ii）的一阶红移：$\dfrac{GML}{c^2R^2}=\dfrac{aL}{c^2}$，得 $a=\dfrac{GM}{R^2}$，即加速箱的加速度应等于星体表面处的引力场强度（局部等效原理的直接体现）。

(4)　(2)：穆斯堡尔实验所需速度 光子向上传播 L 后频率降为 $\nu_B\approx\nu_0\left(1-\dfrac{gL}{c^2}\right)$。探测器仅对 ν_0 敏感，需以速度 v 竖直向下（迎着光子）运动，使多普勒蓝移补偿引力红移：$\nu_0\approx\nu_B(1+v/c)=\nu_0\left(1-\dfrac{gL}{c^2}\right)\left(1+\dfrac{v}{c}\right)$，解得 $v\approx\dfrac{gL}{c}$。代入 $g=9.81\,\mathrm{m/s^2}$、$L=22.6\,\mathrm{m}$、$c=3.00\times10^8\,\mathrm{m/s}$：$v=\dfrac{9.81\times22.6}{3.00\times10^8}=\dfrac{221.7}{3.00\times10^8}\approx7.39\times10^{-7}\,\mathrm{m/s}\approx0.74\,\mu\mathrm{m/s}$，方向竖直向下。

8. 计算题

> **答案**　（1）$d\approx256\,\mathrm{nm}$，另一加强波长 $\lambda_2\approx1.17\times10^3\,\mathrm{nm}$；（2）（3）辐射压力与力矩模型及平衡方程见解析；因卷面可读文本中未给出样品长 a、宽 b 的数值，第（3）问数值解暂缺，列为存疑

详解

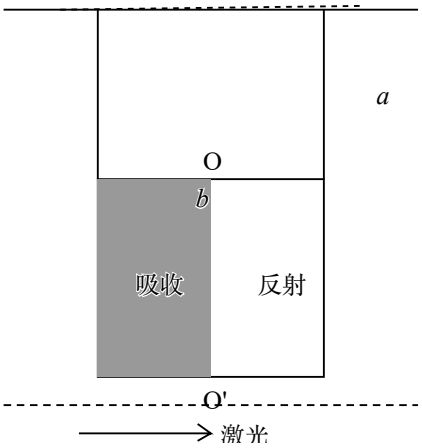
(1) 第（1）问：干涉极大条件 空气→氮化镓（$n>1$）反射有 π 相位跃变；氮化镓→硅（$n_{\mathrm{Si}}=3.49\sim5.49$ 均大于 n_{GaN}）反射同样有 π 跃变，两反射光的附加相位差抵消，故反射加强条件为 $2n(\lambda)d=m\lambda$（m 为正整数）。在 $\lambda=600\,\mathrm{nm}$ 处：$n^2=2.26^2+\dfrac{330.1^2}{600^2-265.7^2}=5.1076+0.3765=5.4841$，$n=2.3418$。

(2) 第（1）问：确定级次 m 与膜厚 考察 $f(\lambda)=\dfrac{2n(\lambda)d}{\lambda}$：随 λ 增大 n 减小且分母增大，f 单调下降，故各极大对应级次 m 随波长增大而依次减 1。$d=\dfrac{m\lambda_1}{2n(600)}=\dfrac{600m}{2\times2.3418}\,\mathrm{nm}$。逐一检验以满足“450~1200 nm 内仅有两个极大”：$m=1$ 时全区仅 1 个极大；$m=2$ 时 $d\approx256\,\mathrm{nm}$，$f(450)=2\times2.436\times256/450\approx2.77<3$（无 $m\ge3$ 极大），$f(1200)\approx0.97<1<2$（恰含 $m=2,1$ 两个极大）；$m\ge3$ 时极大数 ≥3。故 $m=2$，$d=\dfrac{1200}{2\times2.3418}\approx256\,\mathrm{nm}$。

(3) 第（1）问：另一加强波长 相应 $m=1$ 的波长满足 $2n(\lambda)d=\lambda$，即 $\lambda=2d\,n(\lambda)$。数值求解：在 $\lambda=1160\,\mathrm{nm}$ 处 $2dn\approx1166.7>1160$，在 $\lambda=1168\,\mathrm{nm}$ 处 $2dn\approx1166.6<1168$，根在 $\lambda_2\approx1167\,\mathrm{nm}$，即 $\lambda_2\approx1.17\times10^3\,\mathrm{nm}$，位于 450~1200 nm 范围内，满足题设“仅有两种波长”。

(4) 第（2）问：辐射压力与转动力矩（本站建模） 光强 $I=\dfrac{1}{2}c\varepsilon_0E^2$（$E$ 为有效值）。涂层左半面全吸收：辐射力沿光束方向，大小 $\dfrac{ab}{2}\cdot\dfrac{I}{c}$；右半面全反射：辐射力沿镜面法线方向，大小 $\dfrac{ab}{2}\cdot\dfrac{2I}{c}$。样品绕过中心的竖直轴转过 α 角后，吸收半的力仍沿光束、反射半的力沿已转过的法线方向，二力作用点分居轴两侧（相距各 $b/4$），对竖直轴形成净力矩，量级为 $\tau_{\text{光}}\sim\dfrac{ab^2I}{8c}\cos\alpha(\cos\alpha+2)$，驱动样品持续偏转。

(5) 第（2）（3）问：平衡条件与数值（存疑项） 两根长 a 的竖直细线悬挂样品，样品绕竖直轴转过 α 时吊点水平错开，样品升高、重力势能增大，提供恢复力矩 $\tau_{\text{重}}=Mg\dfrac{dh}{d\alpha}$（$M=ab(\rho'd'+\rho d)$ 为样品总质量）。稳定平衡由 $\tau_{\text{光}}=\tau_{\text{重}}$ 给出。但原卷可读文本中仅给出 $E=5.00\times10^4\,\mathrm{V/m}$、$d'=3.00\times10^{-4}\,\mathrm{m}$、$\rho'=2.33\times10^3\,\mathrm{kg/m^3}$、$\rho=6.10\times10^3\,\mathrm{kg/m^3}$、$\varepsilon_0=8.85\times10^{-12}\,\mathrm{F/m}$、$g=9.80\,\mathrm{m/s^2}$，未给出 a、b 的数值，且悬挂点布置在卷面图中无法精确辨读，故本站无法给出第（3）问的唯一数值解。按本站对吊点几何的建模给出平衡方程，若与原卷印刷值不符以卷面为准；此题列为存疑，待核对原卷图 III 的悬挂点间距后即可数值求解。



题8 模型示意：细线悬挂的涂层样品，左半面全吸收、右半面全反射，强激光垂直照射涂层表面

第（1）问的关键是判级：利用 $f(\lambda)$ 单调性逐一排除级次，使 450~1200 nm 内恰好出现两个极大，从而唯一确定 $m=2$ 与 d。

逐光知理 · 竞赛答案册 · 易错点速查

第34届全国中学生物理竞赛决赛理论 · 易错点速查

补在原册之后：原册答案与详解未作任何改动

共 6 条 · 绑定本卷题号

只挑本卷最容易失分的动作，按「错法 / 机理 / 正解」三段写，题号与原册一致；公式沿用原册口径。

第 1 题 · 折合质量与微振动频率

错法 两球各按自身质量直接套弹簧劲度 k_0 写角频率 $\sqrt{k_0/m_a}$、$\sqrt{k_0/m_b}$；微振动时又直接把回复力系数取成原弹簧 k_0。

机理 光滑水平面系统不受外力，质心匀速运动，相对运动须用折合质量 $\mu=\frac{m_am_b}{m_a+m_b}$ 等效为一个振子，相对角频率 $\omega=\sqrt{k_0/\mu}=\sqrt{\frac{k_0(m_a+m_b)}{m_am_b}}$。平衡长度附近的回复力系数是势场对间距的二阶导数，库仑斥力随间距变化，微振动等效劲度 $k_{\text{eff}}=k_0\frac{3L_0-2l_0}{L_0}$，不等于原弹簧 k_0。

正解 先分质心运动与相对运动，相对振子质量用 μ；微振动频率 $f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_{\text{eff}}}{\mu}}$，其中 $k_{\text{eff}}=k_0(3L_0-2l_0)/L_0$，再回代两球速度 $v_a=V+\frac{m_b}{m_a+m_b}v_0\cos\omega t$、$v_b=V-\frac{m_a}{m_a+m_b}v_0\cos\omega t$。

第 3 题 · 站起与蹲下过程的守恒量

错法 把最低点迅速站起的过程也按机械能守恒处理，认为站起前后动能不变；或在站起时对悬点列动量守恒。

机理 下摆、上摆这类无瞬时姿态变化的过程机械能守恒；而迅速站起时人-秋千相互作用力沿摆杆方向，对悬点 O 的力矩为零，对 O 角动量守恒，不是机械能守恒。站起后质心由 $l+d$ 缩到 l，由 $m(l+d)^2\omega_B=ml^2\omega_{B'}$，动能被放大 $(l/(l+d))^2$ 倍，动能增加与质心升高的势能增加都由人体做正功提供，这是秋千越荡越高的能量注入根源。

正解 蹲下（最高点 $A\to A'$）与站起（最低点 $B\to B'$）按角动量守恒处理，蹲下时动能不变、质心下降使系统机械能减少 $mg\Delta h_A$；下摆 $A'\to B$、上摆 $B'\to C$ 按机械能守恒；递推时区分下蹲损耗、站起损耗与动能放大因子 $(l/(l+d))^2$。

第 4 题 · 第(2)问 小角度摆动

错法 算转动惯量时只计 ad、bc 两边绕过中心垂直轴的贡献，漏掉与轴平行的 ab、cd 两边的平行轴贡献；或把磁力矩写成使 θ 增大的方向，按倒摆写运动方程。

机理 轴 OO' 过 ad、bc 两边中点：ad、bc 各质量 $m/4$ 绕过自身中心垂直轴转，贡献 $\frac{m}{4}\cdot\frac{l^2}{12}$；ab、cd 与轴平行、相距 $l/2$，由平行轴定理各贡献 $\frac{m}{4}(l/2)^2$，合计 $J=ml^2/6$。按题给电流方向，磁力矩把线框平面拉回水平，水平位置是稳定平衡，小角度下 $J\ddot\theta=-BIl^2\theta$，是简谐振动而非倒摆。

正解 转动惯量逐项累加得 $J=ml^2/6$；小角度 $\sin\theta\approx\theta$，运动方程 $J\ddot\theta+BIl^2\theta=0$，角频率 $\omega=\sqrt{6BI/m}$，解 $\theta=\theta_0\cos\omega t$。

第 6 题 · 拉普拉斯压差的符号

错法 把管顶凹弯月面与水滴底部凸面的压差写成同号相加；或认为凹、凸液面下液内压强都高于大气压。

机理 弯月面凹向上，液内压强低于大气压：$p_{\text{内顶}}-p_0=-2\sigma/r$；水滴底部凸向下，液内压强高于大气压：$p_{\text{内底}}-p_0=+2\sigma/a$。两处由高度差 h 的水柱连通，$p_{\text{内底}}=p_{\text{内顶}}+\rho gh$，故 $\rho gh=2\sigma/a-2\sigma/r$，两式是相减关系，曲率半径 r、a 取正值。

正解 先判曲面凹凸定压差正负，再列水柱高度连通式；代入 $r=0.500\,\text{mm}$、$h=3.50\,\text{cm}$、$\sigma=7.27\times10^{-2}\,\text{N/m}$ 解得凸面曲率半径 $a\approx2.79\times10^{-3}\,\text{m}$。

第 7 题 · 第(2)问 穆斯堡尔补偿速度

错法　认为探测器应竖直向上运动、远离光子以补偿引力红移；或把补偿速度写成与 g/L 成正比的小量。

机理　光子向上传播后频率降低（红移），探测器要迎着光子运动产生多普勒蓝移把红移补回来，故运动方向竖直向下，不是向上远离。等效原理给出局部加速度 $a = GM/R^2 = g$，一阶多普勒蓝移 $\nu_B \approx \nu_0(1 + v/c)$ 与引力红移 $\nu_B \approx \nu_0(1 - gL/c^2)$ 对齐，得 $v/c = gL/c^2$，即 $v \approx \sqrt{gL}$ 量级，与 gL 成正比而非 g/L。

正解　探测器以 $v \approx \sqrt{gL}$ 竖直向下运动；代入 $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$、$L = 22.6\,\mathrm{m}$、$c = 3.00 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$，得 $v \approx 7.39 \times 10^{-7} c \approx 0.74\,\mathrm{m/s}$，方向竖直向下。

第 8 题 · 第(1)问 反射干涉加强条件

错法　认为只有空气-氮化镓界面有半波损失、氮化镓-硅界面没有，加强条件写成 $2n(\lambda)d = m\lambda + \lambda/2$；或不判级次，直接由一个波长反解膜厚。

机理　空气折射率小于 GaN，GaN 折射率小于 Si，两界面反射都发生 π 相位跃变，两束反射光的附加相位差相互抵消，反射加强条件为 $2n(\lambda)d = m\lambda$，不加半波长修正。级次 m 不能直接假定：$f(\lambda) = 2n(\lambda)d/\lambda$ 随 λ 增大单调下降，须在 $450 \sim 1200\,\mathrm{nm}$ 内逐一排除 m，使全区恰好出现两个极大，才能唯一确定 $m = 2$ 与膜厚 $d \approx 256\,\mathrm{nm}$。

正解　先判两界面半波损失抵消，写 $2n(\lambda)d = m\lambda$；用单调性逐档排除级次，由 $\lambda = 600\,\mathrm{nm}$ 处 $n = 2.3418$ 得 $d \approx 256\,\mathrm{nm}$，另一加强波长由 $2n(\lambda)d = \lambda$ 解得 $\lambda_2 \approx 1.17 \times 10^3\,\mathrm{nm}$。