第37届全国中学生物理竞赛复赛试题

物　　理

2020 年 9 月 19 日上午 9:00-12:00 | 共 8 题 | 满分 320 分

考生必读

1. 考生考试前请务必认真阅读本须知。
2. 本试题共 5 页，总分为 320 分。
3. 如遇试题印刷不清楚情况，请务必向监考老师提出。
4. 需要阅卷老师评阅的内容一定要写在答题纸相应题号后面的空白处；阅卷老师只评阅答题纸上的内容；写在试题纸和草稿纸上的解答一律不被评阅。

一、　（40 分）

1. 高铁运行的平稳性与列车的振动程度密切相关，列车上安装的空气弹簧可以有效减振。某高铁测试实验采用的空气弹簧模型由主气室（气囊）和附加气室（容积不变）构成，如图 1a 所示。空气弹簧对簧上负载竖直向上的作用力由气囊内被压缩的空气产生的弹力提供。簧上负载处于平衡状态时，主气室内气体的压强和体积分别为 p_{10} 和 V_{10}，附加气室的容积为 V_2，大气压强为 p_0。空气弹簧竖直向上的作用力 F 与主气室内气体压强和大气压强之差的比值称为空气弹簧的有效承载面积 A_e。已知空气的定容摩尔热容 $C_V=\frac{5}{2}R$（R 是普适气体常量）。假设在微振幅条件下主气室内气体的体积 V_1 和有效承载面积 A_e 均可视为空气弹簧（气囊）的承载面相对于其平衡位置的竖直位移 y（向下为正）的线性函数，变化率分别为常量 $-\alpha$（$\alpha>0$）和 β（$\beta>0$）。

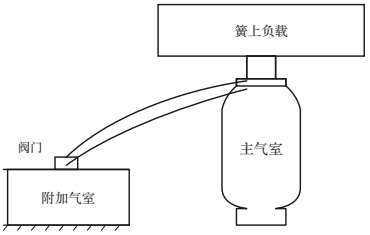

图 1a

(1) 附加气室未与主气室连通（阀门关闭），试在下述两种情形下，导出空气弹簧的劲度系数 $K\equiv \mathrm{d}F/\mathrm{d}y$ 与其有效承载面积 A_e 之间的关系：

i）上下乘客（主气室内气体压强和体积的变化满足等温过程）；

ii）列车运行中遇到剧烈颠簸（主气室内气体压强和体积变化满足绝热过程）。

(2) 主气室连通附加气室（阀门打开）后，在上述两种情形下，导出空气弹簧的劲度系数 K 与其有效承载面积 A_e 之间的关系。主气室与附加气室之间连通管道的容积可忽略。

二、　（40 分）

2. 一质量为 m、半径为 R 的均质实心母球静置于水平桌面上，母球与桌面之间的滑动摩擦因数为 μ。将球杆调整到位于过球心的竖直平面内保持水平，并击打母球上半部，球杆相对于球心所在水平面的高度为 $R/2$，击打时间极短；母球获得的冲量大小为 P，方向水平。假设最大静摩擦力等于滑动摩擦力。重力加速度大小为 g。

(1) 问击打后经过多长时间母球开始做纯滚动？求母球达到纯滚动时球心的运动速度；

(2) 记母球达到纯滚动时（以此时刻为计时零点）母球上与桌面接触点为 B，求此后的 t' 时刻球上 B 点的位置、速度与加速度。

三、（40 分）

3. 负微分电阻效应是指某些电路或电子元件（如隧道二极管）在特定的电压范围内其电流随端电压增加而减少的特性，该效应可在电路中维持高频振荡并输出放大的交流信号。在图 3a 所示的简化电路中，D 为一隧道二极管，其左侧由一定值电阻 R、一电感 L 和一电容 C 串联组成，回路交流电流记为 $i(t)$；其右侧由一理想的高频扼流圈 RFC（直流电阻为零，完全阻断交流信号）和一理想恒压直流电源 V_0 组成，回路直流电流记为 I（$I \gg |i(t)|$），已标示电流正方向。D 始终处在特定电压范围内，这时其电阻值为 $-R_0$（$R_0>0$，且为一定值）。

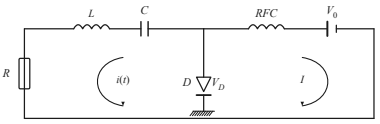

图 3a

(1) 已知 $t=0$ 时，$i(0)=0$，$\dot{i}(0)=\beta\neq 0$（$\dot{a}$ 表示 a 对 t 微商）；交流电流随时间的变化满足

$$i(t)=\alpha_1 e^{\beta_1 t}+\alpha_2 e^{\beta_2 t}$$

（α_1、β_1、α_2、β_2 为待定常量）

试确定常量 α_1、β_1、α_2、β_2，以确定任意时刻 t 的交流电流 $i(t)$；

(2) 试说明在什么条件下左侧回路中会发生谐振？并求在发生谐振的情形下左侧回路中电流 $i_H(t)$ 和谐振频率 f_H；

(3) 试说明在什么条件下左侧回路中会发生 RLC 阻尼振荡？并求此时左侧回路中电流 $i_D(t)$ 和振荡频率 f_D；

(4) 已知该隧道二极管 D 正常工作（即能保持其具有负微分电阻效应）的范围为

$$V_{\min}\leq V_D\leq V_{\max}$$

（$V_{\min}$、$V_{\max}$ 为已知常量）

试求该隧道二极管上交流部分可能达到的最大平均功率 $\overline{P}_{\max}$、以及此时理想恒压直流电源的输出电压 V_0。

四、（40 分）

4. 劳伦斯（E. O. Lawrence）在 1930 年首次提出了回旋加速器的原理：用两个半圆形磁场，使带电粒子沿圆弧形轨道旋转，反复通过两半圆缝隙间的高频电场加速而获得较高能量。他因这个极富创意的方案而获得了1939 年的诺贝尔物理学奖。

(1) 目前全球最大的回旋加速器是费米实验室中的高能质子同步加速器 Tevatron（粒子运行最大回旋圆轨道的周长为 $L_{\max}=6436\,\mathrm{m}$），可以将一质子加速到的最大能量为 $E_{\mathrm{p,max}}^{(\mathrm{tevatron})}=1.00\times 10^6\,\mathrm{MeV}$。假设质子在被加速过程中始终在垂直于均匀磁场的平面内运动，不计电磁辐射引起的能量损失。求该同步加速器 Tevatron 将质子加速到上述最大能量所需要的磁感应强度的最小值 $B_{\min}$。

(2) 高能入射质子轰击静止的质子（靶质子），可产生反质子 $\bar{\mathrm{p}}$，反应式为

$$\mathrm{p}+\mathrm{p}\rightarrow\mathrm{p}+\mathrm{p}+\mathrm{p}+\bar{\mathrm{p}}$$

求能产生反质子时入射质子的最小动能，并判断第（1）问中的 Tevatron 加速的质子是否可以轰击静止的靶质子而产生反质子。

已知数据：质子质量 $m_p=938.3\,\mathrm{MeV}/c^2$，真空中的光速 $c=3.00\times10^8\,\mathrm{m/s}$。

五、（40 分）

5. 星际飞行器甲、乙、丙如图 5a 所示：在惯性系 Σ（坐标系 O-xy）中观测到飞行器甲和乙在同一直线上朝 y 轴负方向匀速飞行，飞行器丙在另一直线上朝 y 轴正方向匀速飞行；两条飞行直线相互平行，相距 d。三艘飞行器的速度在惯性系 Σ 中分别为 $\mathbf{v}_{甲\Sigma}=(-2c/3)\hat{\mathrm{y}}$、$\mathbf{v}_{乙\Sigma}=(-c/3)\hat{\mathrm{y}}$、$\mathbf{v}_{丙\Sigma}=(2c/3)\hat{\mathrm{y}}$（$\hat{\mathrm{y}}$ 是沿 y 轴正方向的单位矢量），图中飞行器旁的箭头表示其飞行速度的方向。假设飞行器甲、乙、丙的尺寸远小于 d。

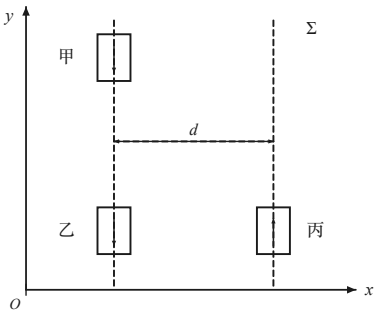

图 5a

(1) 某时刻，飞行器甲向乙发射一个光信号，乙收到该信号后立即将其反射回甲。据甲上的原子钟读数，该光信号从发出到返回共经历了时间 $(\Delta t_{光信号})_{甲}=T$。试求分别从惯性系 Σ 和乙上的观测者来看，光信号从甲发出到返回甲，所经历的时间各是多少？从甲上的观测者来看，从甲收到返回的光信号到甲追上乙需要多少时间？

(2) 当飞行器甲和丙在惯性系 Σ 中相距最近时，从甲发射一个小货物（质量远小于飞行器的质量，尺寸可忽略），小货物在惯性系 Σ 中的速度大小为 $v_{货\Sigma}=3c/4$。为了让丙能接收到该货物，从甲上的观测者来看，该货物发射速度的大小和方向是多少？从乙上的观测者来看，货物从甲发射到被丙接收所需时间 $(\Delta t_{货})_{乙}$ 是多少？

六、（40 分）

6. 光纤陀螺仪是一种能够精确测定运动物体方位的光学仪器，它是现代航海、航空和航天等领域中被广泛使用的一种惯性导航仪器。光纤陀螺仪导航主要基于下述效应：在一个半径为 R、以角速度 Ω 转动的光纤环路（见图 6a）中，从固定在环上的分束器 A 分出的两束相干光分别沿逆时针（CCW）和顺时针（CW）方向传播后回到 A，两者的光程不一样。检测两束光的相位差或干涉条纹的变化，可确定该光纤环路的转动角速度 Ω。真空中的光速为 c。

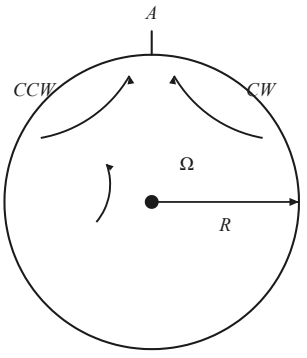

图 6a

(1) 如图 6b，光纤由内、外两层介质构成，内、外层介质的折射率分别为 n_1、n_2（$n_1>n_2$）。为了使光能在光纤内传输，光在输入端口（端口外介质的折射率为 n_0）的入射角 i 应满足什么条件？

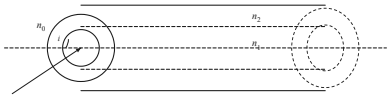
图 6b

(2) 考虑沿环路密绕 N 匝光纤，首尾相接于分束器 A，光纤环路以角速度 Ω 沿逆时针方向旋转。从 A 分出两束相干光沿光纤环路逆时针和顺时针方向传播，又回到 A。已知光传播介质的折射率为 n_1，两束光在真空中的波长为 λ_0，问两束相干光分别沿光纤环路逆时针和顺时针方向传播的时间 t_{CCW} 和 t_{CW} 为多少？这两束光的相位差为多少？试指出该相差与介质折射率 n_1 之间的关系。

(3) 为了提高陀螺系统的微型化程度，人们提出了谐振式光学陀螺系统。该系统中含有一个沿逆时针方向旋转的光学环形腔，其半径为 R，旋转角速度为 Ω（$R\Omega \ll c$），已知腔中的介质折射率为 n，在腔内存在沿逆时针和顺时针方向传播的两类共振模式。当环形腔静止时，这些模式的波长 λ_{m0} 由周期边界条件

$$2\pi R = m\lambda_{\mathrm{m0}}$$

决定，其中 m 为正整数，称为共振模式的级次。当环形腔旋转时，同一级次（均为 m）的沿顺时针和逆时针方向传播的共振模式存在一个共振频率差 Δf，试导出环形腔转动角速度 Ω 与该共振频率差 Δf 之间的关系。

七、（40 分）

7. 激光干涉引力波天文台（LIGO）2015 年首次探测到了十亿光年外双黑洞并合产生的引力波，证实了爱因斯坦理论关于存在引力波和黑洞的预言。黑洞并合过程分为三个阶段：第一阶段（旋近阶段），两黑洞围绕系统质心在同一平面内做近似圆周的运动（见图 7a），损失的机械能转化为引力辐射能，两者螺旋式逐渐靠近；第二阶段（并合阶段），双黑洞并合为一个黑洞；最后阶段（衰荡阶段），并合的黑洞弛豫至平衡状态，成为一个稳定的旋转黑洞。在旋近阶段，若忽略黑洞的自转和大小，则双黑洞均可视为质量分别恒为 M 与 m 的质点，它们之间距离 L 随时间而逐渐减小。假定系统除了辐射引力波外无其它能量耗散，不考虑引力辐射的反作用，可用牛顿引力理论进行近似处理。

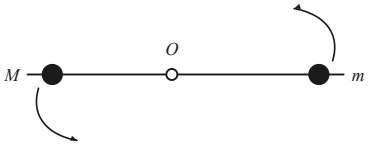

图 7a

(1) 引力波辐射功率除了与引力常量 G 成正比之外，还可能与两黑洞的质量 M 与 m、两黑洞之间的距离 L、以及系统绕质心的转动惯量 I、转动角速度 ω 和辐射引力波的传播速度（其大小等于真空中的光速 c）有关，试选取描述转动体系辐射的三个物理量与 G 一起导出引力波辐射功率的表达式（假设其中可能待定的无量纲比例常数为 α）；

(2) 若在初始时刻 $t=0$ 时两黑洞之间的距离为 L_0，且引力波辐射功率表达式中的无量纲比例常数 α 是已知的，求两黑洞从 $t=0$ 时开始绕系统质心旋转 360° 所需要的时间；

(3) 当两黑洞从 $t=0$ 时开始绕系统质心旋转多少度时，它们间的距离恰好是其初始距离的一半？

八、（40 分）

8. 将电传输信号调制到光信号的过程称为电光调制。电光调制器的主要工作原理是电光效应：以铌酸锂电光晶体为例，其折射率在电场作用下发生变化，从而改变输入光束的光程，使电信号信息转移到光信号上。电光调制器光路图如图 8a 所示，P_1、P_2 分别为起偏器和检偏器，两者结构相同但偏振方向相互垂直（图中 $P_1(\parallel x_1)$、$P_2(\parallel x_2)$ 表示 P_1、P_2 的偏振方向分别与 x_1、x_2 坐标轴平行），长度为 l、厚度为

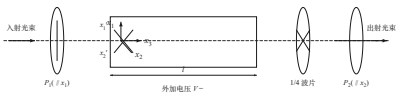

图 8a

d 的电光晶体置于 P_1、P_2 之间，晶体两端面之间加有电压 V（以产生沿 x_3 方向的电场，强度大小为 E）；真空中波长为 λ_0 的光波经过起偏器 P_1（x_1）后沿 x_3 方向入射至电光晶体，折射后分为两束偏振方向（分别与快轴 x_1' 和慢轴 x_2' 平行）相互垂直的光波，x_1' 轴与 x_1 轴、x_2' 轴与 x_2 轴均成 45° 夹角；电光晶体内沿 x_1'、x_2' 方向的折射率分别为

$$n_{x_1'}=n_o-\frac{1}{2}n_o^3\gamma E$$
$$n_{x_2'}=n_o+\frac{1}{2}n_o^3\gamma E$$

其中 n_o 为 o 光的折射率，γ 为常量，由晶体本身性质决定；两束光从电光晶体出射后经 1/4 波片，最终由检偏器 P_2（x_2）获取。

(1) 一束圆频率为 ω 的光入射到电光晶体左端面，电场强度为

$$E_{x_1'}=E_0\cos\omega t,\quad E_{x_2'}=E_0\cos\omega t$$

求光通过电光晶体后的相位变化和光强变化；当出射光束之间的相位差为 π 时，电光晶体起到一个“1/2 波片”的作用，此时所用的外加电压称为半波电压 V_π，求 V_π。

(2) 设外加电信号电压为

$$V=V_m\sin\omega_m t\quad (V_m\ll V_\pi)$$

ω_m 是调制信号频率。若光波不经过1/4 波片而直接进入检偏器 P_2，求出射光束的光强透过率（出射光与入射光强度之比）与电信号电压的关系。只有在电光调制器的透过率与调制电压具有良好的线性关系时，电信号转移到光信号后信号才不失真。求光线经过 1/4 波片和检偏器 P_2 时，出射的光束光强透过率与电信号电压的关系，并指出 1/4 波片所起的作用。

(3) 电光调制器的等效电路如图 8b 左半部所示：电光晶体置于两平行板电极间，两平行板间的电光晶体可等效为由电阻 R 和电容 C 的电阻-电容并联电路；V 为外加信号电压，R_m 为调制电源和导线的电阻，通常满足 $R\gg R_m$。试证明：在图 8b 中开关断开的情形下，当 $\omega_m\gg(R_mC)^{-1}$，实际加载至电光晶体上的电压 V_c 满足 $|V_c|\ll|V|$，即调制效率极低。

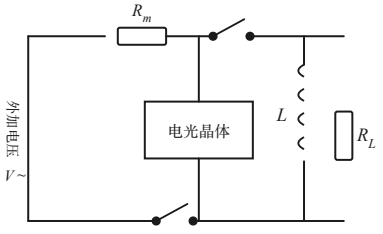

图 8b

(4) 为了提高调制效率，添加（即将图 8b 中开关合上）如图 8b 右半部所示的并联谐振回路（图中，R_L 为负载电阻，L 为线圈的电感），试证明 $|V_c|\approx|V|$。