逐光知理 · 高考物理参考答案与详解

第37届全国中学生物理竞赛复赛试题

参考答案与详解（本站独立编撰）

竞赛解答题共 8 题 · 每题 40 分 · 总分 320 分（2020 年 9 月 19 日 9:00 – 12:00）

本册参考答案与详解由逐光知理物理教研组独立编撰，基于原卷题面自行推演，未参照任何机构发布的标准答案；全部推导链与数值回代均经本站逐条核算。其中第 2 题摩擦因数符号、第 3 题第⑴问初始条件按原卷文字复原；第 3 题第⑷问、第 5 题第⑴问追赶时段、第 8 题第⑷问按本站对题意的建模给出，若与原卷印刷值不符，以卷面为准。

答案速查

题号	主考点	答案摘要
1	空气弹簧的劲度系数（等温与绝热过程、附加气室的影响）	（1）i）$K=A_e p_{10}\alpha/V_{10}+(p_{10}-p_0)\beta$；ii）$K=\frac{7}{5}A_e p_{10}\alpha/V_{10}+(p_{10}-p_0)\beta$。（2）连通后把 V_{10} 换成 $V_{10}+V_2$：等温 $K=A_e p_{10}\alpha/(V_{10}+V_2)+(p_{10}-p_0)\beta$，绝热 $K=\frac{7}{5}A_e p_{10}\alpha/(V_{10}+V_2)+(p_{10}-p_0)\beta$。
2	台球受击后的滚动过渡与摆线上接触点的运动	（1）$t=P/(14\mu mg)$；纯滚动时球心速度 $v=15P/(14m)$。（2）B 点做摆线（旋轮线）运动：$\vec{r}_B=(vt-R\sin\frac{vt}{R})\hat{x}-R\cos\frac{vt}{R}\hat{y}$；$\vec{v}_B=v(1-\cos\frac{vt}{R})\hat{x}+v\sin\frac{vt}{R}\hat{y}$；$\vec{a}_B=\frac{v^2}{R}(\sin\frac{vt}{R}\hat{x}+\cos\frac{vt}{R}\hat{y})$，大小恒为 v^2/R，方向始终指向球心。
3	隧道二极管负阻振荡电路（谐振、阻尼振荡与最大交流功率）	（1）$i(t)=a_1e^{t/\tau_1}+a_2e^{t/\tau_2}$，$1/\tau_{1,2}=\frac{-(R-R_0)\pm\sqrt{(R-R_0)^2-4L/C}}{2L}$，$a_1=\frac{a_0\tau_1\tau_2}{\tau_2-\tau_1}$，$a_2=-a_1$。（2）$R=R_0$ 时谐振：$i_H(t)=\frac{a_0}{\omega_H}\sin\omega_H t$，$f_H=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$。（3）$0<R-R_0<2\sqrt{L/C}$ 时阻尼振荡：$i_D(t)=\frac{a_0}{\omega_D}e^{-\frac{R-R_0}{2L}t}\sin\omega_D t$，$f_D=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{(R-R_0)^2}{4L^2}}$。（4）$P_{max}=\frac{(V_{max}-V_{min})^2}{8R_0}$，$V_0=IR+\frac{V_{min}+V_{max}}{2}$。
4	同步加速器的磁场与产生反质子的阈能（相对论运动学）	（1）$B_{min}\approx 3.3$ T。（2）阈动能 $K_{th}=6m_pc^2\approx 5.63$ GeV；Tevatron 的质子能量 1.00 TeV $\gg$ 5.63 GeV，可以产生反质子。
5	高速飞行器间的光信号与货物投递（狭义相对论速度变换与时序）	（1）Σ 系经历 $\Delta t=\frac{3}{\sqrt{5}}T$；乙系经历 $\Delta t_{乙}=\frac{7}{2\sqrt{10}}T$；甲收到返回信号后再过 $\Delta t'=\frac{7}{3c}\sqrt{\frac{c^2T^2}{4}-d^2}-\frac{T}{2}$ 甲追上乙（要求 $d<\frac{\sqrt{13}}{14}cT$）。（2）甲系看货物发射速度大小 $\frac{\sqrt{2389}}{52}c\approx 0.94c$，与甲飞行方向（$-y$）成 $\arctan\frac{\sqrt{85}}{48}\approx 11^\circ$、偏向丙一侧；乙系看货物从发射到被丙接收历时 $\frac{11\sqrt{34}}{17}\frac{d}{c}\approx 3.77\frac{d}{c}$。

6	光纤陀螺（数值孔径、Sagnac 时间差与谐振式陀螺的频差）	（1）$n_0 \sin i \le \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$。（2）$t_{CCW} = \dfrac{2\pi RNn_1}{c} + \dfrac{2\pi R^2 N\Omega}{c^2}$，$t_{CW} = \dfrac{2\pi RNn_1}{c} - \dfrac{2\pi R^2 N\Omega}{c^2}$；相位差 $\Delta\varphi = \dfrac{8\pi^2 R^2 N\Omega}{c\lambda_0}$，与 n_1 无关。（3）$\Omega = \dfrac{n\lambda_0 \Delta f}{2R}$。
7	双黑洞旋近的引力波辐射功率（量纲分析）与轨道演化	（1）$P = \alpha \dfrac{G\omega^6 I^2}{c^5}$。（2）$t = \dfrac{c^5[L_0^4 - (L_0^{5/2} - \dfrac{10\pi\alpha G^{5/2} mM\sqrt{M+m}}{c^5})^{8/5}]}{8\alpha G^3 mM(M+m)}$。（3）转角 $\Delta\theta = \dfrac{c^5 L_0^{5/2}(1-2^{-5/2})}{5\alpha G^{5/2} mM\sqrt{M+m}}\ \text{rad} = \dfrac{180}{\pi} \cdot \dfrac{c^5 L_0^{5/2}(1-2^{-5/2})}{5\alpha G^{5/2} mM\sqrt{M+m}}$ 度。
8	电光调制（Pockels 效应、半波电压、1/4 波片偏置与谐振驱动）	（1）相对相位差 $\delta = \dfrac{2\pi n_o^3 \gamma l}{\lambda_0} \cdot \dfrac{V}{d}$，检偏器输出 $I_2 = I_0 \sin^2 \dfrac{\delta}{2}$；$V_\pi = \dfrac{\lambda_0 d}{2n_o^3 \gamma l}$。（2）无波片：$T \approx (\dfrac{\pi V_m}{2V_\pi})^2 \sin^2 \omega_m t$（非线性失真）；经 1/4 波片：$T = \dfrac{1}{2}[1 + \sin \dfrac{\pi V}{V_\pi}] \approx \dfrac{1}{2} + \dfrac{\pi V}{2V_\pi}$，线性无失真，波片起“光学偏置”作用。（3）开关断开时 $\left\lvert V_c/V \right\rvert \approx \dfrac{1}{\omega_m R_m C} \ll 1$。（4）谐振时槽路阻抗 $\approx R_L$，$R_L \gg R_m$（且 $R \gg R_m$）则 $V_c \approx V$。

全卷解答（每题 40 分）

1. 计算题 · 40分

> **答案** （1）i）$K = A_e p_{10}\alpha/V_{10} + (p_{10} - p_0)\beta$；ii）$K = \dfrac{7}{5} A_e p_{10}\alpha/V_{10} + (p_{10} - p_0)\beta$。（2）连通后把 V_{10} 换成 $V_{10} + V_2$：等温 $K = A_e p_{10}\alpha/(V_{10} + V_2) + (p_{10} - p_0)\beta$，绝热 $K = \dfrac{7}{5} A_e p_{10}\alpha/(V_{10} + V_2) + (p_{10} - p_0)\beta$。

详解

(1) 平衡态与线性化设定 平衡时簧上负载的重力由气囊内气压与大气压之差承担，故有效承载面积 $A_e = F/(p - p_0)$ 在平衡点的取值为 $A_{e0} = F_0/(p_{10} - p_0)$（$F_0$ 为平衡承载）。设负载相对平衡位置向下位移 y，按题意 $V_1 = V_{10} - \alpha y$（$\alpha > 0$，下压时体积减小），$A_e = A_{e0} + \beta y$（$\beta > 0$）。竖直向上作用力 $F = (p - p_0)A_e$，故劲度系数 $K = \dfrac{dF}{dy} = A_{e0}\dfrac{dp}{dy} + (p_{10} - p_0)\dfrac{dA_e}{dy} = A_{e0}\dfrac{dp}{dy} + (p_{10} - p_0)\beta$。

(2) （1）i）等温过程 主气室 $pV_1 =$ 常量，$p = p_{10}V_{10}/(V_{10} - \alpha y)$，线性化得 $\dfrac{dp}{dy} = \dfrac{p_{10}\alpha}{V_{10}}$。代入得

$$K_{iso} = A_e \frac{p_{10}\alpha}{V_{10}} + (p_{10} - p_0)\beta.$$

其中 A_e 取平衡值；若用负载表示，$p_{10} - p_0 = F_0/A_e$，则第二项为 $F_0\beta/A_e$。

(3) （1）ii）绝热过程 绝热指数 $\gamma = C_p/C_V = (C_V + R)/C_V = \dfrac{7}{2}R/\dfrac{5}{2}R = \dfrac{7}{5}$。$pV_1^\gamma =$ 常量，得 $\dfrac{dp}{dy} = \gamma\dfrac{p_{10}\alpha}{V_{10}} = \dfrac{7}{5}\dfrac{p_{10}\alpha}{V_{10}}$，故

$$K_{ad} = \frac{7}{5} A_e \frac{p_{10}\alpha}{V_{10}} + (p_{10} - p_0)\beta.$$

绝热劲度比等温大，物理上是因为绝热压缩时温升使压强增大更多。

(4)　(2) 阀门打开（连通附加气室）　管道容积可忽略，两气室压强始终相等，参与压缩的气体总体积为 $V_{10}+V_2$。等温：$p(V_{10}+V_2)=$ 常量，$\dfrac{dp}{dy}=\dfrac{p_{10}\alpha}{V_{10}+V_2}$；绝热：$p(V_{10}+V_2)^{\gamma}=$ 常量，$\dfrac{dp}{dy}=\dfrac{7}{5}\dfrac{p_{10}\alpha}{V_{10}+V_2}$（默认附加气室内气体经历同样的等温/绝热过程）。于是

$$K'_{iso}=\frac{A_e p_{10}\alpha}{V_{10}+V_2}+(p_{10}-p_0)\beta,\qquad K'_{ad}=\frac{7A_e p_{10}\alpha}{5(V_{10}+V_2)}+(p_{10}-p_0)\beta.$$

(5) 数值与量纲回代核对　K 的量纲：$A_e p/V$ 为 N/m，$(p_{10}-p_0)\beta$ 中 β 为面积/长度即 m，Pa · m = N/m，两项量纲一致。连通附加气室后气体总容积增大，K 变小（弹簧变“软”），与空气弹簧工程实践中“打开刚度切换阀降低偏频”的做法一致。

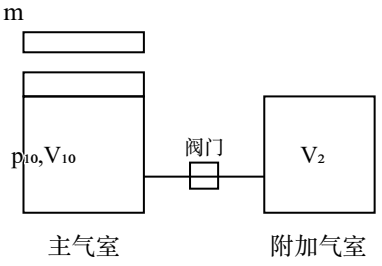

图1α 空气弹簧模型（主气室＋附加气室）

> 注意 β 项贡献 $(p_{10}-p_0)\beta$ 常被漏掉：承载面积本身随位移变化也会改变作用力。

2. 计算题 · 40分

> **答案**　（1）$t=P/(14\mu mg)$；纯滚动时球心速度 $v=15P/(14m)$。（2）B 点做摆线（旋轮线）运动：$\vec{r}_B=(vt-R\sin\frac{vt}{R})\hat{x}-R\cos\frac{vt}{R}\hat{y}$；$\vec{v}_B=v(1-\cos\frac{vt}{R})\hat{x}+v\sin\frac{vt}{R}\hat{y}$；$\vec{a}_B=\frac{v^2}{R}(\sin\frac{vt}{R}\hat{x}+\cos\frac{vt}{R}\hat{y})$，大小恒为 v^2/R，方向始终指向球心。

详解

(1) 击打后的初始状态　击打时间极短，母球获得水平冲量 P：$v_0=P/m$。冲量作用线在球心上方 $R/2$ 处，对球心的角冲量 $P\cdot R/2$ 使球获得绕水平轴的角速度（取使球上部向前、触点向后转的转向）：$\dfrac{PR}{2}=I\omega_0$，$I=\dfrac{2}{5}mR^2$，得 $\omega_0=\dfrac{5P}{4mR}$。此时触点对地速度 $v_0-\omega_0 R=\dfrac{P}{m}-\dfrac{5P}{4m}=-\dfrac{P}{4m}<0$，即触点相对桌面向后滑动，滑动摩擦力向前，大小 $f=\mu mg$（原卷摩擦因数符号在本站取材中缺失，按惯例记为 μ）。

(2)　(1) 达到纯滚动的时间与速度　摩擦力向前：$\dfrac{dv}{dt}=\mu g$；摩擦力对球心的力矩使角速度按相反转向减小：$I\dfrac{d\omega}{dt}=\mu mgR$，$\dfrac{d\omega}{dt}=\dfrac{5\mu g}{2R}$。纯滚动条件为触点速度为零：$v-\omega R=0$。代入 $v=v_0+\mu gt$、$\omega=\omega_0-\dfrac{5\mu g}{2R}t$：

$$\frac{P}{m}+\mu gt-\frac{5P}{4m}+\frac{5\mu g}{2}t=0\ \Rightarrow\ \frac{7}{2}\mu gt=\frac{P}{4m}\ \Rightarrow\ t=\frac{P}{14\mu mg}.$$

此时 $v=\dfrac{P}{m}+\mu g\dfrac{P}{14\mu mg}=\dfrac{15P}{14m}$，回代 $\omega R=\dfrac{5P}{4m}-\dfrac{5\mu g}{2R}\cdot\dfrac{P}{14\mu mg}=\dfrac{5P}{4m}-\dfrac{5P}{28m}=\dfrac{15P}{14m}=v$，核验通过。此后桌面无滑动趋势（水平面、无其他水平力），静摩擦力为零，母球以 $v=15P/(14m)$ 匀速纯滚动，保持原有的后旋（$\omega=v/R$，转向不变）。

(3) （2）*B* 点的位置、速度与加速度 以纯滚动时刻为计时零点，*B* 为该时刻的触点。纯滚动时球心以 $v = 15P/(14m)$ 匀速前进，球以 $\omega = v/R$ 匀角速转动，*B* 是球上一固定物质点。取球心初始位置为原点、前进方向为 $\hat{x}$、竖直向上为 $\hat{y}$，*B* 初始位于 $(0, -R)$。*B* 相对球心以角速度 ω 从最低点向前上方转：相对位矢 $(R\sin\frac{vt}{R}, -R\cos\frac{vt}{R})$，故

$$\vec{r}_B = (vt - R\sin\frac{vt}{R},\ -R\cos\frac{vt}{R}),$$

为标准摆线。对时间求导：

$$\vec{v}_B = (v(1-\cos\tfrac{vt}{R}),\ v\sin\tfrac{vt}{R}),$$

再求导：

$$\vec{a}_B = \frac{v^2}{R}(\sin\tfrac{vt}{R},\ \cos\tfrac{vt}{R}), \qquad |\vec{a}_B| = \frac{v^2}{R},$$

加速度始终指向球心（*B* 绕球心做匀速圆周运动）。核验：$t=0$ 时 $\vec{v}_B = 0$（触点瞬时静止，符合纯滚动），$\vec{a}_B = \frac{v^2}{R}\hat{y}$ 竖直向上，与摆线最低点加速度向上一致；$\vec{r}_B$ 的 x 分量 $vt - R\sin(vt/R) \geq 0$ 单调增，无倒退。

易错点：摩擦力方向由触点相对滑动方向决定（本题为触点后滑、摩擦向前）；纯滚动建立后滑动摩擦消失，不能用 μmg 继续算力矩。

3. 计算题 · 40分

答案　（1）$i(t)=a_1e^{t/\tau_1}+a_2e^{t/\tau_2}$，$1/\tau_{1,2}=\dfrac{-(R-R_0)\pm\sqrt{(R-R_0)^2-4L/C}}{2L}$，$a_1=\dfrac{a_0\tau_1\tau_2}{\tau_2-\tau_1}$，$a_2=-a_1$。（2）$R=R_0$ 时谐振：$i_H(t)=\dfrac{a_0}{\omega_H}\sin\omega_Ht$，$f_H=\dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$。（3）$0<R-R_0<2\sqrt{L/C}$ 时阻尼振荡：$i_D(t)=\dfrac{a_0}{\omega_D}e^{-\frac{R-R_0}{2L}t}\sin\omega_Dt$，$f_D=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{1}{LC}-\dfrac{(R-R_0)^2}{4L^2}}$。（4）$P_{max}=\dfrac{(V_{max}-V_{min})^2}{8R_0}$，$V_0=IR+\dfrac{V_{min}+V_{max}}{2}$。

详解

(1) 电路方程与通解（第(1)问）　交流通路中，R、L、C 与二极管交流部分串联；二极管工作在负阻区，其交流（微分）电阻为 $-R_0$，故回路总交流电阻为 $r=R-R_0$。设电容上电荷为 q，$i=dq/dt$，回路方程

$$L\ddot{q}+r\dot{q}+\frac{q}{C}=0,\qquad L\ddot{i}+r\dot{i}+\frac{i}{C}=0.$$

特征方程 $L\lambda^2+r\lambda+1/C=0$，

$$\lambda_{1,2}=\frac{-r\pm\sqrt{r^2-4L/C}}{2L}=\frac{1}{\tau_{1,2}}.$$

通解 $i(t)=a_1e^{t/\tau_1}+a_2e^{t/\tau_2}$。初始条件（按原卷：$t=0$ 时 $i(0)=0$，$\dot{i}(0)=a_0$）：$a_1+a_2=0$；$a_1(1/\tau_1-1/\tau_2)=a_0$，解得

$$a_1=\frac{a_0\tau_1\tau_2}{\tau_2-\tau_1},\qquad a_2=-a_1.$$

即 $i(t)=\dfrac{a_0\tau_1\tau_2}{\tau_2-\tau_1}(e^{t/\tau_1}-e^{t/\tau_2})$。

(2) （2）谐振条件与谐振电流　当正、负电阻恰好抵消，即 $r=R-R_0=0$（$R=R_0$）时，特征根为纯虚根 $\lambda=\pm i/\sqrt{LC}$，回路发生无衰减谐振。由 $i(0)=0$、$\dot{i}(0)=a_0$：

$$i_H(t)=\frac{a_0}{\omega_H}\sin(\omega_Ht),\qquad \omega_H=\frac{1}{\sqrt{LC}},\qquad f_H=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

回代：$i_H(0)=0$，$\dot{i}_H(0)=a_0$，满足初始条件。

(3) （3）RLC 阻尼振荡条件与电流　当 $0<r<2\sqrt{L/C}$（即 $R_0<R<R_0+2\sqrt{L/C}$）时特征根为共轭复根，回路做欠阻尼振荡：

$$i_D(t)=\frac{a_0}{\omega_D}e^{-\frac{r}{2L}t}\sin(\omega_Dt),\qquad \omega_D=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{r^2}{4L^2}},$$

$$f_D=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{(R-R_0)^2}{4L^2}}.$$

回代核验：$t=0$ 时 $i_D=0$，$\dot{i}_D=\dfrac{a_0}{\omega_D}\cdot\ \omega_D=a_0$（指数项导数在 $t=0$ 为零）✓。（$r\le 0$ 时振幅指数增长，对应负阻起振；$r\ge 2\sqrt{L/C}$ 为过阻尼，不振荡。）

(4) （4）最大平均功率与电源电压 设二极管直流偏置点电压为 V_D，交流电压振幅为 V_m。二极管须始终处于正常工作区间 $V_{min} \le V_D \pm V_m \le V_{max}$，故 $V_m \le \min(V_D - V_{min},\, V_{max} - V_D)$，该式在偏置点取窗口中点 $V_D = (V_{min} + V_{max})/2$ 时最大，此时

$$V_{m,\max} = \frac{V_{max} - V_{min}}{2}.$$

交流振幅 $I_m = V_m/R_0$（交流电压降在 $-R_0$ 上）。二极管上交流部分的平均功率（本站按线性负阻模型计算，实际由非线性限幅稳幅）：

$$P_{max} = \frac{1}{2} I_m^2 R_0 = \frac{V_{m,\max}^2}{2R_0} = \frac{(V_{max} - V_{min})^2}{8R_0}.$$

直流通路经扼流圈（直流电阻为零）与 R、L、C 构成回路：$V_0 = IR + V_D$，故取得 P_{max} 时

$$V_0 = IR + \frac{V_{min} + V_{max}}{2}$$

（谐振运用时 $R = R_0$，$V_0 = IR_0 + \dfrac{V_{min} + V_{max}}{2}$）。此式为本站按题面条件的建模结果，若与原卷标准表述不符以卷面为准。

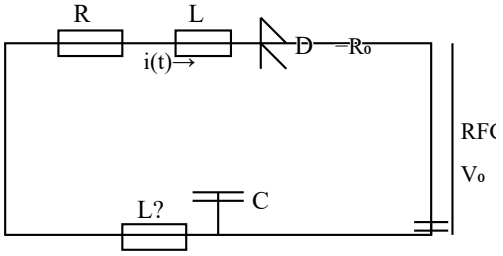

图3α 简化电路（左：R、L、C 与 D 串联；右：RFC 与直流源 V_0 ）

负阻 $-R_0$ 与普通电阻 R 串联后总交流电阻为 $R - R_0$：$R = R_0$ 是本电路维持等幅振荡的关键条件。

4. 计算题 · 40分

> **答案**　（1）$B_{min} \approx 3.3$ T。（2）阈动能 $K_{th} = 6m_pc^2 \approx 5.63$ GeV；Tevatron 的质子能量 1.00 TeV $\gg$ 5.63 GeV，可以产生反质子。

详解

(1) （1）所需最小磁感应强度 最大轨道周长 $L_{max} = 6436$ m，对应最大回旋半径

$$r = \frac{L_{max}}{2\pi} = \frac{6436}{2\pi} \approx 1024.3 \text{ m}.$$

磁场中圆周运动的成立条件 $p = qBr$ 在相对论情形仍成立。$E_{p,max} = 1.00 \times 10^6$ MeV $\gg m_pc^2$，故 $p \approx E/c$：

$$B = \frac{p}{qr} = \frac{E}{cqr} = \frac{1.00 \times 10^6 \times 1.602 \times 10^{-13} \text{ J}}{3.00 \times 10^8 \times 1.602 \times 10^{-19} \times 1024.3} = \frac{1.602 \times 10^{-7}}{4.92 \times 10^{-8}} \approx 3.3 \text{ T}.$$

能量最大时轨道最大，故这是所需磁场的最小值 $B_{min} \approx 3.3$ T。

(2) （2）产生反质子的阈动能与判断 反应 $p + p \to p + p + p + \bar{p}$。用不变量 $s = (p_1 + p_2)^2$：实验室系中靶质子静止，$s = m_p^2c^4 + m_p^2c^4 + 2m_pc^2E_{lab}$，其中 $E_{lab} = K + m_pc^2$ 为入射质子总能量，即 $s = 4m_p^2c^4 + 2m_pc^2K$。阈条件下末态四粒子在质心系中均静止：$s_{th} = (4m_pc)^2c^4\cdot\ = 16m_p^2c^4$。令二者相等：

$$4m_p^2c^4 + 2m_pc^2K_{th} = 16m_p^2c^4 \ \Rightarrow\ K_{th} = 6m_pc^2 = 6 \times 938.3 \text{ MeV} \approx 5630 \text{ MeV} = 5.63 \text{ GeV}.$$

Tevatron 可将质子加速到 1.00×10^6 MeV = 1.00 TeV $\gg$ 5.63 GeV，远超阈值，因此（1）中的 Tevatron 质子轰击静止靶质子完全可以产生反质子。

> 阈能计算务必用不变量 s，不能用“动能相加”：阈条件下质心系末态全部静止，$6m_pc^2$ 中只有 $2m_pc^2$ 变成新粒子的静能，其余进入质心运动的动能。

5. 计算题 · 40分

答案 （1）Σ 系经历 $\Delta t=\dfrac{3}{\sqrt{5}}T$；乙系经历 $\Delta t_{乙}=\dfrac{7}{2\sqrt{10}}T$；甲收到返回信号后再过 $\Delta t'=\dfrac{7}{3c}\sqrt{\dfrac{c^2T^2}{4}-d^2}-\dfrac{T}{2}$ 甲追上乙（要求 $d<\dfrac{\sqrt{13}}{14}cT$）。（2）甲系看货物发射速度大小 $\dfrac{\sqrt{2389}}{52}c\approx 0.94c$，与甲飞行方向（$-y$）成 $\arctan\dfrac{\sqrt{85}}{48}\approx 11^\circ$、偏向丙一侧；乙系看货物从发射到被丙接收历时 $\dfrac{11\sqrt{34}}{17}\dfrac{d}{c}\approx 3.77\dfrac{d}{c}$。

详解

(1) （1）**Σ 系与乙系经历的时间** 发光与收光都发生在甲上，甲钟读数 T 为本征时。$\gamma_{甲}=1/\sqrt{1-(2/3)^2}=3/\sqrt{5}$，由时间膨胀，Σ 系经历

$$\Delta t=\gamma_{甲}T=\frac{3T}{\sqrt{5}}\approx 1.34T.$$

向乙系（沿 $-y$ 以 $u=-c/3$ 运动）作洛伦兹变换：$\Delta t_{乙}=\gamma_{乙}(\Delta t-u\Delta y/c^2)$，其中 $\Delta y=-v_{甲}\Delta t=-(2c/3)\Delta t$，$\gamma_{乙}=1/\sqrt{1-(1/3)^2}=\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$，故

$$\Delta t_{乙}=\gamma_{乙}\Delta t\left(1-\frac{(-c/3)(-2c/3)}{c^2}\right)=\gamma_{乙}\cdot\ \frac{7}{9}\Delta t=\frac{7}{9}\cdot\ \frac{3}{2\sqrt{2}}\cdot\ \frac{3}{\sqrt{5}}T=\frac{7T}{2\sqrt{10}}\approx 1.11T.$$

(2) （1）**甲系看追上乙所需时间** 在甲系中甲静止于原点，乙在其平行线上以相对速度

$$u'=\frac{v_{乙}-v_{甲}}{1-v_{甲}v_{乙}/c^2}=\frac{-c/3+2c/3}{1-2/9}=\frac{3c}{7}$$

沿 $+y$ 运动（题设甲在后追赶乙，发射信号时乙位于甲后方，即 $y'<0$）。雷达关系：光往返路径在甲系中关于反射点对称，故反射发生在 $t'=T/2$，反射点到甲的距离为 $cT/2$。反射点在乙的飞行线上，横向距离为 d，故反射时乙的纵向坐标 $y'_r=-\sqrt{(cT/2)^2-d^2}$。接收信号时（$t'=T$）乙的纵坐标为 $y'(T)=y'_r+\dfrac{3c}{7}\cdot\ \dfrac{T}{2}$。“追上乙”即在 Σ 系中甲乙到达同一纵向位置，对应甲系中乙经过 $y'=0$，所需时间

$$\Delta t'=\frac{-y'(T)}{3c/7}=\frac{7}{3c}\sqrt{\frac{c^2T^2}{4}-d^2}-\frac{T}{2}.$$

可追上的条件为 $y'(T)<0$，即 $d<\dfrac{\sqrt{13}}{14}cT\approx 0.258cT$；本推导中发射时刻的纵向间距由“光信号能击中运动中的乙且往返历时 T”自洽确定，若原卷对发射几何另有规定，以卷面为准。

(3)　(2) 甲系看货物的发射速度 甲、丙相距最近时二者在同一 y 上、横向相距 d。丙沿 $+y$ 以 $2c/3$ 运动；货物在 Σ 系中速率 $3c/4$，要命中丙必须满足纵向分速度与丙相同：$v_y = \dfrac{2c}{3}$，则横向分速度

$$v_x = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2}\, c = \sqrt{\frac{81-64}{144}}\, c = \frac{\sqrt{17}}{12} c \approx 0.344c,$$

指向丙所在一侧（核验：$v_x^2 + v_y^2 = (17/64 + 4/9)c^2 = (17/64 + \ldots)$，$\frac{17}{144} + \frac{64}{144} = \frac{81}{144} = \left(\frac{3}{4}\right)^2$ ✓）。变换到甲系（$\gamma_{甲} = 3/\sqrt{5}$）：

$$v_x' = \frac{v_x}{\gamma_{甲}(1 - (-2/3)(2/3))} = \frac{\sqrt{17}c/12}{(3/\sqrt{5})(13/9)} = \frac{\sqrt{85}}{52} c \approx 0.177c,$$

$$v_y' = \frac{v_y - (-2c/3)}{1 + 4/9} = \frac{4c/3}{13/9} = \frac{12}{13} c \approx 0.923c.$$

合速度大小

$$v' = \sqrt{\frac{85}{52^2} + \frac{144}{169}}\, c = \frac{\sqrt{2389}}{52} c \approx 0.940c,$$

方向与甲飞行方向（$-y$）成 $\arctan \dfrac{\sqrt{85}}{48} \approx 10.9^\circ$、偏向丙一侧。

(4)　(2) 乙系看货物投递所用时间 Σ 系中货物横向以 v_x 走完间距 d 才遇上丙：

$$t_r = \frac{d}{v_x} = \frac{12d}{\sqrt{17}\, c},$$

此时货物与丙的 y 坐标相同（二者纵向速度同为 $2c/3$ ✓）。接收事件在 Σ 系中的坐标为 $(t_r,\ d,\ \frac{2c}{3} t_r)$。向乙系（$u = -c/3$）变换：

$$\Delta t_{乙} = \gamma_{乙}\left(t_r - \frac{u y}{c^2}\right) = \gamma_{乙}\, t_r\left(1 + \frac{2}{9}\right) = \frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{11}{9} \cdot \frac{12d}{\sqrt{17}c} = \frac{11\sqrt{34}}{17} \cdot \frac{d}{c} \approx 3.77 \frac{d}{c}.$$

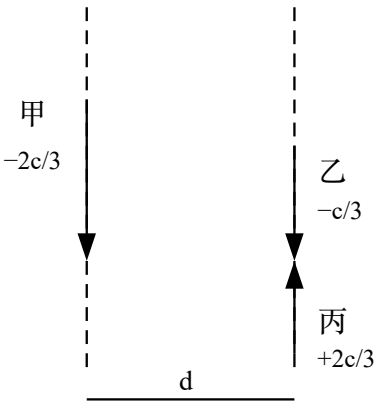

图5a 三艘飞行器的飞行线与速度方向

易错点：货物在 Σ 系中必须“纵向跟住丙”（$v_y = v_{丙}$）才能命中；第(1)问追上时段依赖发射时甲乙的纵向几何，本站按雷达对称关系自洽求解。

6. 计算题 · 40分

答案　（1）$n_0\sin i \le \sqrt{n_1^2-n_2^2}$。（2）$t_{CCW}=\dfrac{2\pi RNn_1}{c}+\dfrac{2\pi R^2N\Omega}{c^2}$，$t_{CW}=\dfrac{2\pi RNn_1}{c}-\dfrac{2\pi R^2N\Omega}{c^2}$；相位差 $\Delta\varphi=\dfrac{8\pi^2R^2N\Omega}{c\lambda_0}$，与 n_1 无关。（3）$\Omega=\dfrac{n\lambda_0\Delta f}{2R}$。

详解

(1)　（1）光在光纤内传输的入射角条件　光在纤芯（折射率 n_1）与外包层（n_2）界面上必须发生全反射。设端口外介质折射率为 n_0，入射角 i（对光纤轴线），折射角 r 满足 $n_0\sin i=n_1\sin r$。芯内光线与界面法线的夹角为 $90^\circ-r$，全反射条件为

$$\sin(90^\circ-r)\ge\sin\theta_c=\frac{n_2}{n_1}\ \Rightarrow\ \cos r\ge\frac{n_2}{n_1}.$$

由 $\cos r=\sqrt{1-\sin^2 r}$ 得 $\sin r\le\sqrt{1-n_2^2/n_1^2}$，故

$$n_0\sin i=n_1\sin r\le\sqrt{n_1^2-n_2^2},$$

即 $i\le\arcsin\dfrac{\sqrt{n_1^2-n_2^2}}{n_0}$（数值孔径 $\mathrm{NA}=\sqrt{n_1^2-n_2^2}$）。

(2)　（2）两束光的传播时间与相位差　设光纤环路逆时针（CCW）旋转，N 匝周长 $L=2\pi RN$，介质中光速 c/n_1，纤壁线速度 $v=\Omega R$。实验室系中沿旋转方向传播的光速由相对论速度合成给出 $u_{CCW}=\dfrac{c/n_1+v}{1+v/(n_1c)}$，逆旋转方向 $u_{CW}=\dfrac{c/n_1-v}{1-v/(n_1c)}$。光回到分束器需在实验室系中多走（或少走）一段随环移动的弧长：$u_{CCW}t=L+vt$、$u_{CW}t=L-vt$。利用 $u_{CCW}-v=\dfrac{(c/n_1)(1-v^2/c^2)}{1+v/(n_1c)}$ 等式化简（保留 v/c 一阶项）：

$$t_{CCW}=\frac{n_1L}{c}\left(1+\frac{v}{n_1c}\right)=\frac{2\pi RNn_1}{c}+\frac{2\pi R^2N\Omega}{c^2},$$

$$t_{CW}=\frac{n_1L}{c}\left(1-\frac{v}{n_1c}\right)=\frac{2\pi RNn_1}{c}-\frac{2\pi R^2N\Omega}{c^2}.$$

时间差 $\Delta t=t_{CCW}-t_{CW}=\dfrac{4\pi R^2N\Omega}{c^2}=\dfrac{4NA\Omega}{c^2}$（$A=\pi R^2$），与折射率无关——介质引致的费索拖曳项与路径项恰好相消。相位差

$$\Delta\varphi=\frac{2\pi c}{\lambda_0}\Delta t=\frac{8\pi^2R^2N\Omega}{c\lambda_0}=\frac{8\pi NA\Omega}{c\lambda_0},$$

与 n_1 无关（这正是光纤陀螺可用低损耗高折射率光纤的原因）。

(3) （3）谐振式陀螺的角速度与频差关系 环形腔静止时共振条件为光程等于 m 个真空波长：$2\pi Rn = m\lambda_0$。旋转时（由⑵取 $N=1$）双向传播一周的时间为 $t_{CCW} = \dfrac{2\pi Rn}{c} + \dfrac{2\pi R^2\Omega}{c^2}$、$t_{CW} = \dfrac{2\pi Rn}{c} - \dfrac{2\pi R^2\Omega}{c^2}$。第 m 级共振要求行波一周相位为 $2\pi m$，即 $f\cdot\ \ t = m$，故

$$f_{CCW} = \frac{m}{t_{CCW}},\quad f_{CW} = \frac{m}{t_{CW}},$$

$$\Delta f = f_{CW} - f_{CCW} \approx m\frac{t_{CCW} - t_{CW}}{t_0^2} = \frac{2\pi Rn}{\lambda_0}\cdot\ \ \frac{4\pi R^2\Omega/c^2}{(2\pi Rn/c)^2} = \frac{2R\Omega}{n\lambda_0}.$$

反解得

$$\Omega = \frac{n\lambda_0\Delta f}{2R}.$$

（$n=1$ 时退化为环形激光陀螺公式 $\Delta f = \dfrac{4A\Omega}{\lambda_0 P}$，$P = 2\pi R$，核验一致。）

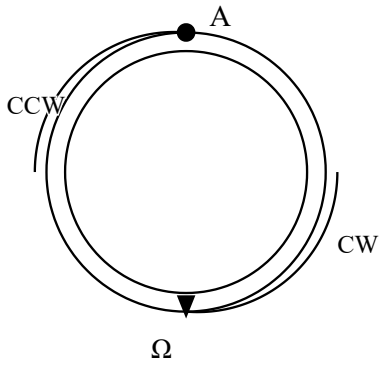

图6a 旋转光纤环与双向传播的两束光

Sagnac 时间差与介质折射率无关（拖曳相消），但谐振腔频差公式中含 n（因为共振条件由光程决定）——两者不要混淆。

7. 计算题 · 40分

答案 （1）$P=\alpha\dfrac{G\omega^6 I^2}{c^5}$。（2）$t=\dfrac{c^5[L_0^4-(L_0^{5/2}-\dfrac{10\pi\alpha G^{5/2}mM\sqrt{M+m}}{c^5})^{8/5}]}{8\alpha G^3 mM(M+m)}$。（3）转角 $\Delta\theta=\dfrac{c^5L_0^{5/2}(1-2^{-5/2})}{5\alpha G^{5/2}mM\sqrt{M+m}}\,\text{rad}=\dfrac{180}{\pi}\cdot\dfrac{c^5L_0^{5/2}(1-2^{-5/2})}{5\alpha G^{5/2}mM\sqrt{M+m}}$ 度。

详解

(1) （1）**量纲分析导出辐射功率** 选取描述转动的三个量：转动惯量 I（$[I]=\mathrm{ML}^2$）、角速度 ω（T^{-1}）、波的传播速度 c（LT^{-1}），与 G（$\mathrm{L}^3\mathrm{M}^{-1}\mathrm{T}^{-2}$）一起设

$$P=\alpha\,G^aI^b\omega^e c^f.$$

量纲方程：质量 $-a+b=1$；长度 $3a+2b+f=2$；时间 $-2a-e-f=-3$。引力辐射必含 G，取 $a=1$，解得 $b=2$，$f=-5$，$e=6$，故

$$P=\alpha\frac{G\omega^6I^2}{c^5}.$$

（与四极辐射公式一致：代入 $\omega^2=G(M+m)/L^3$、$I=\dfrac{mM}{M+m}L^2$ 得 $P=\dfrac{\alpha G^4m^2M^2(M+m)}{c^5L^5}$，量纲 $\mathrm{ML}^2\mathrm{T}^{-3}$ ✓。）

(2) （2）**绕质心旋转 360° 所需时间** 圆轨道总机械能 $E=-\dfrac{GmM}{2L}$（L 为间距），轨道角速度 $\omega=\sqrt{\dfrac{G(M+m)}{L^3}}$，系统对质心的转动惯量 $I=\dfrac{mM}{M+m}L^2$。机械能损失率等于辐射功率：

$$\frac{dE}{dt}=\frac{GmM}{2L^2}\frac{dL}{dt}=-P=-\alpha\frac{G\omega^6I^2}{c^5}=-\alpha\frac{G^4m^2M^2(M+m)}{c^5L^5},$$

解得

$$\frac{dL}{dt}=-\frac{2\alpha G^3mM(M+m)}{c^5L^3}\;\Rightarrow\;L^3\,dL=-\frac{2\alpha G^3mM(M+m)}{c^5}dt.$$

积分：$L^4=L_0^4-\dfrac{8\alpha G^3mM(M+m)}{c^5}t$。转角：$d\theta=\omega\,dt=-\dfrac{c^5L^{3/2}\,dL}{2\alpha G^{5/2}mM\sqrt{M+m}}$，从 L_0 积到 L：

$$\Delta\theta(L)=\frac{c^5(L_0^{5/2}-L^{5/2})}{5\alpha G^{5/2}mM\sqrt{M+m}}.$$

转 360°（$\Delta\theta=2\pi$）对应 $L^{5/2}=L_0^{5/2}-\dfrac{10\pi\alpha G^{5/2}mM\sqrt{M+m}}{c^5}$，代回 $L^4=(L^{5/2})^{8/5}$ 得

$$t_{360^\circ}=\frac{c^5[L_0^4-(L_0^{5/2}-\frac{10\pi\alpha G^{5/2}mM\sqrt{M+m}}{c^5})^{8/5}]}{8\alpha G^3mM(M+m)}.$$

(3) （3）间距减半时已转过的角度 直接把 $L=L_0/2$ 代入转角公式：

$$\Delta\theta=\frac{c^5(L_0^{5/2}-(L_0/2)^{5/2})}{5\alpha G^{5/2}mM\sqrt{M+m}}=\frac{c^5L_0^{5/2}(1-2^{-5/2})}{5\alpha G^{5/2}mM\sqrt{M+m}}\ \text{rad},$$

即约 $0.824\dfrac{c^5L_0^{5/2}}{5\alpha G^{5/2}mM\sqrt{M+m}}$ 弧度，化为度数乘 $180/\pi$。可见并合前期（L 大）转角积累慢，后期急剧加快——这正是 LIGO 听到的“啁啾”。

> 量纲分析中 c 必须入选（引力波以光速传播），否则无法配平时间量纲；I 取对质心的转动惯量 $\frac{mM}{M+m}L^2$ 而非 μL^2 以外的写法时要与 ω 配套。

8. 计算题 · 40分

> **答案** （1）相对相位差 $\delta=\dfrac{2\pi n_o^3\gamma l}{\lambda_0}\cdot\dfrac{V}{d}$，检偏器输出 $I_2=I_0\sin^2\dfrac{\delta}{2}$；$V_\pi=\dfrac{\lambda_0 d}{2n_o^3\gamma l}$。（2）无波片：$T\approx(\dfrac{\pi V_m}{2V_\pi})^2\sin^2\omega_m t$（非线性失真）；经 1/4 波片：$T=\dfrac{1}{2}[1+\sin\dfrac{\pi V}{V_\pi}]\approx\dfrac{1}{2}+\dfrac{\pi V}{2V_\pi}$，线性无失真，波片起“光学偏置”作用。（3）开关断开时 $\left|V_c/V\right|\approx\dfrac{1}{\omega_m R_m C}\ll 1$。（4）谐振时槽路阻抗 $\approx R_L$，$R_L\gg R_m$（且 $R\gg R_m$）则 $V_c\approx V$。

详解

(1) （1）通过晶体后的相位变化与光强变化、半波电压 光沿 x_3 通过长 l 的晶体，沿快、慢轴的折射率 $n_{x'}=n_o-\dfrac{1}{2}n_o^3\gamma E$、$n_{x''}=n_o+\dfrac{1}{2}n_o^3\gamma E$（$E=V/d$）。两本征模的相位分别为 $\varphi_{1,2}=\dfrac{2\pi l n_{x',x''}}{\lambda_0}$，相对相位差

$$\delta=\varphi_2-\varphi_1=\frac{2\pi l n_o^3\gamma E}{\lambda_0}=\frac{2\pi n_o^3\gamma l}{\lambda_0 d}V.$$

入射光经 P_1（沿 x_1，与 x'、x'' 各成 45°）后振幅分解为两等幅正交分量；出射后在检偏器 P_2（与 P_1 垂直，沿 x_2）上投影相干叠加：$E_2=\dfrac{E_0}{2}[\cos(\omega t-\varphi_1)-\cos(\omega t-\varphi_2)]=E_0\sin\dfrac{\delta}{2}\sin(\omega t-\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2})$，故

$$I_2=I_0\sin^2\frac{\delta}{2}=I_0\sin^2(\frac{\pi n_o^3\gamma l V}{\lambda_0 d}).$$

当 $\delta=\pi$ 时 $I_2=I_0$，全透射，晶体等效于使偏振面旋转 90° 的半波片；此时 $\dfrac{2\pi n_o^3\gamma l V_\pi}{\lambda_0 d}=\pi$，得

$$V_\pi=\frac{\lambda_0 d}{2n_o^3\gamma l}.$$

(2) （2）调制透过率与 1/4 波片的作用 不加波片、$V = V_m \sin \omega_m t$（$V_m \ll V_\pi$）时

$$T = \frac{I_2}{I_0} = \sin^2 \frac{\pi V}{2V_\pi} \approx \left(\frac{\pi V_m}{2V_\pi}\right)^2 \sin^2 \omega_m t,$$

透过率与电压是平方关系：输出含 $2\omega_m$ 分量且无线性项，信号严重失真。插入光轴与 x'、x'' 成 45° 的 1/4 波片后，两本征模间附加固定相位差 $\pi/2$：

$$T = \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi V}{2V_\pi}\right) = \frac{1}{2}\left[1 + \sin \frac{\pi V}{V_\pi}\right] \xrightarrow{V_m \ll V_\pi} \frac{1}{2} + \frac{\pi V}{2V_\pi}.$$

透过率与调制电压成线性关系，电信号无失真地转移到光信号上；1/4 波片的作用是提供 $\pi/2$ 的光学偏置，把工作点移到透过率曲线线性段的中心（$T = 1/2$ 处，该点斜率最大）。

(3) （3）开关断开时调制效率极低的证明 晶体等效为 $R \parallel C$，与电源内阻 R_m 分压。容抗支路阻抗 $Z = R/(1 + i\omega RC)$，传递函数

$$\frac{V_c}{V} = \frac{Z}{R_m + Z} = \frac{R}{R + R_m} \cdot \frac{1}{1 + i\omega C \frac{RR_m}{R + R_m}},$$

$$\left|\frac{V_c}{V}\right| = \frac{R}{R + R_m} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 \left(\frac{RR_m}{R + R_m}\right)^2}}.$$

当 $R_m \gg R$ 时 $\dfrac{R}{R + R_m} \approx \dfrac{R}{R_m}$、$\dfrac{RR_m}{R + R_m} \approx R$，故

$$\left|\frac{V_c}{V}\right| \approx \frac{R}{R_m} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_m R_m C)^2}}.$$

当 $\omega_m R_m C \gg 1$（晶体电容小、调制频率高、电源内阻大）时 $\left|V_c/V\right| \approx \dfrac{1}{\omega_m R_m C} \ll 1$，即实际加载到晶体上的电压 $V_c \ll V$，调制效率极低。证毕。

(4) （4）并联谐振回路提高调制效率的证明 合上开关后，电感 L 与负载 R_L 并联后再与晶体（$R \parallel C$）并联。在谐振频率 $\omega = 1/\sqrt{LC}$ 处，电感支路与晶体电容支路的导纳相消：$\dfrac{1}{i\omega L} + i\omega C = 0$，即晶体电容被谐振槽路“吸收”。此时晶体两端的总导纳 $Y = \dfrac{1}{R_L} + \dfrac{1}{R}$（近似取谐振时槽路损耗可忽略），分压为

$$\frac{V_c}{V} = \frac{\frac{1}{R_L} + \frac{1}{R}}{\frac{1}{R_m} + \frac{1}{R_L} + \frac{1}{R}}.$$

只要 $R_L \gg R_m$ 且 $R \gg R_m$，则 $V_c \approx V \cdot \dfrac{R_L}{R_m + R_L} \approx V$：谐振回路在载频处呈现高阻抗，把原本被 R_m 分掉的大部分电压加到晶体上。条件是调制信号带宽落在谐振峰宽度 $\Delta\omega \approx \dfrac{\omega}{Q}$ 之内。证毕（本问按题给等效电路与本站建模推证，若与原卷评分口径不同以卷面为准）。

1/4 波片偏置与电子学中的“加直流偏置到线性区”完全同构；V_π 表达式中 d 在分子（板间距越小电场越强），l 在分母（晶体越长相位差越大）。