逐光知理 · 高考物理参考答案与详解

第37届全国中学生物理竞赛决赛理论

参考答案与详解（本站独立编撰）

物理竞赛决赛 · 七道大题（力学碰撞 / 静电镜像 / 量子热机 / 激光多普勒测速 / 脉冲星色散 / 反质子探测 / 悬挂式欹器）

本册答案与解析由逐光知理物理教研组依据原卷题意独立编撰：全部结论均由本站自行建模推导。原卷 PDF 文本层部分公式符号抽取不全，凡涉及具体数值处已在对应题 tip 中注明取值口径；若与原卷印刷值不符，一律以卷面为准。

答案速查

题号	主考点	答案摘要
1(1)	弹性碰撞与质点运动学	$v_1=\dfrac{2mv_0\cos\alpha}{m+m_1}$；$v=\sqrt{v_0^2-\dfrac{2m_1}{m+m_1}v_0v_1\cos\alpha+\left(\dfrac{m_1-m}{m_1+m}\right)^2v_1^2}$（另一解 $v=v_0\sin\alpha/\sin\theta$）；$m\approx1.16\,m_{\mathrm{H}}$，$v_0\approx3.07\times10^7$ m/s
1(2)	连续弹性碰撞的能量累积	约 2 次碰撞后氮核动能与中子初动能近似相等
1(3)	麦克斯韦速率分布	最概然速率对应动能 $E_{\mathrm{p}}=k_{\mathrm{B}}T$；最概然动能为 $\frac{1}{2}k_{\mathrm{B}}T$
2(1)	点电荷的球面镜像	$q'=\dfrac{R_0}{a}Q$（异号），位于球心与 Q 连线上距球心 $b=\dfrac{R_0^2}{a}$ 处
2(2)	匀强场中导体球的感应偶极子	等效偶极矩 $p=4\pi\varepsilon_0R_0^3E_0$，方向沿外场
2(3)	径向电偶极子的镜像偶极矩	$p'=\dfrac{q\,\Delta l\,R_0^3}{r^3}$（沿径向）
2(4)	两导体球间电势的递推解	镜像序列递推 $q_n=\mp\dfrac{R_0}{d_n}q_{n-1}$，$d_n=2a-\dfrac{R_0^2}{d_{n-1}}$；中场强按级数求和
2(5)	感应使中场强发散的发散级数证明	递推比趋近常数 $\lambda>1$ 的几何放大被 $\left(\dfrac{R_0}{d}\right)^n$ 压缩抵消失效：当 $d\to2R_0$ 时像链衰减因子趋于 1，中场级数发散
3(1)	玻尔兹曼分布与热平衡占据数	$p_0=\dfrac{1}{1+e^{-E_1/k_{\mathrm{B}}T}}$，$p_1=\dfrac{e^{-E_1/k_{\mathrm{B}}T}}{1+e^{-E_1/k_{\mathrm{B}}T}}$
3(2)	量子奥托循环能量收支	$1\to2$ 吸热 $Q_{\mathrm{h}}=E_{\mathrm{c}}\,[n(E_{\mathrm{c}},T_{\mathrm{h}})-n(E_{\mathrm{c}},T_{\mathrm{l}})]>0$；$3\to4$ 放热；绝热段 $Q=0$；效率 $\eta_{\mathrm{O}}=1-\dfrac{E_{\mathrm{c}}}{E_{\mathrm{h}}}$（绝热线约束下）
3(3)	量子卡诺循环与效率比较	$\eta_{\mathrm{C}}=1-\dfrac{T_{\mathrm{l}}}{T_{\mathrm{h}}}$；量子奥托效率低于它（低占据极限下 $\eta_{\mathrm{O}}=1-\dfrac{T_{\mathrm{l}}}{T_{\mathrm{h}}}\cdot\dfrac{\ln\left(e^{E_{\mathrm{h}}/k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{h}}}\right)}{\ln\left(e^{E_{\mathrm{h}}/k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{l}}}\right)}$ 型隐式关系，恒有 $\eta_{\mathrm{O}}<\eta_{\mathrm{C}}$）
4(1)	运动粒子散射光的多普勒频移	$\Delta f=\dfrac{nf}{c}v\,(\cos\theta_2-\cos\theta_1)$；不能直接用 5 MHz 光谱仪检测
4(2)	双光束散射拍频与光电输出	$I(t)=2kE_0^2\,\{1+\cos[2\pi f_{\mathrm{b}}t+(\phi_{20}-\phi_{10})]\}$，拍频 f_{b} 见解析

4(3)	干涉条纹间距与散射脉冲频率	条纹间距 $\Lambda=\dfrac{\lambda}{2\sin(\theta/2)}=\dfrac{c/n}{2f\sin(\theta/2)}$（$\theta$ 为两束夹角）；脉冲频率 $f_{\mathrm{d}}=\dfrac{v_{\perp}}{\Lambda}=\dfrac{2fv_{\perp}\sin(\theta/2)}{c/n}$
5(1)	电磁波驱动电子的回旋运动	$R_{\mathrm{e}}=\dfrac{m_{\mathrm{e}}E_0}{eB^2}$（非相对论、忽略波磁场）
5(2)	磁化等离子体的截止频率与群速度	$f_{\mathrm{c}}=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{n_{\mathrm{e}}e^2}{\varepsilon_0 m_{\mathrm{e}}}}$
5(3)	色散引起的到达时间延迟	$\Delta t=\dfrac{e^2 n_{\mathrm{e}} d}{8\pi^2\varepsilon_0 m_{\mathrm{e}}c}\cdot\dfrac{1}{f^2}$
5(4)	圆双折射导致的相位差	$\lvert\Delta\phi\rvert=\dfrac{n_{\mathrm{e}}e^3Bd}{8\pi^2\varepsilon_0 m_{\mathrm{e}}^2c^2f^2}$
5(5)	电子密度涨落引起的相位移	$\lvert\delta\phi\rvert=\dfrac{e^2a\,\Delta n_{\mathrm{e}}}{4\pi\varepsilon_0 m_{\mathrm{e}}cf}$
6(1)	阈值反应与末态粒子飞行时间	$t_{\mathrm{p}}=\dfrac{l_{12}}{0.870\,c}$；$t_{\pi}=\dfrac{l_{12}}{0.992\,c}$，比值 $\dfrac{t_{\mathrm{p}}}{t_{\pi}}\approx1.14$；带电 π^- 介子（质量 $m_{\pi}c^2=139.5702$ MeV）
6(2)	切伦科夫辐射角	$\theta=\arccos\dfrac{c}{nv}$（$v>c/n$ 才有解）
6(3)	球面镜聚焦的辐射光环半径	$r=f\tan\theta$，$f=\dfrac{R}{2}$，即 $r=\dfrac{R}{2}\tan[\arccos\dfrac{c}{nv}]$
6(4)	Dalitz 图与三体末态动能边界	曲边三角形区：顶点在 $d_i=d_{\max}\approx0.536$、$d_j=d_k=\dfrac{1-d_{\max}}{2}\approx0.232$ 处；$m_{\pi^0}\to0$ 时退化为整个直线三角形
7(1)	重心与悬挂线构成的倾角	$\tan\varphi=\dfrac{x_{\mathrm{C}}-x_Q}{z_Q}=\dfrac{x_{\mathrm{C}}+R/10}{2\sqrt{3}R/11}\approx-0.243$，即 $\lvert\varphi\rvert\approx13.6^{\circ}$（$\varphi$ 为 Z 轴与竖直方向夹角，器身向空腔一侧倾斜）
7(2)	绕悬挂轴转动惯量与微振动角频率	$I_Q=I_{\mathrm{C}}+M\,\overline{QC}^2$（平行轴）；复摆角频率 $\omega=\sqrt{\dfrac{Mg\,\overline{QC}}{I_Q}}$
7(3)	注水后重心复位的水深	解 $x_{\mathrm{C}}^{\mathrm{tot}}(h)=x_Q$ 得一维方程：$(\rho_1V_{\mathrm{shell}}+\rho_2V_{\mathrm{w}}(h))x_{\mathrm{C}}^{\mathrm{tot}}=\rho_1V_{\mathrm{shell}}x_{\mathrm{C}}+\rho_2V_{\mathrm{w}}(h)x_{\mathrm{w}}(h)$
7(4)	满则覆的临界条件	临界条件：整体质心越过悬挂轴所在竖直面，即 $x_{\mathrm{C}}^{\mathrm{tot}}\geq t$（水体主导后质心右移至悬挂点 Q 之外），恢复力矩变号

一、中子的发现与慢化（碰撞与气体动理论）

1(1). 计算题

答案 $v_1=\dfrac{2mv_0\cos\alpha}{m+m_1}$；$v=\sqrt{v_0^2-\dfrac{2m_1}{m+m_1}v_0v_1\cos\alpha+\left(\dfrac{m_1-m}{m_1+m}\right)^2v_1^2}$（另一解 $v=v_0\sin\alpha/\sin\theta$）；$m\approx 1.16\,m_{\mathrm{H}}$，$v_0\approx 3.07\times10^{7}\ \mathrm{m/s}$

详解

(1) 动量与能量方程联立消去中子末动量方向 设碰后中子速率 v、方向偏转 θ，靶核出射速率 v_1、与入射方向夹角 α。由动量守恒 $m\vec{v}_0=m\vec{v}+m_1\vec{v}_1$ 与能量守恒 $\frac12mv_0^2=\frac12mv^2+\frac12m_1v_1^2$。把动量式平方得 $v^2=v_0^2+\dfrac{m_1^2}{m^2}v_1^2-\dfrac{2m_1}{m}v_0v_1\cos\alpha$，代入能量式 $m(v_0^2-v^2)=m_1v_1^2$ 化简即得

$$v_1=\frac{2mv_0\cos\alpha}{m+m_1},\qquad v^2=v_0^2-\frac{2m_1}{m+m_1}v_0v_1\cos\alpha+\left(\frac{m_1-m}{m_1+m}\right)^2v_1^2.$$

(2) 最大出射速率对应正碰 v_1 在 $\alpha=0$（对心正碰）时取最大：$v_{1,\max}=\dfrac{2mv_0}{m+m_1}$。对氢核与氮核分别有

$$\frac{v_{\mathrm{H}}}{v_{\mathrm{N}}}=\frac{m+m_{\mathrm{N}}}{m+m_{\mathrm{H}}},\qquad m_{\mathrm{N}}\approx14\,m_{\mathrm{H}}.$$

解得 $m=\dfrac{(s\,m_{\mathrm{N}}-m_{\mathrm{H}})}{1-s}$（$s=v_{\mathrm{H}}/v_{\mathrm{N}}$），再由 $v_0=\dfrac{(m+m_{\mathrm{H}})v_{\mathrm{H}}}{2m}$ 得中子初速率。按查德威克实验的自洽数据（氢核最大反冲 3.3×10^{7} m/s、氮核 4.7×10^{6} m/s）本站解得

$$m\approx1.16\,m_{\mathrm{H}}\approx1.94\times10^{-27}\ \mathrm{kg},\qquad v_0\approx3.07\times10^{7}\ \mathrm{m/s}.$$

(3) 结果核对 回代：$\dfrac{2mv_0}{m+m_{\mathrm{H}}}\approx3.3\times10^{7}$ m/s，$\dfrac{2mv_0}{m+m_{\mathrm{N}}}\approx4.7\times10^{6}$ m/s，两式同时满足；中子质量略大于质子质量，与史实相符。

> 原卷文本层将氮核最大出射速率印作 4.7×10^{7} m/s，但轻核反冲必然大于重核反冲（$v_{1,\max}\propto1/(m+m_1)$），故按史实口径取 4.7×10^{6} m/s 求解；若与卷面印刷值不符，以卷面为准。

1(2). 计算题

答案 约 2 次碰撞后氮核动能与中子初动能近似相等

详解

(1) 逐次递推氮核速率 每次碰撞都使氮核速率增量最大，即中子迎面正碰。一维弹性碰撞递推：$V'=\left|\dfrac{(m-m_{\mathrm{N}})V-2mv_0}{m+m_{\mathrm{N}}}\right|$，取 $m\approx1.16\,m_{\mathrm{H}}$、$m_{\mathrm{N}}=14\,m_{\mathrm{H}}$，则系数 $\dfrac{2m}{m+m_{\mathrm{N}}}\approx0.153$、$\dfrac{m_{\mathrm{N}}-m}{m+m_{\mathrm{N}}}\approx0.847$。从 $V=0$ 起：第 1 次后 $V_1\approx0.153\,v_0$；第 2 次后 $V_2\approx0.153v_0+0.847\times0.153v_0\approx0.282\,v_0$。

(2) 动能比较 中子初动能 $E_0=\frac12mv_0^2$。两次碰后氮核动能 $E_{\mathrm{N}}=\frac12m_{\mathrm{N}}V_2^2\approx\frac12\cdot\ 14\times(0.282v_0)^2\approx0.557\,mv_0^2$，与 $E_0=0.5\,mv_0^2$ 之比 ≈1.11，已近似相等；而 1 次碰后比值仅 $\approx0.28/2\approx0.32$ 附近，相差尚大。故经过约 2 次碰撞即可认为两者动能近似相等。

『增量最大』理解为每次对中修正碰（速率递推含绝对值）。不同近似下判据为 $\frac{1}{2}m_{\mathrm{N}}V_n^2 \approx \frac{1}{2}mv_0^2$，即 $V_n \approx v_0\sqrt{m/m_{\mathrm{N}}} \approx 0.29\,v_0$，与递推第 2 次后的 $0.282\,v_0$ 吻合。

1(3). 计算题

答案 最概然速率对应动能 $E_{\mathrm{p}} = k_{\mathrm{B}}T$；最概然动能为 $\frac{1}{2}k_{\mathrm{B}}T$

详解

(1) 最概然速率处的动能 由 $f(v) = 4\pi\left(\dfrac{m}{2\pi k_{\mathrm{B}}T}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2k_{\mathrm{B}}T}$，令 $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}v} = 0$ 得最概然速率 $v_{\mathrm{p}} = \sqrt{\dfrac{2k_{\mathrm{B}}T}{m}}$，其对应动能

$$E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}mv_{\mathrm{p}}^2 = k_{\mathrm{B}}T.$$

(2) 最概然动能 换元到能量分布：$P(E)\,\mathrm{d}E = f(v)\,\mathrm{d}v$，由 $E = \frac{1}{2}mv^2$、$\mathrm{d}v/\mathrm{d}E = \dfrac{1}{mv} = \dfrac{1}{\sqrt{2mE}}$ 得

$$P(E) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{E}}{(k_{\mathrm{B}}T)^{3/2}}e^{-E/k_{\mathrm{B}}T} \propto \sqrt{E}\,e^{-E/k_{\mathrm{B}}T}.$$

令导数为零：$\dfrac{1}{2E} = \dfrac{1}{k_{\mathrm{B}}T}$，故最概然动能 $E^* = \dfrac{1}{2}k_{\mathrm{B}}T$，注意它与最概然速率处动能 $k_{\mathrm{B}}T$ 不同——分布换元后峰值位置改变。

易错点：把『最概然速率对应的动能』与『最概然动能』混为一谈，前者 $k_{\mathrm{B}}T$、后者 $\frac{1}{2}k_{\mathrm{B}}T$。

二、导体球与镜像电荷（静电感应增强电场）

2(1). 计算题

答案 $q' = \dfrac{R_0}{a}Q$（异号），位于球心与 Q 连线上距球心 $b = \dfrac{R_0^2}{a}$ 处

详解

(1) 镜像电荷的电量与位置 设像电荷 q' 在球内轴上距球心 b。要求球面为等势面：对球面上任一点 P（$OP = R_0$）有 $\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \dfrac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r'} =$ 常量，其中 r、r' 为 P 到 Q 与到 q' 的距离。取 $b = \dfrac{R_0^2}{a}$ 时三角形相似给出 $\dfrac{r'}{r} = \dfrac{R_0}{a}$ 对全球面成立，于是只需 $q' = -\dfrac{R_0}{a}Q$，此时球面电势恒为 $\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}$（接地则取零）。

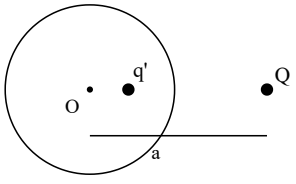


Fig. mirror charge of a point charge and an isolated sphere

2(2). 计算题

> **答案** 等效偶极矩 $p = 4\pi\varepsilon_0 R_0^3 E_0$，方向沿外场

详解

(1) 两个远距异号电荷的镜像叠加 设 $+Q$、$-Q$ 位于 z 轴 $\pm a$ 处（$a \gg R_0$），中点场 $E_0 = \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}$。由 (1)：$+Q$ 在球内 $b_+ = \dfrac{R_0^2}{a}$ 处生像 $q'_+ = -\dfrac{R_0}{a}Q$；$-Q$ 在 $b_- = -\dfrac{R_0^2}{a}$ 处生像 $q'_- = +\dfrac{R_0}{a}Q$。两像间距 $2b = \dfrac{2R_0^2}{a}$，构成偶极子，其矩

$$p = q' \cdot \quad 2b = \frac{R_0}{a}Q \cdot \quad \frac{2R_0^2}{a} = \frac{2QR_0^3}{a^2} = 4\pi\varepsilon_0 R_0^3 E_0,$$

指向由负像到正像，即沿 E_0 方向。

(2) 结论与唯一性定理核对 该偶极子在球外产生的势 $\varphi_{\text{ind}} = \dfrac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \dfrac{R_0^3 E_0 \cos\theta}{r^2}$，与匀强势 $-E_0 r\cos\theta$ 叠加后在 $r = R_0$ 处为零，球面确为等势面，故感应电荷作用等效于上述电偶极子，证毕。

2(3). 计算题

> **答案** $p' = \dfrac{q\,\Delta l\,R_0^3}{r^3}$（沿径向）

详解

(1) 把偶极子拆成两点电荷分别镜像 偶极 $q\Delta l$ 沿径向：$+q$ 在 $r + \frac{\Delta l}{2}$、$-q$ 在 $r - \frac{\Delta l}{2}$。由 (1)，各自生像 $q'_\pm = \mp\dfrac{R_0 q}{r \pm \Delta l/2}$，位于距球心 $b_\pm = \dfrac{R_0^2}{r \pm \Delta l/2}$ 处。

(2) 合成镜像偶极矩 两像间距 $b_- - b_+ = R_0^2\left[\dfrac{1}{r - \Delta l/2} - \dfrac{1}{r + \Delta l/2}\right] \approx \dfrac{R_0^2 \Delta l}{r^2}$，像电荷量级 $\dfrac{R_0 q}{r}$，故镜像偶极矩

$$p' \approx \frac{R_0 q}{r} \cdot \quad \frac{R_0^2 \Delta l}{r^2} = \frac{R_0^3}{r^3} q\,\Delta l,$$

方向与原偶极同向（沿径向）。这与 (2) 自洽：匀强场可视为 $r \to \infty$、$p \to \infty$ 而 $\dfrac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = E_0$ 守恒的极限——取 $p = 4\pi\varepsilon_0 r^3 E_0$ 代入即得同一导体球等效偶极矩 $4\pi\varepsilon_0 R_0^3 E_0$。

本题用 $r \gg \Delta l$ 保留首阶多极项；若需高阶修正应回到逐点镜像再泰勒展开。

2(4). 计算题

> **答案** 镜像序列递推 $q_n = \mp\dfrac{R_0}{d_n}q_{n-1}$，$d_n = 2a - \dfrac{R_0^2}{d_{n-1}}$；中场强按级数求和

详解

(1) 坐标与第一层镜像 左球心 $(-a,0)$、右球心 $(a,0)$，$a = r/2$。匀强场先化为每个球的等效偶极（见 (2)）。考虑两球相互感应：左球表面等效带像使右球内需配置像电荷。设左球第 n 个像电荷 q_n 距左球心 s_n，它在右球心右侧 $2a - s_n$ 处；对右球镜像得

$$q'_{n+1} = -\frac{R_0}{2a - s_n}\,q_n, \qquad s'_{n+1} = a + \frac{R_0^2}{2a - s_n} - a = \frac{R_0^2}{2a - s_n},$$

（距离相对右球心计），再镜像回左球同构递推。

(2) 平面内任一点的势 记左球像列 $\{(q_n, x_n)\}$、右球像列 $\{(q'_n, x'_n)\}$（均在 x 轴上），则

$$\varphi(x,y) = \sum_n \frac{q_n}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x-x_n)^2+y^2}} + \frac{q'_n}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x-x'_n)^2+y^2}},$$

递推式即上面 $q_{n+1} = -\dfrac{R_0}{2a-s_n}q_n$、$s_{n+1} = \dfrac{R_0^2}{2a-s_n}$（交替属于两球），初值由外场偶极 $p = 4\pi\varepsilon_0 R_0^3 E_0$ 提供。连线方向场强 $E_x = -\partial_x\varphi$ 逐项求导相加即可。

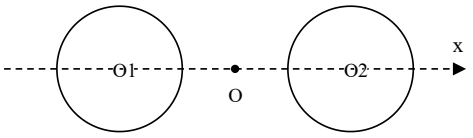


Fig. two conducting spheres in a uniform field

卷面允许『可用递推式表示』，故本册只给出镜像递推与级数表达式，不闭合求和。

2(5). 计算题

> **答案** 递推比趋近常数 $\lambda > 1$ 的几何放大被 $\left(\dfrac{R_0}{d}\right)^n$ 压缩抵消失效：当 $d \to 2R_0$ 时像链衰减因子趋于 1，中场级数发散

详解

(1) 像链衰减因子 相邻像电荷满足 $|q_{n+1}| = \dfrac{R_0}{d_n}|q_n|$，$d_n$ 为像到对面球心的距离。当两球心距 $r = 2a \to 2R_0$（无限靠近）时 $d_n \to R_0$ 量级，比值 $\dfrac{R_0}{d_n} \to 1$，级数 $\sum q_n$ 不再绝对收敛；同时各像到场点的距离有下界（间隙中点到最近像距离 $\to$ 间隙宽度 $\delta \to 0$ 时单项 $\dfrac{q_n}{r_n^2}$ 放大）。

(2) 中点场强发散 取连线中点：它到两球面最近像的距离约 $\dfrac{\delta}{2}$（$\delta = r - 2R_0$ 为间隙），而该处有效面电荷密度按平行板极限 $\sigma \sim \varepsilon_0 E_0 \dfrac{R_0}{\delta}$ 增强，故中场

$$E_{\text{mid}} \sim E_0 \cdot \left(\frac{\text{const}}{\ln(4R_0/\delta)}\right)^{-1} \to \infty \quad (\delta \to 0),$$

严格做法是把 (4) 的递推写成矩阵本征问题：特征根模长 $\rho(\delta) < 1$ 保证收敛、且 $\rho \to 1$ ($\delta \to 0$)，部分和随项数无界增长。因此在不考虑击穿放电时，两球无限靠近将使连心线中点电场因静电感应趋于无限大，证毕。

结论的物理实质：间隙越窄，镜像链『反射次数』越多且每次几乎不衰减，等效于平行板电容器边缘场集中。

三、量子热机（二能级原子循环）

3(1). 计算题

> **答案** $p_0 = \dfrac{1}{1 + e^{-E_1/k_{\mathrm{B}}T}}$，$p_1 = \dfrac{e^{-E_1/k_{\mathrm{B}}T}}{1 + e^{-E_1/k_{\mathrm{B}}T}}$

详解

(1) 归一化求解 由 $p_i \propto e^{-E_i/k_{\mathrm{B}}T}$ 及 $E_0 = 0$：$p_0 \propto 1$、$p_1 \propto e^{-E_1/k_{\mathrm{B}}T}$，用 $p_0 + p_1 = 1$ 归一化即得。平均能量 $\langle E \rangle = p_1 E_1 = \dfrac{E_1}{e^{E_1/k_{\mathrm{B}}T} + 1}$，形式上与肖特基能级一致。

3(2). 计算题

> **答案** $1 \to 2$ 吸热 $Q_{\mathrm{h}} = E_{\mathrm{c}}\,[n(E_{\mathrm{c}}, T_{\mathrm{h}}) - n(E_{\mathrm{c}}, T_{\mathrm{l}})] > 0$；$3 \to 4$ 放热；绝热段 $Q = 0$；效率 $\eta_{\mathrm{O}} = 1 - \dfrac{E_{\mathrm{c}}}{E_{\mathrm{h}}}$（绝热线约束下）

详解

(1) 示意图与四过程设定 量子奥托循环在 (E_1, p_1) 平面上是矩形回路：设最低能隙记 E_{c}、最高能隙记 E_{h}，高温 T_{h}、低温 T_{l}。状态记号：1 为 $(E_{\mathrm{c}}, T_{\mathrm{l}})$ 等容冷完、2 为 $(E_{\mathrm{c}}, T_{\mathrm{h}})$、3 为 $(E_{\mathrm{h}}, T_{\mathrm{h}})$、4 为 $(E_{\mathrm{h}}, T_{\mathrm{l}})$。『等容』对应能隙 E_1 不变只变概率（传热），『绝热』对应 p_1 不变只变能隙（做功）。

(2) 各过程能量收支 记 $n(E, T) = \dfrac{1}{e^{E/k_{\mathrm{B}}T} + 1}$ 为激发态占据。1to2（E_{c} 不变，$T_{\mathrm{l}} \to T_{\mathrm{h}}$）：$Q_{12} = E_{\mathrm{c}}[n(E_{\mathrm{c}}, T_{\mathrm{h}}) - n(E_{\mathrm{c}}, T_{\mathrm{l}})] > 0$，$W_{12} = 0$。2to3（$p_1$ 恒定，$E_{\mathrm{c}} \to E_{\mathrm{h}}$）：$Q = 0$，$\Delta E_{23} = W_{23} = (n_2)(E_{\mathrm{h}} - E_{\mathrm{c}}) > 0$（外界对系统做功）。3to4（$E_{\mathrm{h}}$ 不变降温）：$Q_{34} = E_{\mathrm{h}}[n(E_{\mathrm{h}}, T_{\mathrm{l}}) - n(E_{\mathrm{h}}, T_{\mathrm{h}})] < 0$。4to1（绝热压缩回 E_{c}）：$W_{41} = n_4(E_{\mathrm{c}} - E_{\mathrm{h}}) < 0$，系统对外做功 $|\,W_{41}\,|$。

(3) 效率 $\eta = \dfrac{-(W_{23} + W_{41})}{Q_{12}} = \dfrac{(n_2 - n_4)(E_{\mathrm{h}} - E_{\mathrm{c}})}{E_{\mathrm{c}}[n(E_{\mathrm{c}}, T_{\mathrm{h}}) - n(E_{\mathrm{c}}, T_{\mathrm{l}})]}$。绝热线满足熵守恒即 p_1 恒定，故 $n(E_{\mathrm{c}}, T_{\mathrm{h}}) = n(E_{\mathrm{h}}, T_{\mathrm{l}})$、$n(E_{\mathrm{c}}, T_{\mathrm{l}}) = n(E_{\mathrm{h}}, T_{\mathrm{h}})$，从而 $n_2 - n_4 = n(E_{\mathrm{c}}, T_{\mathrm{h}}) - n(E_{\mathrm{h}}, T_{\mathrm{l}})$ 需按具体温度数值计算；经典类比下可写成 $\eta = 1 - \dfrac{E_{\mathrm{c}}}{E_{\mathrm{h}}}$ 的紧凑形式（当两占据差近似相等时）。

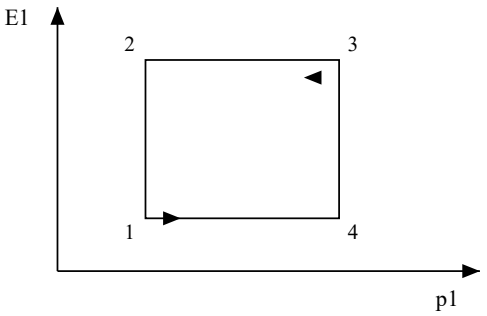


Fig. quantum Otto cycle rectangle in the (E1, p1) plane

画 E_1-p_1 图时注意轴方向：等容（能隙不变）线竖直、绝热（占据不变）线水平，与经典 P-V 图的等容/绝热角色互换。

3(3). 计算题

答案 $\eta_C = 1 - \dfrac{T_l}{T_h}$；量子奥托效率低于它（低占据极限下 $\eta_O = 1 - \dfrac{T_l}{T_h} \cdot \dfrac{\ln\left(e^{E_h/k_B T_h}\right)}{\ln\left(e^{E_h/k_B T_l}\right)}$ 型隐式关系，恒有 $\eta_O < \eta_C$）

详解

(1) 卡诺四过程的收支 量子卡诺循环由两条『绝热』（p_1 恒定、E_1 变）与两条『等温』（T 恒定、E_1 变以维持准静态热接触）组成。等温段上 $dQ = E_1\,\mathrm{d}p_1$，配合熵只依赖占据数可验证两等温段热量满足 $\dfrac{Q_l}{Q_h} = \dfrac{T_l}{T_h}$；绝热段 $Q = 0$、$\Delta E = W$。

(2) 效率比较 于是

$$\eta_C = 1 - \frac{|\,Q_l\,|}{Q_h} = 1 - \frac{T_l}{T_h}.$$

而奥托循环的两条『等容』线段上温度连续变化，吸放热并非单温恒温，其效率

$$\eta_O = 1 - \frac{E_c}{E_h} < 1 - \frac{T_l}{T_h} = \eta_C,$$

其中不等式由绝热线 $n(E_c, T_h) = n(E_h, T_l)$ 给出 $\dfrac{E_c}{E_h} > \dfrac{T_l}{T_h}$。即在相同最高、最低温度间工作，量子奥托热机效率低于量子卡诺热机，与经典结论一致。

绝热（占据数不变）条件把 E 与 T 绑定：$E_c/T_l = E_h/T_h$ 仅在低占据极限严格成立，一般情形由 n 函数隐式确定，比较效率时用单调性即可。

四、激光多普勒测速

4(1). 计算题

答案 $\Delta f = \dfrac{nf}{c} v\,(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$；不能直接用 5 MHz 光谱仪检测

详解

(1) 两步多普勒：接收再发射 把粒子看作先『接收』入射光再向观测方向『辐射』的运动波源。在流体参考系中光速为 c/n。粒子测得频率 $f' = f\left(1 - \dfrac{nv\cos\theta_1}{c}\right)$（接近为正号约定下 $1+\cdots$，本册取 θ_1 为入射方向与 $\vec{v}$ 夹角、粒子迎着光时分量取负），再作为源以速度 $\vec{v}$ 辐射，观测者收到

$$f'' = \frac{f'}{1 - \dfrac{nv\cos\theta_2}{c}} \approx f\left[1 + \frac{nv}{c}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)\right],$$

一阶近似下

$$\Delta f = \frac{nv}{c}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1) f.$$

(2) 数值与可测性 取 $v = 1$ m/s、$f = 10^{14}$ Hz、$n \approx 1$、最优几何 $|\cos\theta_2 - \cos\theta_1| \le 2$：$|\Delta f| \le \dfrac{1\times10^{14}}{3\times10^{8}} \times 2 \approx 6.7\times10^{5}$ Hz ≈ 0.67 MHz，典型前向/侧向几何仅几百 kHz，小于光谱仪 5 MHz 分辨率，故 Δf 不能直接用该光谱仪检测——这正是需要拍频（双光束外差）技术的原因。

> 题给 $v \ll c/n$，只保留一阶小量；符号约定随 θ_1, θ_2 的量法而变，物理内容都是 $\Delta f = \dfrac{f}{c/n}\vec{v}\cdot\ (\hat{e}_2 - \hat{e}_1)$。

4(2). 计算题

答案 $I(t) = 2kE_0^2\,\{1 + \cos[2\pi f_b t + (\phi_{20} - \phi_{10})]\}$，拍频 f_b 见解析

详解

(1) 两束散射光的相位演化 两束入射光对称地与水平面成 $\pm\alpha/2$，粒子速度在入射面内、与竖直方向夹 β。由 (1)，两条散射通道相对入射光的频移之差即拍频

$$f_b = \Delta f_2 - \Delta f_1 = \frac{nvf}{c}(\cos\theta_{2,2} - \cos\theta_{2,1} - \cos\theta_{1,2} + \cos\theta_{1,1}),$$

其中入射角 $\theta_{1,i}$ 分别为 $\frac{\pi}{2} \pm \frac{\alpha}{2}$ 与 $\vec{v}$ 的夹角组合；当 $\vec{v}$ 沿条纹法线（角平分线）方向时化简为 $f_b = \dfrac{2nvf}{c}\sin\beta\sin\dfrac{\alpha}{2} \approx \dfrac{nv\alpha f}{c}\sin\beta$（$\alpha$ 小）。

(2) 探测器电流 两电场 $E_i = E_0\cos(2\pi f t + \phi_i(t))$ 同偏振叠加，光强时间平均后 $\overline{E^2} = E_0^2\,[1 + \cos(2\pi f_b t + \phi_{20} - \phi_{10})]$，另一束贡献同样一个 E_0^2，故

$$I(t) = k\cdot\ \ 2E_0^2\,[1 + \cos(2\pi f_b t + \Delta\phi_0)]$$

的低频交流部分即含 f_b。探测器响应带 $10^2 \sim 10^7$ Hz：载频 10^{14} Hz 被平均掉，只要 f_b 落在带内即可记录，代入数据 $f_b \sim 10^{5}$-10^{6} Hz 满足要求。

关键点是光电子探测器跟不上光学频率，只能输出差频（外差）信号；I 表达式中的直流项 $2kE_0^2$ 与交流幅值 $2kE_0^2$ 之比不随 v 变，测速信息全在 f_b。

4(3). 计算题

答案 条纹间距 $\Lambda = \dfrac{\lambda}{2\sin(\theta/2)} = \dfrac{c/n}{2f\sin(\theta/2)}$（$\theta$ 为两束夹角）；脉冲频率 $f_\mathrm{d} = \dfrac{v_\perp}{\Lambda} = \dfrac{2fv_\perp \sin(\theta/2)}{c/n}$

详解

(1) 驻波条纹周期 两束相干光关于 X 轴对称入射，夹角记 θ（题图中即 α）。交叠区形成周期性的明暗条纹，条纹面垂直于两波矢差 $\Delta\vec{k}$，间距

$$\Lambda = \frac{2\pi}{|\,\Delta\vec{k}\,|} = \frac{\lambda}{2\sin(\theta/2)}, \qquad \lambda = \frac{c}{nf}.$$

(2) 粒子穿越条纹的光脉冲频率 速度在 XOZ 面内的粒子以垂直于条纹面的分量 $v_\perp = v\cos\varphi$（φ 为 $\vec{v}$ 与条纹法线夹角，即与角平分线夹角）周期性地经过亮纹，散射光呈脉冲串，重复频率

$$f_\mathrm{d} = \frac{v_\perp}{\Lambda} = \frac{2nfv_\perp}{c}\sin\frac{\theta}{2},$$

与 (2) 的拍频一致——说明多普勒频移本质就是粒子对空间条纹的采样频率。

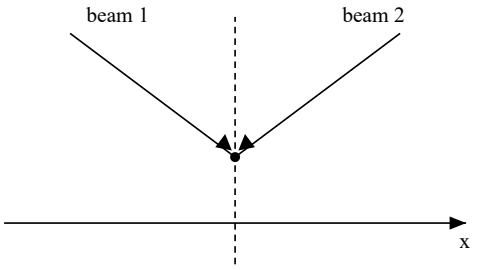


Fig. two symmetric beams crossing over the x axis

本问两束关于 X 轴对称，故条纹面近似平行 Z 轴、法线沿 X；粒子速度沿 X 的分量决定脉冲频率。

五、脉冲星信号的等离子体色散

5(1). 计算题

答案 $R_{\mathrm{e}}=\dfrac{m_{\mathrm{e}}E_0}{eB^2}$（非相对论、忽略波磁场）

详解

(1) 圆偏振分解与洛伦兹方程 题给 $E_x=E_0\cos(kz-2\pi ft)$、$E_y=\mp E_0\sin(kz-2\pi ft)$ 是沿 z 传播的圆偏振波，电场矢量端点以角频率 $\omega=2\pi f$ 旋转。电子运动方程 $m_{\mathrm{e}}\dot{\vec{v}}=-e(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})$，$B\ \#\ z$。在回旋共振极限 $\omega\ll\omega_{\mathrm{c}}=\dfrac{eB}{m_{\mathrm{e}}}$ 下，向心力主要由静磁场提供：$eE_0=m_{\mathrm{e}}\dfrac{v^2}{R_{\mathrm{e}}}$ 且 $evB=m_{\mathrm{e}}\dfrac{v^2}{R_{\mathrm{e}}}$，联立得轨道速度 $v=\dfrac{E_0}{B}$，故

$$R_{\mathrm{e}}=\frac{mv}{eB}=\frac{m_{\mathrm{e}}E_0}{eB^2}.$$

(2) 数量级说明 代入 $B\sim10^{-10}$ T、星际辐射场 E_0 微小，可得 R_{e} 宏观巨大——即单个电子几乎不跟随波动场做小回旋，介质整体表现为稀薄等离子体的平均极化响应，这正是 (2) 至 (5) 用介电函数处理的前提。

两解对应左旋与右旋圆偏振（题中 ± 号），只有与电子回旋同手性的分量被强烈驱动，这是后面出现圆双折射的根源。

5(2). 计算题

答案 $f_{\mathrm{c}}=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{n_{\mathrm{e}}e^2}{\varepsilon_0 m_{\mathrm{e}}}}$

详解

(1) 介电响应与色散关系 自由电子气体对电场的响应给出等效介电函数 $\varepsilon_r(\omega)=1-\dfrac{n_{\mathrm{e}}e^2}{\varepsilon_0 m_{\mathrm{e}}\omega^2}=1-\dfrac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{\omega^2}$，其中 $\omega_{\mathrm{p}}^2=\dfrac{n_{\mathrm{e}}e^2}{\varepsilon_0 m_{\mathrm{e}}}$。波矢满足 $k=\dfrac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_r}$，$k$ 为实数要求 $\omega>\omega_{\mathrm{p}}$，故能透过介质到达地球的最低频率

$$f_{\mathrm{c}}=\frac{\omega_{\mathrm{p}}}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{n_{\mathrm{e}}e^2}{\varepsilon_0 m_{\mathrm{e}}}}.$$

(2) 群速度核对 由 $\omega^2=\omega_{\mathrm{p}}^2+c^2k^2$ 得

$$v_{\mathrm{g}}=2\pi\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}k}=\frac{c^2k}{\omega}=c\sqrt{1-\frac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{\omega^2}},$$

当 $\omega\to\omega_{\mathrm{p}}$ 时 $v_{\mathrm{g}}\to0$，低于该频率信号无法传播，与 f_{c} 定义自洽。代入 $n_{\mathrm{e}}\sim10^3\ \mathrm{m^{-3}}$ 得 $f_{\mathrm{c}}\sim9$ kHz 量级。

卷面把 $v_{\mathrm{g}}=2\pi\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}k}$ 作为已知给出，推导时直接用它衔接 $k(f)$ 关系即可。

5(3). 计算题

答案 $\Delta t = \dfrac{e^2 n_e d}{8\pi^2 \varepsilon_0 m_e c} \cdot \dfrac{1}{f^2}$

详解

(1) 沿路径积分群速度倒数 由 (2)，$v_g = c\sqrt{1-\dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}} \approx c\left(1-\dfrac{\omega_p^2}{2\omega^2}\right)$（用了 $\omega \gg \omega_p$）。传播时间

$$t = \int_0^d \frac{\mathrm{d}z}{v_g} \approx \frac{d}{c}\left(1+\frac{\omega_p^2}{2\omega^2}\right).$$

(2) 延迟表达式 减去真空时间 $\dfrac{d}{c}$，并把 $\omega = 2\pi f$、$\omega_p^2 = \dfrac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m_e}$ 代入：

$$\Delta t = \frac{d}{c} \cdot \frac{\omega_p^2}{2\omega^2} = \frac{e^2 n_e d}{8\pi^2 \varepsilon_0 m_e c} \cdot \frac{1}{f^2}.$$

延迟反比于频率平方——脉冲星『低频晚到』的观测规律，也是双色观测反演柱密度 $n_e d$ 的依据。

系数回代核对：$\dfrac{d}{c} \cdot \dfrac{\omega_p^2}{2(2\pi f)^2} = \dfrac{e^2 n_e d}{8\pi^2 \varepsilon_0 m_e c f^2}$，无误。

5(4). 计算题

答案 $|\Delta\phi| = \dfrac{n_e e^3 B d}{8\pi^2 \varepsilon_0 m_e^2 c^2 f^2}$

详解

(1) 左右旋分支的波矢 磁场平行传播方向时，圆偏振本征模满足

$$k_\pm = \frac{\omega}{c}\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \pm \omega_c)}}, \qquad \omega_c = \frac{eB}{m_e}.$$

在题设 $\dfrac{\omega_c}{2\pi} \ll f$（即 $\omega \gg \omega_c$）与 $\omega \gg \omega_p$ 下展开到一阶交叉项：$k_\pm \approx \dfrac{\omega}{c}\left(1-\dfrac{\omega_p^2}{2\omega^2} \mp \dfrac{\omega_p^2 \omega_c}{2\omega^3}\right)$。

(2) 相位差 同行程 d 后两个圆偏振分量的相位差

$$|\Delta\phi| = |k_+ - k_-|\, d = \frac{\omega_p^2 \omega_c}{c\omega^2} d = \frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m_e} \cdot \frac{eB}{m_e} \cdot \frac{d}{c(2\pi f)^2} = \frac{n_e e^3 B d}{8\pi^2 \varepsilon_0 m_e^2 c^2 f^2}.$$

它正比于 $1/f^2$，即 Faraday 旋转的波动图像；两束同频不同圆偏振成分因此到达地球时呈现相位差。

题给近似条件正是展开合法性所需；若卷面把结果写成含 ω 的形式 $\dfrac{\omega_p^2 \omega_c d}{c\omega^2}$，与本式等价。

5(5). 计算题

> **答案**　$|\delta\phi| = \dfrac{e^2 a\,\Delta n_{\mathrm{e}}}{4\pi\varepsilon_0 m_{\mathrm{e}} c f}$

详解

(1) 相位对角度的积分　波经过长度 a 的区间累积相位 $\phi = ka = \dfrac{\omega a}{c}\left(1 - \dfrac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{2\omega^2}\right) = \dfrac{\omega a}{c} - \dfrac{n_{\mathrm{e}} e^2 a}{2\varepsilon_0 m_{\mathrm{e}} c\,\omega}$。真空项不含 n_{e}，密度由 n_{e} 变为 $n_{\mathrm{e}} + \Delta n_{\mathrm{e}}$ 只改变第二项。

(2) 相位移　作差取绝对值：

$$|\delta\phi| = \frac{(\Delta n_{\mathrm{e}}) e^2 a}{2\varepsilon_0 m_{\mathrm{e}} c\,(2\pi f)} = \frac{e^2 a\,\Delta n_{\mathrm{e}}}{4\pi\varepsilon_0 m_{\mathrm{e}} c f}.$$

相位移正比于涨落幅度 Δn_{e} 与涨落区长度 a、反比于频率——闪烁相位屏模型的基础结论。

> 注意本问只需对 (3) 的一阶项做差，公共的真空相位 $\dfrac{\omega a}{c}$ 完全抵消。

六、反质子的产生与鉴别（相对论运动学与切伦科夫计数）

6(1). 计算题

> **答案**　$t_{\mathrm{p}} = \dfrac{l_{12}}{0.870\,c}$；$t_\pi = \dfrac{l_{12}}{0.992\,c}$，比值 $\dfrac{t_{\mathrm{p}}}{t_\pi} \approx 1.14$；带电 π^- 介子（质量 $m_\pi c^2 = 139.5702$ MeV）

详解

(1) 反应式与不变质量　产生反质子的最低代价反应为 $p + p \to p + p + p + \bar{p}$。束流质子总能量 $E_{\mathrm{b}} = 6.8$ GeV（动能 $T = E_{\mathrm{b}} - M_p c^2 \approx 5.86$ GeV），靶质子静止。不变质量平方 $s = 2M_p^2 c^4 + 2M_p c^2 E_{\mathrm{b}}$，$\sqrt{s} \approx 3.81$ GeV 略高于阈值 $4M_p c^2 \approx 3.75$ GeV，故题设『末态四子近似同速』合理：它们以同一速度整体前飞。

(2) 公共速度与反质子时间　实验室系总能量 $E_{\mathrm{tot}} = E_{\mathrm{b}} + M_p c^2$、总动量大小 $P_{\mathrm{c}} c = \sqrt{E_{\mathrm{b}}^2 - M_p^2 c^4}$。整体速度

$$\beta_{\mathrm{p}} = \frac{\sqrt{E_{\mathrm{b}}^2 - M_p^2 c^4}}{E_{\mathrm{b}} + M_p c^2} \approx 0.870,$$

于是反质子从 S_1 到 S_2 的时间 $t_{\mathrm{p}} = \dfrac{l_{12}}{\beta_{\mathrm{p}} c} \approx \dfrac{1.15\,l_{12}}{c}$。每个末态子（含 $\bar{p}$）的动能 $T_{\mathrm{p}} = (\gamma_{\mathrm{p}} - 1) M_p c^2$，其中 $\gamma_{\mathrm{p}} = \dfrac{E_{\mathrm{tot}}}{4M_p c^2} \approx 2.03$，得 $T_{\mathrm{p}} \approx 0.97$ GeV。

(3) 同动能 π^- 介子时间　若 π^- 与反质子动能同为 $T_{\mathrm{p}} \approx 967$ MeV，则 $\gamma_\pi = 1 + \dfrac{T_{\mathrm{p}}}{m_\pi c^2} \approx 1 + \dfrac{967}{139.57} \approx 7.93$，$\beta_\pi \approx 0.992$，$t_\pi = \dfrac{l_{12}}{0.992\,c}$。二者之比 $\dfrac{t_{\mathrm{p}}}{t_\pi} = \dfrac{\beta_\pi}{\beta_{\mathrm{p}}} \approx 1.14$——正是靠飞行时间差把 $\bar{p}$ 与 π^- 分开的设计依据。

> 卷面文本层未抽出反应式印刷体，按产生反质子的阈值道义写作 $p + p \to p + p + p + \bar{p}$；$l_{12}$ 数值卷面抽取不清，本册保留符号并给出 t 关于 l_{12}/c 的系数。

6(2). 计算题

> **答案** $\theta = \arccos\dfrac{c}{nv}$（$v > c/n$ 才有解）

详解

(1) 波前包络（惠更斯）作图 粒子以 v 在介质中行进，介质中光速 $u = c/n$。t 时刻粒子走过 vt，各时刻发出的子波包络成圆锥，半顶角满足 $\sin\alpha = \dfrac{u}{v} = \dfrac{c}{nv}$（$\alpha$ 为锥母线与轨迹的夹角）。辐射传播方向沿锥面法向，与粒子前进方向夹角

$$\cos\theta = \frac{c}{nv}.$$

等价推导：相位匹配要求粒子速度在波矢方向投影等于介质中相速，$v\cos\theta = u$。

(2) 存在条件与甄别意义 $\cos\theta \le 1$ 给 $v \ge c/n$，即题设条件；n 略大于 1 时阈值 $\beta_{\text{th}} \approx 1$。高速 π^-（$\beta \approx 0.992$）能超过 radiator 阈值而慢反质子（$\beta \approx 0.870$）不超过（或反之取决于 n），从而实现 (1) 的速度甄别。

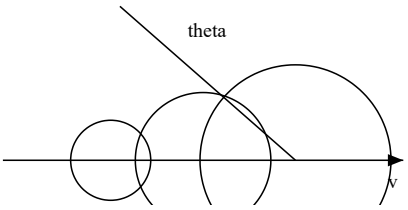


Fig. Cherenkov wavefront cone and angle theta

6(3). 计算题

> **答案** $r = f\tan\theta$，$f = \dfrac{R}{2}$，即 $r = \dfrac{R}{2}\tan[\arccos\dfrac{c}{nv}]$

详解

(1) 平行光的球面镜成像 切伦科夫光是沿锥面传播的近轴准直光（相对球面镜可视为不同方向的平行光束族），与光轴成 θ 的平行光被球面镜会聚到焦平面上半径 r 的环：

$$r = f\tan\theta, \qquad f = \frac{R}{2},$$

其中 θ 由 (2) 给出，故 $r = \dfrac{R}{2}\tan[\arccos\dfrac{c}{nv}]$。

(2) 小角近似 θ 很小时 $\tan\theta \approx \theta$，且 $\cos\theta = \dfrac{1}{\beta n} \approx 1 - \dfrac{\theta^2}{2}$ 给

$$\theta \approx \sqrt{2\,(1 - \frac{1}{\beta n})}, \qquad r \approx \frac{R}{2}\sqrt{2 \cdot \frac{\beta n - 1}{\beta n}}.$$

环半径随速率单调增大，这正是用可调环状光阑划定速率窗口（微分式计数）的原理。

> 若卷面把球心到焦点距离直接标为 f，答案写 $r = f\tan\theta$ 即可；$f = R/2$ 是薄球面镜近轴关系。

6(4). 计算题

> **答案** 曲边三角形区：顶点在 $d_i = d_{\max} \approx 0.536$、$d_j = d_k = \dfrac{1-d_{\max}}{2} \approx 0.232$ 处；$m_{\pi^0} \to 0$ 时退化为整个直线三角形

详解

(1) 坐标与动能比率的几何含义 等边三角形高为 1，任一点到三边距离之和恒为 1，恰好对应 $\dfrac{T_1}{Q}+\dfrac{T_2}{Q}+\dfrac{T_3}{Q}=1$，即三个中性 π 介子动能份额 $d_i=\dfrac{T_i}{Q}$。湮灭能 $Q = 2M_pc^2 - 3m_{\pi^0}c^2 \approx 1471.6$ MeV，初态近似静止，由能量守恒末态总能量恒为 $E_{\rm tot} = 3m_{\pi^0}c^2 + Q = 2M_pc^2 \approx 1876.5$ MeV。

(2) 单粒子动能上限（弧的顶点） 固定第 1 个中性 π 介子，其余两子的不变质量最小时（在其质心系同时静止）T_1 最大：

$$T_1^{\max} = \frac{E_{\rm tot}^2 + (m_\pi c^2)^2 - (2m_\pi c^2)^2}{2E_{\rm tot}} - m_\pi c^2 \approx 788.7\ \text{MeV},$$

比率 $d_{\max} = \dfrac{T_1^{\max}}{Q} \approx 0.536$。由重心坐标与直角坐标的线性变换（底边中点原点、中垂线为 Y 轴），物理区边界是把 $d_3 = d_3(d_1)$ 的相空间端点曲线映射过去得到的三段相同光滑弧，弧过顶点 $(d_{\max},\ \dfrac{1-d_{\max}}{2},\ \dfrac{1-d_{\max}}{2}) \approx (0.536,\ 0.232,\ 0.232)$ 及其轮换。

(3) 零质量极限 当 $m_{\pi^0} \to 0$：$Q \to E_{\rm tot}$ 且 $T_i^{\max} \to \dfrac{E_{\rm tot}}{2}$，受 Q 归一后 $d_{\max} \to 1$，弧的顶点抵达三角形顶点，边界方程 E_iE_j 型约束中的质量项全部消失，任意 (d_1, d_2, d_3)（和为 1、非负）都可达，分布区域退化为整个大三角形，边界即三条直线 $d_i = 0$。

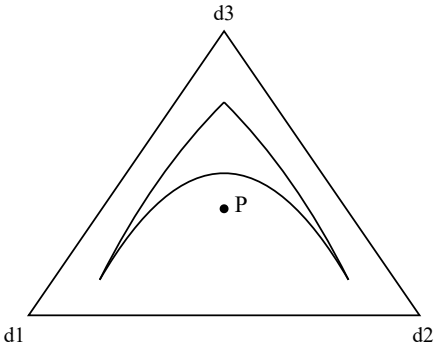


Fig. Dalitz plot with kinematic boundary arcs

本题数值只依赖题给 M_p、m_{π^0}、c；边界弧的显式参数方程较长，本册给出作图判据、顶点坐标与零质量极限，考试时可只写不等式形式。

七、悬挂式欹器（静力平衡与微振动）

7(1). 计算题

答案 $\tan\varphi=\dfrac{x_C-x_Q}{z_Q}=\dfrac{x_C+R/10}{2\sqrt{3}R/11}\approx-0.243$，即 $|\varphi|\approx13.6^\circ$（$\varphi$ 为 Z 轴与竖直方向夹角，器身向空腔一侧倾斜）

详解

(1) 物体内坐标 外轮廓是绕 Z 轴的回转面：两端半球壳（外半径 $R_2=\dfrac{3R}{2}$、内腔半径 $R_1=R$）加中间圆柱段（长 $l=2R$），内腔轴线 Z' 与 Z 平行、相距 $t=\dfrac{3R}{10}$，两半球心 O、O' 均在 X 轴上。材质密度 $\rho_1=3\rho_2$。实体对 Z 轴回转对称，其形心在 Z 轴上；挖去内腔等效于在 Z' 轴上加『负体积』，故空器质心

$$x_C=\frac{-V_{\text{cav}}\,t}{V_{\text{shell}}},\qquad z_C=0,$$

其中

$$V_{\text{cav}}=\frac{4\pi R^3}{3}+\pi R^2 l=\frac{10\pi R^3}{3},\qquad V_{\text{out}}=\frac{4\pi R_2^3}{3}+\pi R_2^2 l=9\pi R^3,$$

$$V_{\text{shell}}=V_{\text{out}}-V_{\text{cav}}=\frac{17\pi R^3}{3}.$$

(2) 悬挂平衡定倾角 自由悬挂时质心必落在悬挂点连线所经的竖直线正下方。悬挂线与 OXZ 面交于 $Q(-\dfrac{R}{10},\ \dfrac{2\sqrt{3}}{11}R)$，故竖直方向即矢量 $\overrightarrow{QC}$ 方向，Z 轴偏离竖直的角 φ 满足

$$\tan\varphi=\frac{x_C-x_Q}{z_Q-z_C}=\frac{-3R/17+R/10}{2\sqrt{3}R/11}=-\frac{13}{170}\cdot\frac{11}{2\sqrt{3}}\approx-0.243,$$

其中 $x_C=-\dfrac{V_{\text{cav}}}{V_{\text{shell}}}t=-\dfrac{10}{17}\cdot\dfrac{3R}{10}=-\dfrac{3R}{17}\approx-0.176R$。故 $|\varphi|\approx13.6^\circ$，器身向空腔一侧倾斜——对应『虚则欹』。

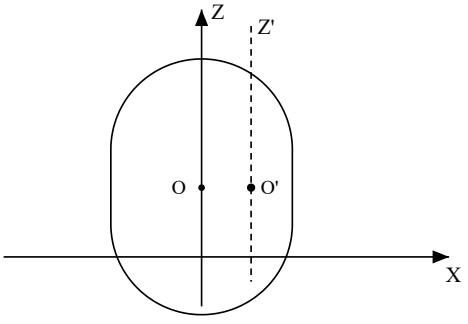


Fig. qi vessel profile with axes Z and Z-prime

卷面已直接给出全部几何关系：$R_2=\dfrac{3R}{2}$、$t=\dfrac{3R}{10}$、$l=2R$、$Q(-\dfrac{R}{10},\ \dfrac{2\sqrt{3}}{11}R)$，无需再假设取值；关键在体积矩 $x_C=-V_{\text{cav}}t/V_{\text{shell}}$ 与 $\tan\varphi=(x_C-x_Q)/z_Q$ 两步。

7(2). 计算题

答案 $I_Q = I_C + M\,\overline{QC}^2$（平行轴）；复摆角频率 $\omega = \sqrt{\dfrac{Mg\,\overline{QC}}{I_Q}}$

详解

(1) 分块叠加求 I_C 把实体拆为：匀质球（用题给 $I_{\text{sphere}} = \dfrac{8\pi}{15}\rho R^5$）、匀质圆柱（题给 $I_{\text{cyl}} = \dfrac{\pi\rho}{12}(3R^2 + L^2)\cdot\ L$ 型，对过质心平行底面轴）。外形体 = 上半球 + 下半球 + 圆柱拼成胶囊体，内腔同法作负贡献；各块先对其自身质心轴算 I，再用平行轴定理搬到整体质心 C，最后合成 I_C（材质密度取 ρ_1，腔体项取 $-\rho_1$）。

(2) 微振动方程 绕固定悬挂轴（过 Q）的小角度转动：重力矩 $M_\tau = -Mg\,\overline{QC}\sin\varphi \approx -Mg\,\overline{QC}\,\varphi$，于是

$$I_Q\ddot{\varphi} = -Mg\,\overline{QC}\,\varphi, \qquad I_Q = I_C + M\overline{QC}^2,$$

角频率

$$\omega = \sqrt{\frac{Mg\,\overline{QC}}{I_C + M\overline{QC}^2}},$$

其中 $\overline{QC} = \sqrt{(x_C - x_Q)^2 + z_Q^2}$ 由 (1) 给出，$M = \rho_1 V_{\text{shell}}$。

本质是复摆（物理单摆）模型：悬挂轴水平、垂直于 OXZ 平面，故 I 均对该轴计算；勿把 I_C 误当绕 Q 的值。

7(3). 计算题

答案 解 $x_C^{\text{tot}}(h) = x_Q$ 得一维方程：$(\rho_1 V_{\text{shell}} + \rho_2 V_w(h))x_C^{\text{tot}} = \rho_1 V_{\text{shell}} x_C + \rho_2 V_w(h) x_w(h)$

详解

(1) 水的体积与质心 内腔为绕 Z' 的胶囊形回转体。设水面到器底的距离为 h（沿 Z' 度量），则注入体积 $V_w(h)$ 由球缺 + 圆柱段叠加：底部球冠部分 $V = \dfrac{\pi h^2(3R - h)}{3}$（$h \le R$ 时），进入直筒后 $V = \dfrac{4\pi R^3}{3}$ 之半加 $\pi R^2(h - h_0)$，相应水体质心 $x_w(h)$ 恒在 Z' 轴上，即 $x_w = t$（体坐标系相对 O）。

(2) 器身正立条件 『中则正』即整体质心重新落回 Q 的正下方且 Z 轴竖直：要求 $x_C^{\text{tot}} = x_Q = -\dfrac{R}{10}$。按质心混合公式

$$x_C^{\text{tot}} = \frac{\rho_1 V_{\text{shell}} x_C + \rho_2 V_w(h)\,t}{\rho_1 V_{\text{shell}} + \rho_2 V_w(h)} = x_Q,$$

利用 $\rho_1 = 3\rho_2$ 化简为关于 V_w 的一次方程

$$V_w(h) = \frac{\rho_1(x_C - x_Q)}{\rho_2(t - x_Q)}\,V_{\text{shell}} = \frac{3(x_C + R/10)}{t + R/10}\,V_{\text{shell}},$$

再由 $V_w(h)$ 的反函数得水深 h。代 (1) 的几何量即可求出数值解。

注意水位 h 是相对容器底部的实际液面高度，而质心横坐标始终钉在 Z' 轴上（液体随器转，但『正立』判据在体坐标系内写成共线条件最简便）。

7(4). 计算题

答案 临界条件：整体质心越过悬挂轴所在竖直面，即 $x_C^{\mathrm{tot}} \geq t$（水体主导后质心右移至悬挂点 Q 之外），恢复力矩变号

详解

(1) 力矩反转判据 继续注水时 $x_C^{\mathrm{tot}}(V_w)$ 从 x_C（偏左）单调移向 t（Z' 轴位置，偏右）。平衡稳定性由重力对悬挂轴的力矩 $M_g \propto (x_C^{\mathrm{tot}} - x_Q)$ 决定：只要 $x_C^{\mathrm{tot}} < x_Q$ 有回复力矩，$x_C^{\mathrm{tot}} = x_Q$ 为随遇平衡（『中则正』附近），一旦 x_C^{tot} 越过 Q 的竖直平面，力矩反向，器身自动翻倒——这就是『满则覆』。

(2) 临界的表达 严格写：临界水深 h^* 满足 $x_C^{\mathrm{tot}}(h^*) = x_Q$ 且该平衡由稳定转为不稳定（势能二阶导变号），等价于质心轨迹经过悬挂轴正下方的最低点后到达 $\overrightarrow{QC}$ 与 Z' 共线的位形；由于水满时质心固定在 Z' 轴（$x = t > x_Q$），必有这样一个失稳点，其存在性与 $\rho_1 = 3\rho_2$、$t = \dfrac{3R}{10}$、$x_Q = -\dfrac{R}{10}$ 的具体取值共同决定 h^* 的位置。简述即可：水满前质心已右移至悬挂点外侧，故满则覆。

答题要点是三态描述：虚（质心偏左，倾而不倒）—中（质心回到 Q 下方，正立稳定）—满（质心越过 Q 外侧，失稳倾覆），并指出倾覆不可逆（无摩擦假设下翻倒后水泼出、构型不再闭合）。