逐光知理 · 高考物理参考答案与详解

第38届全国中学生物理竞赛复赛试题

参考答案与详解（本站独立编撰）

物理竞赛复赛 · 8 道大题：光学、热学、力学、电磁学、原子物理

本册答案与解析由逐光知理物理教研组独立编撰：先由本站对原卷逐题独立建模求解，再整理成册。原卷未印分值，故各题不标分数；个别小问的口径若与原卷印刷细节有出入，以卷面为准，详见相应题目的解析与提示。

答案速查

题号	主考点	答案摘要
1	几何光学：折射面的严格成像（笛卡尔卵形面）	(1) 凸面是以光轴为转轴的旋转椭球面，极坐标方程 $\rho=\dfrac{2(n-1)r_0\cos\theta}{1+(n^2-2)\cos^2\theta}$，直角坐标方程 $y^2=2(n-1)r_0x-(n^2-1)x^2$；(2)(i) 凹面方程形式与此相同：$y'^2=2(n'-1)r_0'x'-(n'^2-1)x'^2$，$x'$ 自凹面顶点沿光轴指向 F；(ii) $\dfrac{R_{\text{in}}}{R_{\text{out}}}=\dfrac{r_0\sqrt{\dfrac{n-1}{n+1}}}{r_0'\sqrt{\dfrac{n'-1}{n'+1}}}\cdot\dfrac{\sin t_1}{\sin t_2}$，其中 t_1、t_2 由 $\tan\theta_{max}=\dfrac{\sqrt{n^2-1}\,\sin t_1}{n+\cos t_1}=\dfrac{\sqrt{n'^2-1}\,\sin t_2}{n'+\cos t_2}$ 定出；特别地当 $n'=n$ 时 $t_1=t_2$，比值化为 $\dfrac{r_0}{r_0'}\sqrt{\dfrac{n-1}{n+1}}$
2	热学：玻璃管内水银封气的等压与流失过程	(1) 过程 A 中封闭气体对外做功 $W_A\approx 33.3\,\text{J}$；(2) 过程 B 能够缓慢稳定地发生（本站判据见解析），过程 B 中气体吸收热量 $Q_B\approx 50.0\,\text{J}$
3	力学：超球在两平板间的完全弹性斜碰	(1) $v_{1x}=\dfrac{3v_{0x}+4\omega_0 r}{7}$，$\omega_1=\dfrac{1}{7}\left(\dfrac{10v_{0x}}{r}-3\omega_0\right)$；(2) $v_{2x}=\dfrac{-31v_{0x}+24\omega_0 r}{49}$，$\omega_2=-\dfrac{1}{49}\left(\dfrac{60v_{0x}}{r}+31\omega_0\right)$；(3) $v_{3x}=\dfrac{-333v_{0x}-52\omega_0 r}{343}$，$\omega_3=\dfrac{1}{343}\left(-\dfrac{130v_{0x}}{r}+333\omega_0\right)$
4	电磁学：磁偶极子的相互作用势能与平衡	(1) $U=\dfrac{\mu_0\mu^2\cos\theta}{4\pi z^3}$；(2) $\theta_{\text{s}}=\pi$（B 的磁矩沿 $-x$ 方向）；(3) 受力平衡位置 $z_0=\left(\dfrac{3\mu_0\mu^2}{4\pi mg}\right)^{1/4}$，该位置不是稳定平衡位置
5	原子物理：塞曼减速与多普勒补偿	(1) $v_0\approx 360\,\text{m/s}$；(2) $a\approx 7.4\times10^4\,\text{m/s}^2$，减速距离 $\approx 0.87\,\text{m}$；(3) 激光频率应比静止共振频率减小 $\Delta f\approx 5.4\times10^8\,\text{Hz}$；(4) $B(z)=\dfrac{f_0(0)}{\lvert\beta\rvert c}\left[v_0-\sqrt{v_0^2-2az}\right]\approx 1.49\times10^{-4}\left[360-\sqrt{1.30\times10^5-1.49\times10^5 z}\right]\,\text{T}$（SI，$z$ 以 m 计）
6	电磁学：带电旋转圆筒间的场与角动量	(1) $r_1<r<r_2$：$E=\dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 r}$ 沿径向，其余区域为零；(2) $r_1<r<r_2$：$B=\dfrac{\mu_0 q\omega}{2\pi}$ 沿轴向，$r<r_1$ 与 $r>r_2$ 处为零；(3) $\omega\le\dfrac{4cr_2}{r_2^2-r_1^2}\sqrt{\dfrac{\pi\mu\ln(r_2/r_1)}{\mu_0 Qq}}$；(4) (i) $\omega=\dfrac{\mu_0 q^2}{\mu_0 q^2+4\pi m}\,\Omega$；(ii) $J=$

		$mr_2^2\Omega + mr_1^2\Omega\dfrac{\mu_0 q^2}{\mu_0 q^2 + 4\pi m} + \dfrac{\mu_0 q^2\Omega(r_2^2 - r_1^2)}{4\pi}$；(iii) $L = mr_1^2\Omega\dfrac{\mu_0 q^2}{\mu_0 q^2 + 4\pi m} + mr_2^2\Omega$
7	力学：斜坡上轮式汽车的驱动与附着	(1) $N_{\mathrm{f}} = \dfrac{(M+2m)g\cos\theta}{2} + \dfrac{1}{L}[-mra - (h+r)(M+2m)(a+g\sin\theta) + 2mgh\sin\theta]$，$N_{\mathrm{r}} = \dfrac{(M+2m)g\cos\theta}{2} + \dfrac{1}{L}[mra + (h+r)(M+2m)(a+g\sin\theta) - 2mgh\sin\theta]$；$a_{\mathrm{s}} = \dfrac{g[\frac{L}{2}(M+2m)\cos\theta + ((h+r)(M+2m) - 2mh)\sin\theta]}{(h+r)(M+2m) - mr}$；(2) $a = \dfrac{\tau_{\mathrm{w}}/r - (M+2m)g\sin\theta}{M+3m}$；(3) $a(0^\circ) \approx 5.6\ \mathrm{m/s^2}$，$\mu_{min}(0^\circ) \approx 0.95$；$a(30^\circ) \approx 0.66\ \mathrm{m/s^2}$，$\mu_{min}(30^\circ) \approx 1.1$
8	电磁学：电动汽车直流电机的加速过程	(1) $\tau(\omega) = \tau_{max}(1 - \dfrac{\omega}{\omega_{max}})$，$P_{max} = \dfrac{1}{4}\tau_{max}\omega_{max}$；(2) $v(t) = \dfrac{r\omega_{max}}{r_i}(1 - e^{-t/\tau_c})$，$\tau_c = \dfrac{r^2(M+3m)\omega_{max}}{r_i^2\tau_{max}}$；(3) $t \approx 6.1$ s，电池能量 ≈ 1.1 kWh，效率 $\approx 17\%$

全卷大题

1. 计算题

答案 (1) 凸面是以光轴为转轴的旋转椭球面，极坐标方程 $\rho = \dfrac{2(n-1)r_0\cos\theta}{1 + (n^2-2)\cos^2\theta}$，直角坐标方程 $y^2 = 2(n-1)r_0x - (n^2-1)x^2$；(2)(i) 凹面方程形式与此相同：$y'^2 = 2(n'-1)r_0'x' - (n'^2-1)x'^2$，$x'$ 自凹面顶点沿光轴指向 F；(ii) $\dfrac{R_{\mathrm{in}}}{R_{\mathrm{out}}} = \dfrac{r_0\sqrt{\dfrac{n-1}{n+1}}}{r_0'\sqrt{\dfrac{n'-1}{n'+1}}} \cdot \dfrac{\sin t_1}{\sin t_2}$，其中 t_1、t_2 由 $\tan\theta_{max} = \dfrac{\sqrt{n^2-1}\,\sin t_1}{n + \cos t_1} = \dfrac{\sqrt{n'^2-1}\,\sin t_2}{n' + \cos t_2}$ 定出；特别地当 $n' = n$ 时 $t_1 = t_2$，比值化为 $\dfrac{r_0}{r_0'}\sqrt{\dfrac{n-1}{n+1}}$

详解

(1) 第（1）问：凸面形状 取凸面顶点 O 为原点、光轴为 x 轴（向右为正）。平行光正入射平面，在透镜内沿水平方向行进到凸面上一点 $P(x,y)$，折射后汇聚于 $F(r_0,0)$。由等光程条件（平面波前到 F 的光程为常量，取轴上光线定常量 r_0）：

$$nx + \sqrt{(r_0 - x)^2 + y^2} = r_0$$

移项平方得 $\sqrt{(r_0-x)^2+y^2} = r_0 - nx$，展开整理：

$$y^2 = 2(n-1)r_0x - (n^2-1)x^2$$

此即直角坐标系中的标准形式（二次曲线，椭圆型）。以 $x = \rho\cos\theta$、$y = \rho\sin\theta$ 代入并约去 ρ：

$$(n^2-1)\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta = 2(n-1)r_0\rho\cos\theta$$

即 $\rho[1 + (n^2-2)\cos^2\theta] = 2(n-1)r_0\cos\theta$，故 $\rho = \dfrac{2(n-1)r_0\cos\theta}{1 + (n^2-2)\cos^2\theta}$。该面绕光轴旋转即得所求凸面；顶点在 $x = 0$，边缘在 $x = \dfrac{r_0}{n+1}$ 处半口径最大，$y_{max} = r_0\sqrt{\dfrac{n-1}{n+1}}$。

(2) 第（2）问(i)：凹面形状 凹面顶点取为原点 O'，x' 轴沿光轴指向 F，F 的坐标为 $(r_0',0)$。凹透镜折射率 n'，平面在右侧；出射光平行于光轴，意味着光在 n' 介质内部必须已平行于光轴行进。入射方是汇聚向 F 的球面波（时间反演即由 F 发出的发散球面波），出射方是平面波。对以 F 为心、半径 R 的球面波前与平面出射波前之间用等光程条件：$1\cdot\ (R-L_1)+n'(x_f-x')=$ 常量，其中 $L_1=\sqrt{(r_0'-x')^2+y'^2}$ 为 P 到 F 的距离，x_f 为平面出射面位置。轴上光线（P 为凹面顶点，$L_1=r_0'$）定出常量，比较得

$$\sqrt{(r_0'-x')^2+y'^2}=r_0'-n'x'$$

平方整理：

$$y'^2=2(n'-1)r_0'x'-(n'^2-1)x'^2$$

即凹面与凸面是同一型式的旋转椭球段（凹口朝左迎向入射光，离轴越远越深入透镜）。极坐标形式与第（1）问相同，只需把 n、r_0 换成 n'、r_0'。

(3) 第（2）问(ii)：两平行圆光束半径之比 本站建模：把两条椭圆型折射面统一写成参数式。以凸面为例，令 $A=\dfrac{r_0}{n+1}$，则 $x=A(1-\cos t)$、$y=B\sin t$，其中 $B=A\sqrt{n^2-1}=r_0\sqrt{\dfrac{n-1}{n+1}}$。折射后射向 F 的光线满足 $\tan\theta=\dfrac{y}{r_0-x}=\dfrac{\sqrt{n^2-1}\sin t}{n+\cos t}$；对凹面同样有 $\tan\theta=\dfrac{\sqrt{n'^2-1}\sin t_2}{n'+\cos t_2}$，且出射平行光的半径即该光线与凹面交点的高度 $y_2=B_2\sin t_2$，入射平行光的半径为同一光线在凸面上交点的高度 $y_1=B_1\sin t_1$（光线在平面入射面与凸面之间高度不变）。于是对给定的最大夹角 θ_{max}，t_1、t_2 分别由上述两式联立定出，

$$\frac{R_{\text{in}}}{R_{\text{out}}}=\frac{B_1\sin t_1}{B_2\sin t_2}=\frac{r_0\sqrt{\dfrac{n-1}{n+1}}}{r_0'\sqrt{\dfrac{n'-1}{n'+1}}}\cdot\frac{\sin t_1}{\sin t_2}$$

当 $n'=n$ 时两式相同，$t_1=t_2$，比值简化为 $\dfrac{r_0}{r_0'}\sqrt{\dfrac{n-1}{n+1}}$。

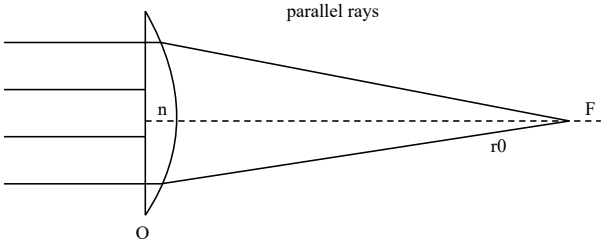


fig 1-1 convex refracting surface focusing parallel rays to F

两问的折射面都是旋转椭球段：凸面把平面波变为汇聚于 F 的球面波，凹面把汇聚于 F 的球面波变为平面波，等光程条件是统一钥匙。第（ii）问原卷以 θ_{max} 为已知量，本站用参数式给出比值的一般表达；若原卷意图另有限定（如凹镜恰好截住全部光束的口径约定），以卷面为准。

2. 计算题

> **答案** (1) 过程 A 中封闭气体对外做功 $W_A \approx 33.3\,\mathrm{J}$；(2) 过程 B 能够缓慢稳定地发生（本站判据见解析），过程 B 中气体吸收热量 $Q_B \approx 50.0\,\mathrm{J}$

详解

(1) 第（1）问：过程 A 的功 初态：气柱高 25.0 cm，水银柱高 25.0 cm，气体压强由活塞与水银柱的力平衡给出：

$$p_1 = p_0 + \rho g h = \rho g(0.750 + 0.250) = 13.6 \times 10^3 \times 9.80 \times 1.00 \approx 1.3328 \times 10^5\ \mathrm{Pa}$$

初体积 $V_1 = Sh = 10.0 \times 10^{-4} \times 0.250 = 2.50 \times 10^{-4}\ \mathrm{m^3}$。缓慢加热时水银柱整体上移、高度不变，故为等压过程；水银上液面到达管口时水银柱占 50 ~ 75 cm，气柱变为 50.0 cm，$\Delta V = S \times 0.250 = 2.50 \times 10^{-4}\ \mathrm{m^3}$。

$$W_A = p_1 \Delta V = 1.3328 \times 10^5 \times 2.50 \times 10^{-4} \approx 33.3\ \mathrm{J}$$

(2) 第（2）问：过程 B 能否缓慢稳定发生 过程 B 中水银顶部始终与管口平齐，设水银柱剩余高度为 x（由 25.0 cm 减到 0），则气柱高 $75.0 - x$（cm），气体压强 $p = p_0 + \rho g x$（用水银柱高表示即 $75 + x$ cmHg）。于是

$$pV \propto (75 + x)(75 - x) = 75^2 - x^2$$

随 x 减小而增大，故所需气体温度 $T \propto pV$ 沿路径单调升高：由加热维持该准静态路径在热学上是自洽的。再考察力学稳定性：设气柱因扰动伸长 δy（水银多溢出一点），在扰动时标内气体来不及吸热，按等温估计气体压强变化率 $\left|\dfrac{dp_\mathrm{g}}{dy}\right| = \dfrac{p}{y} = \dfrac{75 + x}{75 - x} \geq 1$（全程 > 1，仅在终点 $x = 25.0$ cm 处趋于 1），而平衡所需压强变化率仅为 $\left|\dfrac{dp_\mathrm{a}}{dy}\right| = 1$ cmHg/cm。气体压强下降比平衡要求更快而低于平衡值，水银柱被压回，扰动自动衰减；绝热估计 $\gamma p/y$ 更大，同样稳定。故过程 B 能够缓慢稳定地进行。

(3) 第（2）问：过程 B 吸收的热量 状态量：A 末态 $p = 100$ cmHg、气柱 50.0 cm、$T_2 = T_1 \times \dfrac{p_2 V_2}{p_1 V_1} = 400 \times \dfrac{100 \times 50}{100 \times 25} = 800$ K。B 末态 $p = 75$ cmHg、气柱 75.0 cm，

$$T_3 = 800 \times \frac{75 \times 75}{100 \times 50} = 900\ \mathrm{K}$$

物质的量 $n = \dfrac{p_1 V_1}{R T_1} = \dfrac{1.3328 \times 10^5 \times 2.50 \times 10^{-4}}{8.31 \times 400} \approx 1.00 \times 10^{-2}$ mol。内能增量

$$\Delta U = n C_V \Delta T = 1.00 \times 10^{-2} \times \frac{5}{2} \times 8.31 \times 100 \approx 20.8\ \mathrm{J}$$

功：

$$W_B = \int p\,dV = \int_0^{0.25} S(p_0 + \rho g x)\,dx = S\left(p_0 \times 0.250 + \rho g \times \frac{0.250^2}{2}\right)$$

$$W_B = 10^{-3} \times (99960 \times 0.250 + 1.3328 \times 10^5 \times 0.03125) \approx 29.2\ \mathrm{J}$$

由热力学第一定律

$$Q_B = \Delta U + W_B \approx 20.8 + 29.2 = 50.0\ \mathrm{J}$$

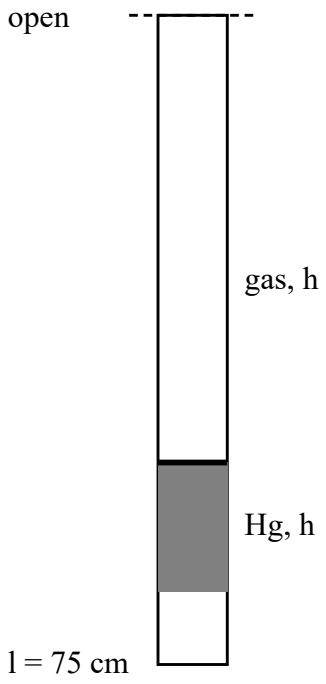


fig 2-1 vertical tube with gas piston and mercury column

易错点：过程 B 中气体压强随水银流失而减小，但 pV（从而温度）沿路径是升高的，勿凭直觉认为压强减小温度就降低；功 W_B 必须对变压强积分，不能用单一压强乘体积差。稳定性结论为本站建模判据（比较扰动压强变化率与平衡压强变化率），若与原卷设问口径有出入以卷面为准。

3. 计算题

答案 (1) $v_{1x}=\dfrac{3v_{0x}+4\omega_0 r}{7}$，$\omega_1=\dfrac{1}{7}\left(\dfrac{10v_{0x}}{r}-3\omega_0\right)$；(2) $v_{2x}=\dfrac{-31v_{0x}+24\omega_0 r}{49}$，$\omega_2=-\dfrac{1}{49}\left(\dfrac{60v_{0x}}{r}+31\omega_0\right)$；(3) $v_{3x}=\dfrac{-333v_{0x}-52\omega_0 r}{343}$，$\omega_3=\dfrac{1}{343}\left(-\dfrac{130v_{0x}}{r}+333\omega_0\right)$

详解

(1) 碰接模型：单次碰撞的普适关系 取 x 水平向右、y 竖直向下、z 轴按右手螺旋。碰接为完全弹性且接触点无滑动：法向速度反向，切向接触点相对速度反号。以碰下板为例，接触点在球心下方 r 处，其水平速度为 $v_x-\omega r$（ω 为绕 z 轴角速度）。设摩擦冲量 J_f（沿 x），则 $\Delta v_x=J_f/m$，而对过球心平行 z 轴的轴，$\Delta\omega=\dfrac{-rJ_f}{J}=-\dfrac{5J_f}{2mr}$（$J=\dfrac{2}{5}mr^2$）。条件 $v_x'-\omega' r=-(v_x-\omega r)$ 给出

$$J_f=\frac{4m}{7}(\omega r-v_x)$$

于是

$$v_x'=\frac{3v_x+4\omega r}{7},\qquad \omega'=\frac{1}{7}\left(\frac{10v_x}{r}-3\omega\right)$$

碰上板时接触点在球心上方，接触点水平速度为 $v_x+\omega r$，角冲量反号，同法得

$$v_x'=\frac{3v_x-4\omega r}{7},\qquad \omega'=-\frac{1}{7}\left(\frac{3\omega r+10v_x}{r}\right)=-\frac{3\omega+10v_x/r}{7}$$

法向均满足 $v_y'=-v_y$，故球在两板间往返的竖直运动周期不变。

(2) 第（1）问：第 1 次（下板）碰后 以 $v_x=v_{0x}$、$\omega=\omega_0$ 代入下板公式：

$$v_{1x}=\frac{3v_{0x}+4\omega_0 r}{7},\qquad \omega_1=\frac{1}{7}\left(\frac{10v_{0x}}{r}-3\omega_0\right)$$

(3) 第（2）问：第 2 次（上板）碰后 把第（1）问结果代入上板公式：

$$v_{2x}=\frac{3v_{1x}-4\omega_1 r}{7}=\frac{3(3v_{0x}+4\omega_0 r)-4(10v_{0x}-3\omega_0 r)}{49}=\frac{-31v_{0x}+24\omega_0 r}{49}$$

$$\omega_2=-\frac{3\omega_1+10v_{1x}/r}{7}=-\frac{(30v_{0x}/r-9\omega_0)+(30v_{0x}/r+40\omega_0)}{49}=-\frac{1}{49}\left(\frac{60v_{0x}}{r}+31\omega_0\right)$$

(4) 第（3）问：第 3 次（下板）碰后 把第（2）问结果代入下板公式：

$$v_{3x}=\frac{3v_{2x}+4\omega_2 r}{7}=\frac{3(-31v_{0x}+24\omega_0 r)-4(60v_{0x}+31\omega_0 r)}{343}=\frac{-333v_{0x}-52\omega_0 r}{343}$$

$$\omega_3=\frac{10v_{2x}/r-3\omega_2}{7}=\frac{(-310v_{0x}/r+240\omega_0)+(180v_{0x}/r+93\omega_0)}{343}=\frac{1}{343}\left(-\frac{130v_{0x}}{r}+333\omega_0\right)$$

由于 $\omega_0<v_{0x}/r$，主项 $-\dfrac{333}{343}v_{0x}\approx-0.97v_{0x}$，即第 3 次碰后水平速度几乎与初速等大反向，球心几乎返回原处，与题设一致。

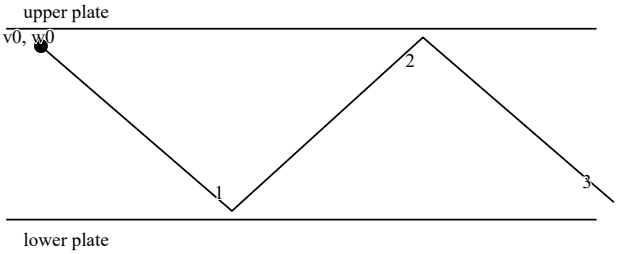


fig 3-1 superball zigzag between two plates

关键在于接触点切向速度反号这一完全弹性无滑动条件，摩擦冲量方向由 ωr 与 v_x 的相对大小决定，不必预先假设；上、下板碰撞的角冲量符号相反，代入时务必区分。碰接次序按图 3a 取下、上、下。

4. 计算题

答案 (1) $U=\dfrac{\mu_0\mu^2\cos\theta}{4\pi z^3}$；(2) $\theta_{\mathrm{s}}=\pi$（B 的磁矩沿 $-x$ 方向）；(3) 受力平衡位置 $z_0=\left(\dfrac{3\mu_0\mu^2}{4\pi mg}\right)^{1/4}$，该位置不是稳定平衡位置

详解

(1) 第（1）问：相互作用势能 磁矩为 μ 的电流环在远处的场为

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left[3(\boldsymbol{\mu}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})\hat{\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{\mu}\right]$$

A 的磁矩沿 $+x$，B 位于 $\boldsymbol{r}=z\hat{\boldsymbol{z}}$ 处，$\boldsymbol{\mu}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}=0$，故 B 处的场

$$\boldsymbol{B}_A=-\frac{\mu_0\mu}{4\pi z^3}\hat{\boldsymbol{x}}$$

B 的磁矩与 x 轴成 θ 角，其沿 $-x$ 方向的分量为 $-\mu\cos\theta$，相互作用势能

$$U=-\boldsymbol{\mu}_B\cdot\boldsymbol{B}_A=-\mu\cos\theta\left(-\frac{\mu_0\mu}{4\pi z^3}\right)=\frac{\mu_0\mu^2\cos\theta}{4\pi z^3}$$

(2) 第（2）问：稳定平衡的 θ_{s} z 固定时 $U(\theta)=U_0\cos\theta$，$U_0=\dfrac{\mu_0\mu^2}{4\pi z^3}>0$。极值处 $\dfrac{dU}{d\theta}=-U_0\sin\theta=0$，$\theta=0$ 或 π；$\dfrac{d^2U}{d\theta^2}=-U_0\cos\theta$，在 $\theta=\pi$ 处为 $+U_0>0$，为极小。故

$$\theta_{\mathrm{s}}=\pi$$

即 B 的磁矩稳定指向 $-x$ 方向（与 A 的磁矩反平行）。

(3) 第（3）问：z 可变时的受力平衡与稳定性 取 $\theta=\theta_s=\pi$，$U(z)=-\dfrac{\mu_0\mu^2}{4\pi z^3}=-\dfrac{C}{z^3}$，$C=\dfrac{\mu_0\mu^2}{4\pi}$。B 所受磁场力

$$F_z=-\frac{dU}{dz}=-\frac{3C}{z^4}$$

沿 $-z$ 方向（指向 A，为引力）。B 还受重力 mg（沿 $+z$）。力平衡要求 $mg=\dfrac{3C}{z^4}$，故

$$z_0=\left(\frac{3\mu_0\mu^2}{4\pi mg}\right)^{1/4}$$

稳定性：总势能 $V(z)=-mgz-\dfrac{C}{z^3}$（z 轴竖直向下，重力势为 $-mgz$），

$$\frac{dV}{dz}=-mg+\frac{3C}{z^4}=0$$

（即平衡）

$$\frac{d^2V}{dz^2}=-\frac{12C}{z^5}<0$$

势能取极大，故该平衡位置不是稳定平衡位置：受小扰动后 B 或在重力作用下掉落、或被 A 吸附过去，与题中对不稳定平衡的描述一致。

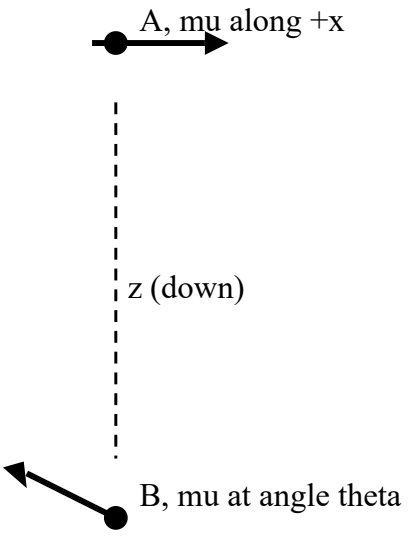


fig 4-1 dipole A at origin and dipole B below it along z axis

注意坐标约定：z 轴竖直向下，重力势能为 $-mgz$；A 的场在 z 轴上只有 x 分量且与 $\boldsymbol{\mu}$ 反向，避免把势能符号写错。第（3）问结论是受力平衡但非稳定平衡。

5. 计算题

答案 (1) $v_0 \approx 360\ \mathrm{m/s}$；(2) $a \approx 7.4\times10^{4}\ \mathrm{m/s^2}$，减速距离 $\approx 0.87\ \mathrm{m}$；(3) 激光频率应比静止共振频率减小 $\Delta f \approx 5.4\times10^{8}\ \mathrm{Hz}$；(4) $B(z)=\dfrac{f_0(0)}{|\beta|\,c}\left[v_0-\sqrt{v_0^2-2az}\right]\approx 1.49\times10^{-4}\left[360-\sqrt{1.30\times10^{5}-1.49\times10^{5}\,z}\right]$ T（SI，z 以 m 计）

详解

(1) 第（1）问：方均根速率 准直后原子只剩一个方向自由度，按一维方均根速率 $\frac{1}{2}k_BT=\frac{1}{2}mv_0^2$：

$$v_0=\sqrt{\frac{k_BT}{m}},\qquad T=350+273=623\ \mathrm{K},\quad m=40\times1.66\times10^{-27}=6.64\times10^{-26}\ \mathrm{kg}$$

$$v_0=\sqrt{\frac{1.38\times10^{-23}\times623}{6.64\times10^{-26}}}\approx 3.6\times10^{2}\ \mathrm{m/s}$$

(2) 第（2）问：加速度与减速距离 每次散射吸收一个逆向光子，原子获动量 h/λ（各向同性再发射的平均动量为零），散射速率 $\Gamma=5.00\times10^{6}\ \mathrm{s^{-1}}$，故

$$a=\frac{\Gamma h}{m\lambda}=\frac{5.00\times10^{6}\times6.626\times10^{-34}}{6.64\times10^{-26}\times670\times10^{-9}}\approx 7.45\times10^{4}\ \mathrm{m/s^2}$$

匀减速至静止所需距离

$$d=\frac{v_0^2}{2a}=\frac{360^2}{2\times7.45\times10^{4}}\approx 0.87\ \mathrm{m}$$

(3) 第（3）问：所需减小量 Δf 原子以 v_0 迎着激光运动，原子系中光频蓝移 $f(1+v_0/c)$，共振条件 $f(1+v_0/c)=f_0$（$f_0=c/\lambda$ 为静止共振频率），故

$$f=\frac{f_0}{1+v_0/c}\approx f_0\left(1-\frac{v_0}{c}\right),\qquad \Delta f=f_0-f\approx\frac{f_0v_0}{c}=\frac{v_0}{\lambda}\approx\frac{360}{670\times10^{-9}}\approx 5.4\times10^{8}\ \mathrm{Hz}$$

(4) 第（4）问：磁场随位置的分布 $B(z)$ 激光频率固定为第（3）问的 $f=f_0(0)/(1+v_0/c)$。原子减速到 z 处速度为 $v(z)$，共振条件为原子系中光频等于该处塞曼移动后的跃迁频率：

$$f\left(1+\frac{v}{c}\right)=f_0(0)+\beta B$$

解出

$$\beta B=f_0(0)\left[\frac{1+v/c}{1+v_0/c}-1\right]=\frac{f_0(0)}{c}\,\frac{v-v_0}{1+v_0/c}\approx\frac{f_0(0)}{c}(v-v_0)$$

由（2）问，共振减速是匀减速 $a=\Gamma h/(m\lambda)$，故 $v(z)=\sqrt{v_0^2-2az}$。又 $f_0(0)=c/\lambda$，$\beta=-1.00\times10^{10}$ Hz/T，得

$$B(z)=\frac{f_0(0)}{|\beta|\,c}\left[v_0-\sqrt{v_0^2-2az}\right]=\frac{v_0-\sqrt{v_0^2-2az}}{|\beta|\,\lambda}$$

代入数值（$v_0\approx360$ m/s，$2a\approx1.49\times10^5$ m^2/s^2）：

$$B(z)\approx1.49\times10^{-4}\left[360-\sqrt{1.30\times10^5-1.49\times10^5\,z}\right]\ \text{T}$$

磁场随 z 增大而增强，至减速终点 $z\approx0.87$ m 处约 0.054 T，与题给 $\beta<0$（跃迁频率随 B 增大而减小）配套，恰好补偿多普勒蓝移的减小。

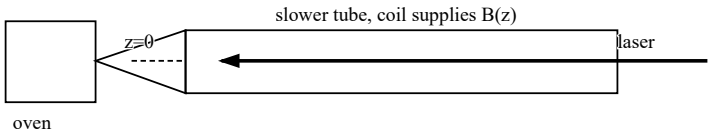


fig 5-1 Zeeman slower: atom beam against laser with coil field

第（3）问严格式为 $\Delta f=\dfrac{f_0v_0}{c+v_0}$，本题 $v_0/c\approx1.2\times10^{-6}$，取一级近似即可。第（4）问中塞曼项须严格用 $\beta B=f_0(0)(v-v_0)/(c+v_0)$ 推出，因 β 为负，B 沿原子前进方向增强。结果保留三位或两位有效数字均可，本站给出三位。

6. 计算题

答案 (1) $r_1<r<r_2$：$E=\dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 r}$ 沿径向，其余区域为零；(2) $r_1<r<r_2$：$B=\dfrac{\mu_0 q\omega}{2\pi}$ 沿轴向，$r<r_1$ 与 $r>r_2$ 处为零；(3) $\omega\le\dfrac{4cr_2}{r_2^2-r_1^2}\sqrt{\dfrac{\pi\mu\ln(r_2/r_1)}{\mu_0 Qq}}$；(4) (i) $\omega=\dfrac{\mu_0q^2}{\mu_0q^2+4\pi m}\,\Omega$；(ii) $J=mr_2^2\Omega+mr_1^2\Omega\dfrac{\mu_0q^2}{\mu_0q^2+4\pi m}+\dfrac{\mu_0q^2\Omega(r_2^2-r_1^2)}{4\pi}$；(iii) $L=mr_1^2\Omega\dfrac{\mu_0q^2}{\mu_0q^2+4\pi m}+mr_2^2\Omega$

详解

(1) 第（1）问：电场强度 由高斯定理，作半径 r、长 l 的同轴圆柱高斯面：$E\cdot\ 2\pi rl=\dfrac{ql}{\varepsilon_0}$（仅内筒电荷在面内，$r_1<r<r_2$）。故

$$E=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r}\quad(r_1<r<r_2)\qquad E=0\quad(r<r_1\ \text{or}\ r>r_2)$$

方向沿径向（$q>0$ 向外）。

(2) 第（2）问：同向旋转时的磁感应强度 旋转的带电圆筒等效于螺线管：单位长度电荷 q、角速度 ω 的面电流密度 $K=\dfrac{q\omega}{2\pi}$，在筒内产生 $B=\mu_0 K=\dfrac{\mu_0 q\omega}{2\pi}$ 的轴向场，筒外为零。内筒（电流沿 $+z$ 回路）与外筒（电荷 $-q$，电流反号）的场叠加：$r<r_1$：两筒内部场等大反向，合为零；$r_1<r<r_2$：仅外筒的内部场存在，

$$B=\frac{\mu_0 q\omega}{2\pi}\quad (r_1<r<r_2)$$

（方向沿轴，按外筒电流的右手螺旋定向）；

$$B=0\quad (r>r_2)$$

(3) 第（3）问：点电荷能到达外筒的 ω 条件 本站建模：设点电荷（质量 μ、电量 Q）自 r_1 静止释放。电场力沿径向做功，磁力不做功但提供切向力。角动量定理（对轴）：$\dfrac{dL_z}{dt}=rQ(v\times B)_\phi=-QBrv_r=-\dfrac{QB}{2}\dfrac{d(r^2)}{dt}$，积分（初始 $L_z=0$、$r=r_1$）：

$$\mu r v_\phi=\frac{QB}{2}(r^2-r_1^2)\quad\Rightarrow\quad v_\phi=\frac{QB(r^2-r_1^2)}{2\mu r}$$

能量守恒：

$$\frac{1}{2}\mu(v_r^2+v_\phi^2)=\frac{Qq}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{r_1}$$

到达 r_2 要求 $v_r^2\ge 0$ 在全程成立，最紧处在 $r=r_2$：

$$\frac{Qq}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}\ge\frac{1}{2}\mu v_\phi^2(r_2)=\frac{Q^2B^2(r_2^2-r_1^2)^2}{8\mu r_2^2}$$

代入 $B=\dfrac{\mu_0 q\omega}{2\pi}$ 并利用 $\mu_0\varepsilon_0c^2=1$，得

$$\omega\le\frac{4cr_2}{r_2^2-r_1^2}\sqrt{\frac{\pi\mu\ln(r_2/r_1)}{\mu_0 Qq}}$$

取等号时点电荷恰好掠过外筒。

(4) 第（4）问 (i)：内筒角速度 ω 外筒被驱动时 Ω 变化，两筒间 $B=-\dfrac{\mu_0 q\Omega}{2\pi}$（沿轴向）随之变化，激发涡旋电场。对半径 r_1 的圆回路用法拉第定律：$E_\phi(r_1)\cdot 2\pi r_1=-\pi r_1^2\dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{\mu_0 q(\omega-\Omega)}{2\pi}\right]$（$r<r_1$ 内磁感应强度为 $\dfrac{\mu_0 q(\omega-\Omega)}{2\pi}$），得 $E_\phi(r_1)=-\dfrac{\mu_0 qr_1}{4\pi}(\dot\omega-\dot\Omega)$。该电场对内筒（单位长度电荷 q）的力矩 $\tau=qr_1E_\phi$，代入内筒转动方程 $mr_1^2\dot\omega=\tau$：

$$m\dot\omega=-\frac{\mu_0 q^2}{4\pi}(\dot\omega-\dot\Omega)\quad\Rightarrow\quad\dot\omega\left(m+\frac{\mu_0 q^2}{4\pi}\right)=\frac{\mu_0 q^2}{4\pi}\dot\Omega$$

从静止积分：

$$\omega=\frac{\mu_0 q^2}{\mu_0 q^2+4\pi m}\Omega$$

(5) 第（4）问 (ii)：外力矩的总冲量矩 J 把内、外筒与电磁场作为整体，对轴用角动量定理：外力矩冲量 J 等于系统各部分角动量增量之和。机械部分：外筒 $mr_2^2\Omega$，内筒 $mr_1^2\omega$。场的角动量：动量密度 $\boldsymbol{g}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ 只存在于两筒间（$r<r_1$ 处 $E=0$，$r>r_2$ 处两者皆零），角动量密度 $\ell_z=-\varepsilon_0 rE_rB_z=\dfrac{\mu_0q^2\Omega}{4\pi^2}$（与 r 无关），单位长度场的角动量

$$L_{\mathrm{f}}=\ell_z\cdot\ \pi(r_2^2-r_1^2)=\frac{\mu_0q^2\Omega(r_2^2-r_1^2)}{4\pi}$$

故

$$J=mr_2^2\Omega+mr_1^2\Omega\frac{\mu_0q^2}{\mu_0q^2+4\pi m}+\frac{\mu_0q^2\Omega(r_2^2-r_1^2)}{4\pi}$$

(6) 第（4）问 (iii)：单位长度的总机械角动量 L 内、外筒机械角动量直接相加：

$$L=mr_1^2\omega+mr_2^2\Omega=mr_1^2\Omega\frac{\mu_0q^2}{\mu_0q^2+4\pi m}+mr_2^2\Omega$$

与 (ii) 对比可见 $J=L+L_{\mathrm{f}}$，即外力矩的冲量矩一部分化为机械角动量、一部分储存于电磁场，体系角动量守恒自洽。

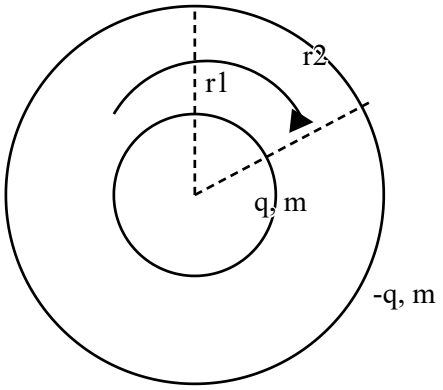


fig 6-1 two coaxial charged rotating cylinders

第（2）问易错在误用 $\mu_0I/2\pi r$：旋转带电筒是面电流，筒内场均匀、筒外为零，再叠加即可。第（3）问角动量积分切勿漏掉 $-r_1^2$ 项（初态 $r=r_1$ 时 $L_z=0$）。第（4）问中场角动量只分布于两筒之间的电场存在区。第（3）问条件式为本站建模结果，若与原卷口径有出入以卷面为准。

7. 计算题

答案 (1) $N_{\mathrm{f}}=\dfrac{(M+2m)g\cos\theta}{2}+\dfrac{1}{L}\left[-mra-(h+r)(M+2m)(a+g\sin\theta)+2mgh\sin\theta\right]$，$N_{\mathrm{r}}=\dfrac{(M+2m)g\cos\theta}{2}+\dfrac{1}{L}\left[mra+(h+r)(M+2m)(a+g\sin\theta)-2mgh\sin\theta\right]$；$a_{\mathrm{s}}=\dfrac{g\left[\frac{L}{2}(M+2m)\cos\theta+((h+r)(M+2m)-2mh)\sin\theta\right]}{(h+r)(M+2m)-mr}$；(2) $a=\dfrac{\tau_{\mathrm{w}}/r-(M+2m)g\sin\theta}{M+3m}$；(3) $a(0^\circ)\approx 5.6\ \mathrm{m/s^2}$，$\mu_{min}(0^\circ)\approx 0.95$；$a(30^\circ)\approx 0.66\ \mathrm{m/s^2}$，$\mu_{min}(30^\circ)\approx 1.1$

详解

(1) 第（1）问：前后轮正压力与最大安全加速度 取 x 沿斜面向上、y 垂直斜面向外。整体沿斜面：地面摩擦力总和 $f_{\mathrm{f}}+f_{\mathrm{r}}=(M+2m)(a+g\sin\theta)$；法向 $N_{\mathrm{f}}+N_{\mathrm{r}}=(M+2m)g\cos\theta$。对过车身质心（离轮轴平面 h、离地面 $h+r$）的水平轴写体系角动量定理：四个车轮自转角动量的大小为 mrv（每轮 $\frac{m}{2}\cdot\frac{r^2}{2}\cdot\frac{v}{r}$，共四轮），方向随加速而变化，$\dfrac{dH}{dt}=-mra$（取俯视逆时针为正）。外力对质心的力矩：$\dfrac{L}{2}(N_{\mathrm{f}}-N_{\mathrm{r}})+(h+r)(f_{\mathrm{f}}+f_{\mathrm{r}})-2mgh\sin\theta$（末项来自两对车轮重力对质心的力矩）。于是

$$\frac{L}{2}(N_{\mathrm{f}}-N_{\mathrm{r}})=-mra-(h+r)(M+2m)(a+g\sin\theta)+2mgh\sin\theta$$

与法向方程联立即得答案中的 N_{f}、N_{r}。加速时 N_{f} 减小、N_{r} 增大（载荷后移），物理上自洽。令 $N_{\mathrm{f}}=0$ 解出

$$a_{\mathrm{s}}=\frac{g\left[\frac{L}{2}(M+2m)\cos\theta+((h+r)(M+2m)-2mh)\sin\theta\right]}{(h+r)(M+2m)-mr}$$

此后始终取 $a<a_{\mathrm{s}}$。

(2) 第（2）问：由发动机力矩求加速度 前轮不受驱动力矩，滚动条件 $a=\alpha r$ 与转动方程给出地面摩擦 $f_{\mathrm{f}}=-\dfrac{ma}{2}$（阻碍被推着转的前轮）。后轮受顺时针驱动力矩 τ_{w}，转动方程 $rf_{\mathrm{r}}-\tau_{\mathrm{w}}=-\dfrac{mr^2}{2}\cdot\dfrac{a}{r}$ 给出 $f_{\mathrm{r}}=\dfrac{\tau_{\mathrm{w}}}{r}-\dfrac{ma}{2}$。代入整体沿斜面方程：

$$-ma+\frac{\tau_{\mathrm{w}}}{r}=(M+2m)(a+g\sin\theta)$$

解得

$$a=\frac{\tau_{\mathrm{w}}/r-(M+2m)g\sin\theta}{M+3m}$$

(3) 第（3）问：A 型车的数值结果 变速比 $r_i = 10$、效率 100%，故轮上力矩 $\tau_w = r_i\tau = 10 \times 4.0 \times 10^2 = 4.0 \times 10^3$ N· m；车轮质量可忽略（$m \to 0$）。水平地面 $\theta = 0$：

$$a(0^\circ) = \frac{4.0 \times 10^3/0.40}{1.8 \times 10^3} \approx 5.6\ \text{m/s}^2$$

此时由（1）（$m \to 0$）$N_r = \dfrac{Mg}{2} + \dfrac{(h+r)Ma}{L} = 8820 + 1725 \approx 1.05 \times 10^4$ N，驱动摩擦集中在后轮 $f_r = \tau_w/r = 1.0 \times 10^4$ N，故

$$\mu_{min}(0^\circ) = \frac{f_r}{N_r} \approx \frac{10000}{10545} \approx 0.95$$

30 度上坡：

$$a(30^\circ) = \frac{1.0 \times 10^4 - 1.8 \times 10^3 \times 9.8 \times 0.5}{1.8 \times 10^3} \approx 0.66\ \text{m/s}^2$$

此时 $N_r = \dfrac{Mg\cos 30^\circ}{2} + \dfrac{(h+r)M(a + g\sin 30^\circ)}{L} \approx 7637 + 1724 \approx 9.36 \times 10^3$ N，

$$\mu_{min}(30^\circ) = \frac{10000}{9361} \approx 1.1$$

数值保留两位有效数字。

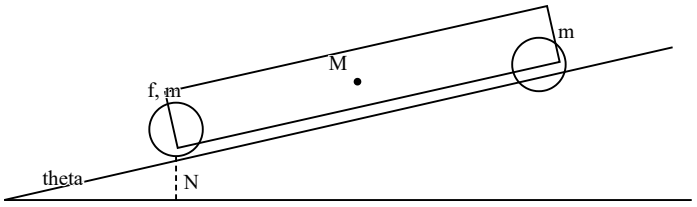


fig 7-1 simplified car on incline with front and rear wheels

体系对质心的角动量定理必须计入四轮自转角动量的变化（$-mra$ 项），漏掉它会使 N_f、N_r 的加速度修正项出错；a_s 表达式中方括号内两项分别来自重力沿斜面分量与法向分量的贡献。第（3）问中 $\mu_{min}(30^\circ) \approx 1.1$ 大于 1，说明该坡度下已接近附着极限。

8. 计算题

答案 (1) $\tau(\omega)=\tau_{max}\left(1-\dfrac{\omega}{\omega_{max}}\right)$，$P_{max}=\dfrac{1}{4}\tau_{max}\omega_{max}$；(2) $v(t)=\dfrac{r\omega_{max}}{r_i}\left(1-e^{-t/\tau_c}\right)$，$\tau_c=\dfrac{r^2(M+3m)\omega_{max}}{r_i^2\tau_{max}}$；(3) $t\approx 6.1\ \mathrm{s}$，电池能量 $\approx 1.1\ \mathrm{kWh}$，效率 $\approx 17\%$

详解

(1) 第（1）问：电机特性曲线 动子线圈在磁场中转动产生反电动势 $e=Blr_{\mathrm{c}}\omega$，回路电流 $I=\dfrac{V-e}{R_{\mathrm{c}}+R_{\mathrm{i}}}$，输出力矩 $\tau=Blr_{\mathrm{c}}I$。记 $K=Blr_{\mathrm{c}}$、$R_T=R_{\mathrm{c}}+R_{\mathrm{i}}$：

$$\tau(\omega)=\frac{K(V-K\omega)}{R_T}$$

令 $\omega=0$ 得 $\tau_{max}=\dfrac{KV}{R_T}$；令 $\tau=0$ 得 $\omega_{max}=\dfrac{V}{K}$。于是可用端点量表示：

$$\tau(\omega)=\tau_{max}\left(1-\frac{\omega}{\omega_{max}}\right)$$

输出功率 $P=\tau\omega=\dfrac{K(V-K\omega)\omega}{R_T}$ 在 $\omega=\dfrac{\omega_{max}}{2}$ 处最大：

$$P_{max}=\frac{\tau_{max}\omega_{max}}{4}$$

(2) 第（2）问：车速随时间的变化 变速比 r_i、效率 100%：轮上力矩 $\tau_{\mathrm{w}}=r_i\tau$，电机转速 $\omega=r_i\dfrac{v}{r}$。由题给 $a=\dfrac{\tau_{\mathrm{w}}/r}{M+3m}$：

$$\frac{dv}{dt}=\frac{r_i\tau_{max}}{r(M+3m)}\left(1-\frac{r_i v}{r\omega_{max}}\right)=A\left(1-\frac{v}{v_\infty}\right)$$

其中 $A=\dfrac{r_i\tau_{max}}{r(M+3m)}$，$v_\infty=\dfrac{r\omega_{max}}{r_i}$。由 $v(0)=0$ 积分：

$$v(t)=v_\infty\left(1-e^{-t/\tau_c}\right),\qquad \tau_c=\frac{v_\infty}{A}=\frac{r^2(M+3m)\omega_{max}}{r_i^2\tau_{max}}$$

(3) 第（3）问：加速时间、电池能量与效率 由 $P_{max}=\dfrac{\tau_{max}\omega_{max}}{4}$ 得 $\omega_{max}=\dfrac{4\times 2.0\times 10^{5}}{4.0\times 10^{2}}=2.0\times 10^{3}\ \text{rad/s}$，$v_\infty=\dfrac{0.40\times 2000}{10}=80\ \text{m/s}$（车轮质量可忽略，$M+3m\approx M=1.8\times 10^{3}\ \text{kg}$）。$A=\dfrac{10\times 400}{0.40\times 1800}=5.56\ \text{m/s}^2$，$\tau_c=\dfrac{80}{5.56}=14.4\ \text{s}$。$v_f=100\ \text{km/h}=27.8\ \text{m/s}<v_\infty$，故

$$t=-\tau_c\ln\left(1-\frac{v_f}{v_\infty}\right)=14.4\ln\frac{80}{52.2}\approx 6.1\ \text{s}$$

电池输出功率：由 $I=\dfrac{\tau}{K}$（τ 为电机力矩）与 $K=\dfrac{V}{\omega_{max}}$，得 $P_\text{b}=VI=\tau\omega_{max}$，与转速无关地正比于即时力矩。于是电池能量

$$E_\text{b}=\int \tau\,\omega_{max}\,dt=\omega_{max}\int\frac{\tau_\text{w}}{r_i}dt=\frac{\omega_{max}Mr}{r_i}v_f=\frac{2.0\times 10^{3}\times 1.8\times 10^{3}\times 0.40}{10}\times 27.8\approx 4.0\times 10^{6}\ \text{J}\approx 1.1\ \text{kWh}$$

机械能增量（车轮质量忽略）

$$\Delta E_k=\frac{1}{2}Mv_f^2\approx 6.9\times 10^{5}\ \text{J}$$

效率

$$\eta=\frac{\Delta E_k}{E_\text{b}}\approx\frac{6.9\times 10^{5}}{4.0\times 10^{6}}\approx 17\%$$

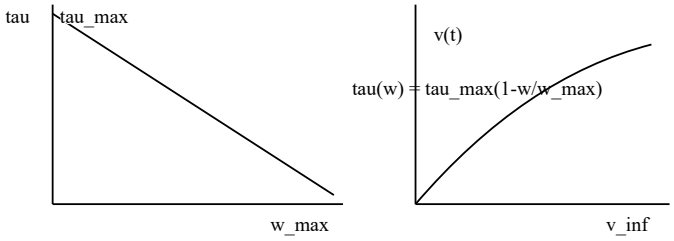


fig 8-1 torque-speed line of dc motor and v-t curve

关键代数关系：电池功率 $P_\text{b}=VI=\tau\omega_{max}$（$\tau$ 为电机力矩），因此低速大扭矩阶段电池输出极大而输出机械功率有限，这正是效率只有约 17% 的原因；若保留车轮质量，M 处应换成 $M+3m$。数值均保留两位有效数字。