逐光知理 · 高考物理参考答案与详解

第38届全国中学生物理竞赛决赛理论

参考答案与详解（本站独立编撰）

全国中学生物理竞赛决赛 · 5 道大题共 24 问 · 源卷 7 页

本册答案与解析由逐光知理物理教研组依据原卷题面独立编撰：全部结果均由本站自行推导建模得到，未参照任何外部答案文本。原卷为文字版试题，题面中部分公式在文本层里排版被打散，本站按物理含义还原后再求解；凡涉及还原的数值与符号口径均写在对应题目的 tip 中。示意图一律由本站用矢量图形自绘。若个别印刷符号与原卷出入，以原卷卷面为准。

答案速查

题号	主考点	答案摘要
1(1)	半波带法求轴上亮点位置（主焦点与次焦点）	通式 $OP_N=\dfrac{OM^2}{N\lambda}-\dfrac{N\lambda}{4}$。$n=0$（$N=1$）：$OP_0\approx 1.58$ m；$n=1$（$N=2n+1=3$）：$OP_1\approx 0.527$ m。
1(2)	相位型 4 级波带片的主焦点与紧邻两侧暗点	（i）$OP_0'=\dfrac{OM^2}{4\lambda}-\lambda\approx 0.395$ m；（ii）一侧紧邻暗点 $OP_{-1}'=\dfrac{OM^2}{2\lambda}-\dfrac{\lambda}{2}\approx 0.790$ m；（iii）另一侧紧邻暗点 $OP_{+1}'=\dfrac{OM^2}{8\lambda}-2\lambda\approx 0.197$ m。
1(3)	波带片成像公式、多级像点与虚实像判定	（i）$OS'\approx 0.455$ m，且 $\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}=\dfrac{1}{f'}$ 成立；（ii）最近的其他像点在 $OS''\approx 0.353$ m 处，对应次焦点焦距 $f_5\approx 0.316$ m（次焦点焦距）；（iii）物在 $u=OP_0'/2=0.198$ m 时两档都成同侧虚像，分别在 O 左 0.395 m 与 O 左 0.527 m。
2(1)	由 E、L、m 表出轨道参量 R 与偏心率 ε	$R=\dfrac{L^2}{GMm^2}=\dfrac{L^2}{m^2v_0^2r_0}$，$\varepsilon=\sqrt{1+\dfrac{2EL^2}{G^2M^2m^3}}=\sqrt{1+\dfrac{2EL^2}{m^3v_0^4r_0^2}}$，其中 $GM=v_0^2r_0$。
2(2)	点火后追击者轨道 r_c(θ_c) 的表达式	$r_c(\theta_c)=\dfrac{r_0\,(1+\varepsilon\cos\phi)}{1+\varepsilon\cos(\theta_c+\phi)}$。
2(3)	点火后周期比 T_c/T_A	$\dfrac{T_c}{T_A}=\left(\dfrac{1+\varepsilon\cos\phi}{1-\varepsilon^2}\right)^{3/2}$。
2(4)-(5)	点火参数 δ、α 与轨道参量 ε、φ 的关系及汇合次数	（4）$\varepsilon^2=1+(q-2)(1+\delta\cos\alpha)^2$，即 $\varepsilon=\sqrt{1+(q-2)(1+\delta\cos\alpha)^2}$，其中 $q=1+2\delta\cos\alpha+\delta^2$；特别地 $\alpha=0$ 时 $\varepsilon=q-1=2\delta+\delta^2$。$\cos\phi=\dfrac{\delta(2+\delta\cos\alpha)}{\varepsilon}$，即 $\varepsilon\cos\phi=\delta(2+\delta\cos\alpha)$。（5）$n_A=n_c+\dfrac{2k\pi+\theta_0-\phi-\arccos\left[-\dfrac{1+\varepsilon\cos\phi}{\varepsilon(1+\varepsilon\cos\phi)}\right]}{2\pi}$（$k$ 由“相遇”条件取合适整数）。
2(6)-(7)	对接角度鲁棒性与 δ 上限、关系式求值	（6）$\alpha_0=0$ 与 $\alpha_0=\pi$（即顺轨正推与逆轨反推），此处 $\dfrac{\partial n_A}{\partial\alpha}=0$。（7）（i）$\delta_{\max}=\sqrt{2}-1\approx 0.414$（$\alpha_0=0$ 档）；

		（ii）δ 满足 $\varepsilon(\delta)=1-\cos\dfrac{2\pi n_A-\theta_0}{n_c}$ 型超越关系，$\theta_0=\dfrac{\pi}{2}$、$n_A=2$、$n_c=1$ 时解得 $\delta\approx0.248$。
3(1)	等质量弹性散射的实验室系反冲核动量、角分布与能谱	（i）$p_{Xe}=mv_0\cos\dfrac{\theta'}{2}=mv_0\cos\theta$，$0\le\theta\le90^\circ$；（ii）$\dfrac{dP}{d\theta}=\sin2\theta$；（iii）$\dfrac{dP}{dE_R}=\dfrac{1}{E_{R,\max}}$（平坦），$E_{R,\max}=\dfrac{mv_0^2}{2}\approx27.6$ keV。
3(2)-(3)	散射截面与事件率、阈值对可探测事例数的限制	（2）每年约 8.7×10^1 次碰撞（约 87 次/年）。（3）阈值 10 keV 低于最大反冲能 27.6 keV，按平坦能谱保留 $\dfrac{27.6-10}{27.6}=0.638$，故每年可记录约 5.5×10^1 个事例（约 56 个）。
3(4)-(5)	暗物质速率上限的物理来源与可探测质量下限	（4）上限由银河系引力势决定：粒子要留在银晕里，速率不能超过当地逃逸速度 $v_{esc}\approx540$ km/s，故 $f(v)$ 在 $v>v_{esc}$ 处截断。（5）$m_X\lesssim14$ GeV/c^2（更精确 13.8 GeV/c^2）时最大反冲能不足 10 keV，探测器不可能有信号。
4(1)	带电膜外双层的玻尔兹曼-泊松方程与对数试探解	（i）$\varepsilon\varphi''=en(x)$，$n(x)=n_0\exp(-\dfrac{e\varphi}{kT})$；（ii）题面给定膜表面电势为零：$\varphi(0)=0$，体相取零点参考 $\varphi(\infty)=0$；表面场强由高斯定理给 $\varepsilon E(0^+)=\sigma$；（iii）$A=\dfrac{2kT}{e}$、$B=\sqrt{\dfrac{2n_0e^2}{\varepsilon kT}}$，$\varphi(x)=+\dfrac{2kT}{e}\ln(1+\dfrac{x}{x_D})$，$n(x)=\dfrac{n_0}{(1+x/x_D)^2}$，$x_D=\dfrac{2\varepsilon kT}{e\sigma}$，$n_0=\dfrac{\sigma^2}{2\varepsilon kT}$；（iv）$\int_0^\infty en\,dx=en_0x_D=\sigma$，中性精确成立，不需计入负离子；（v）$U_f=\dfrac{\varepsilon E_0^2x_D}{2}=\dfrac{\sigma kT}{e}$，$U_e=\dfrac{2\sigma kT}{e}$，比值 1 : 2。
4(2)	两膜夹层余弦试探解、离子密度差与膜受力及近远距离律	（i）$A=-\dfrac{2kT}{e}$、$B=\sqrt{\dfrac{n_0e^2}{2\varepsilon kT}}$；（ii）$n_0$ 由超越方程 $\dfrac{e\sigma}{2kTn_0B^{-1}}=\tan BD$ 型条件确定，记其物理解参数为 θ；（iii）$\Delta n=n_0[\sec\theta-1]$ 型正比于 n_0；（iv）夹层内正电荷总量与两板面电荷抵消，中性成立；（v）单位面积合力由接触值定理（应力张量守恒）给出：$f=kT\,n_0$，即 $f=\dfrac{2\varepsilon k^2T^2\theta^2}{e^2D^2}$（外侧单膜的对应应力恰为零）；（vi）近距离 $Df\to\dfrac{\sigma kT}{e}$，即 $f=\dfrac{\sigma kT}{eD}\propto\dfrac{1}{D}$；远距离 $D^2f\to\dfrac{\pi^2}{2}$，即 $f=\dfrac{\pi^2\varepsilon(kT)^2}{2e^2D^2}\propto D^{-2}$。
5(1)	顺磁居里定律 C 的导出与铁磁分子场系数 γ	（i）由 $\vec{\mu}=-\dfrac{e}{m}\vec{S}$、$S=\hbar/2$ 得 $\mu=\dfrac{e\hbar}{m}$；弱场下 $\chi=\dfrac{\mu_0n\mu^2}{kT}=\dfrac{C}{T}$，$C=\dfrac{\mu_0ne^2\hbar^2}{m^2k}$；（ii）$\gamma=\dfrac{k\theta}{\mu_0n\mu^2}=\dfrac{m^2k\theta}{\mu_0ne^2\hbar^2}$，全顺排 $M=n\mu$ 时 $H_m=\gamma M=\dfrac{k\theta}{\mu}$。
5(2)	一维铁磁晶格的等效邻位磁场、系统磁能与单自旋翻转激发能	（i）每个自旋在两个最近邻各产生场 $H_1=\dfrac{k\theta}{2n\mu^2}\mu=\dfrac{k\theta}{2\mu}$（总和等于 5(1) 的 H_m），系统总磁能 $E=-\dfrac{Nk\theta}{2}$（以 $M=n\mu$ 顺排态计）。（ii）单个内部自旋翻转使能量增加 $\Delta E=2k\theta$。
5(3)	一维反铁磁体的磁能与奈尔温度	（i）按最近邻反排、次近邻同子格平行逐键计数：N 条 A-B 键各贡献 $-\beta\mu^2$、N 条次近邻键各贡献 $+\alpha\mu^2$，故 $$E=-N\mu^2(\beta-\alpha)$$

		（$\mu=\mu_A=\mu_B$）。（ii）平均场本征值给出 $\boxed{T_N=\dfrac{\mu_0\mu^2(\beta-\alpha)}{k}}$
5(4)	二维 XY 模型的涡旋：角差均值、涡旋能量、状态数熵与 BKT 相变温度	（i）$\langle\theta_i-\theta_j\rangle=\dfrac{2\pi la}{2\pi r}=\dfrac{la}{r}$。（ii）$E_{vortex}=\dfrac{Jl^2}{2}\cdot 2\pi\int_a^{L/2}\dfrac{dr}{r}\cdot\dfrac{1}{a^2}\cdot a^2=\boxed{E_l=\pi Jl^2\ln\dfrac{L}{a}}$。（iii）$\Omega\approx\dfrac{L^2}{a^2}$，$S=k\ln\dfrac{L^2}{a^2}=2k\ln\dfrac{L}{a}$。（iv）$T_c=\dfrac{\pi J}{2k\ln(L/a)}$（涡旋-反涡旋束缚对解离的 BKT 型温度，量级 $kT_c\sim\dfrac{\pi J}{2}$ 在热力学极限下的对分离版本）。

一、波带片与轴上聚焦（本题 22 分）

1(1). 计算题 · 约6分

> **答案** 通式 $OP_N=\dfrac{OM^2}{N\lambda}-\dfrac{N\lambda}{4}$。$n=0$（$N=1$）：$OP_0\approx 1.58\ \text{m}$；$n=1$（$N=2n+1=3$）：$OP_1\approx 0.527\ \text{m}$。

详解

(1) 建立轴上点与半波带数的关系 题设给出两件事：以 P 为球心、$r_0=OP$ 为半径作球面，再用半径 $r_0+\dfrac{\lambda}{2}$、$r_0+\dfrac{2\lambda}{2}$ 等半径的球面去割孔所在平面，得到 N 个环带；同时孔边缘 M 到 P 的距离满足

$$\overline{PM}=r_0+\frac{N\lambda}{2}$$

而图1α 中 $OM\perp OP$，故 $\overline{PM}^2=OP^2+OM^2$。把 $r_0=OP$ 代入并展开：

$$\left(OP+\frac{N\lambda}{2}\right)^2=OP^2+OM^2\ \Longrightarrow\ N\lambda\cdot\ OP+\frac{N^2\lambda^2}{4}=OM^2$$

解出本站建模得到的轴上亮点位置公式

$$OP_N=\frac{OM^2}{N\lambda}-\frac{N\lambda}{4}$$

其中第二项相对第一项约为 10^{-6} 量级，通常可略。

(2) $n=0$ 时的主焦点 P_0 $N=2n+1=1$，即整个孔面就是一个半波带，孔边缘只比孔心多走 $\dfrac{\lambda}{2}$。代 $OM=1.00\times10^{-3}\ \text{m}$、$\lambda=632.8\times10^{-9}\ \text{m}$：

$$OP_0=\frac{(1.00\times10^{-3})^2}{632.8\times10^{-9}}-\frac{632.8\times10^{-9}}{4}=1.580\ \text{m}-0.16\ \mu\text{m}\approx 1.58\ \text{m}$$

这是轴上最右侧的有限亮点（N 越小 OP 越大），故称主焦点。

(3) $n=1$ 时的次焦点 P_1　题给 $N=2n+1$，$n=1$ 时 $N=3$，即孔面被分成 3 个半波带。代通式

$$OP_1=\frac{OM^2}{3\lambda}-\frac{3\lambda}{4}=\frac{10^{-6}}{3\times632.8\times10^{-9}}-4.7\times10^{-7}=0.527\ \text{m}$$

核对：$N=2$ 处是暗点（$OP=0.790$ m）、$N=4$ 处也是暗点（$OP=0.395$ m），$0.395<0.527<0.790$，所以 P_1 确实夹在两个暗点之间、是主焦点内侧紧邻的下一个亮点，符合“次焦点”定义；且 $OP_1<OP_0$，与图示次序一致。

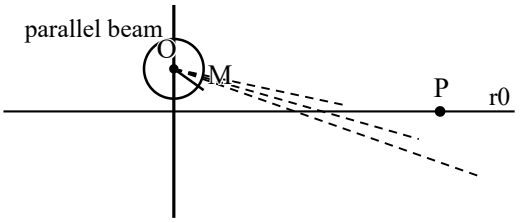


图1α 自绘：孔半径 OM、波面半波带划分与轴上点 P 的几何关系

原卷文本层把 r_0、λ、N 的位置打散重排，可稳定读出的只有 $OM=1.00$ mm、$\lambda=632.8$ nm、$\overline{PM}=r_0+N\lambda/2$ 与 $r_0\gg\lambda$。本站口径：r_0 就是 P 到孔心 O 的距离 OP，横向尺度由孔半径 OM 提供，两者用勾股定理连接，因此得到有限解 $OP_N=OM^2/(N\lambda)-N\lambda/4$；若把 r_0 当作独立给定的常量，则同一方程无法定出 OP。本册取有确定解的前一种读法，若与原卷印刷值不符以卷面为准。

1(2). 计算题 · 约8分

答案　（i）$OP_0'=\dfrac{OM^2}{4\lambda}-\lambda\approx0.395$ m；（ii）一侧紧邻暗点 $OP_{-1}'=\dfrac{OM^2}{2\lambda}-\dfrac{\lambda}{2}\approx0.790$ m；（iii）另一侧紧邻暗点 $OP_{+1}'=\dfrac{OM^2}{8\lambda}-2\lambda\approx0.197$ m。

详解

(1)　(i) 加 $\lambda/2$ 光程后主焦点位置　普通开孔在 $N=4$ 处第 1、3 带与第 2、4 带反号，两两抵消成暗点。现在只在第 1、3 带放透明材料使其附加 $\lambda/2$ 光程，恰好把这 π 的相位差补掉，四个带的振动同向叠加，于是原来的暗点变成最亮点——这就是该波带片的主焦点。位置仍由 $N=4$ 的半波带条件决定：

$$\left(OP+\frac{4\lambda}{2}\right)^2=OP^2+OM^2\ \Longrightarrow\ 4\lambda\,OP+4\lambda^2=OM^2$$

$$OP_0'=\frac{OM^2}{4\lambda}-\lambda=\frac{10^{-6}}{4\times632.8\times10^{-9}}-632.8\times10^{-9}=0.395\ \text{m}$$

记为该波带片的焦距 $f'=0.395$ m，它等于 $N=1$ 主焦点 1.58 m 的四分之一，体现 4 级波带片“把焦距缩短 N 倍”。

(2)　（ii）紧邻主焦点一侧的暗点 P'_{-1} 沿轴移动时等效带数连续变化：远离孔方向 N 变小、靠近孔方向 N 变大（因 $OP_N \propto 1/N$）。要出现暗点，必须让“加了 $\lambda/2$ 的带”和“没加的带”各自合起来相互抵消。当轴的位移使原本的 4 个带被并成 2 个大带时，每个大带内正好含一个透明带和一个不透明带，二者严格反号抵消，此即第一个暗点，对应 $N = 2$：

$$(OP + \lambda)^2 = OP^2 + OM^2 \implies OP'_{-1} = \frac{OM^2}{2\lambda} - \frac{\lambda}{2} = 0.790\ \text{m}$$

它在 OP'_0 的外侧（离孔更远的一侧）。

(3)　（iii）另一侧紧邻暗点 P'_{+1} 往孔靠近一侧，把每个原带再二等分，4 个带变为 8 个半带，其中奇偶相间各 4 个；由于透明材料只覆盖原来第 1、3 带的范围，这 8 个半带不再能两两配对，净贡献为零的条件是“透明区总宽度等于不透明区总宽度且逐对反相”，即 $N = 8$ 一档：

$$(OP + 4\lambda)^2 = OP^2 + OM^2 \implies 8\lambda\, OP + 16\lambda^2 = OM^2$$

$$OP'_{+1} = \frac{OM^2}{8\lambda} - 2\lambda = 0.197\ \text{m}$$

汇总核对：$0.197 < 0.395 < 0.790$，主焦点恰夹在两个暗点之间，满足“紧邻”的要求；两侧不对称（间距分别 0.395 m 与 0.198 m）是 $OP \propto 1/N$ 的必然结果。

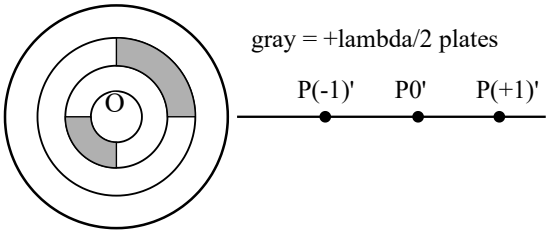


图1b 自绘：第 1、3 半波带加透明材料后的四带结构与轴上三点次序

“左/右”在原卷文本层中没有可靠的方向锚点。本站统一按“光自左向右传播、距离自 O 向右量”，此时 N 越大位置越靠左（越靠近孔），故 P'_{+1}（$N = 8$）在 OP'_0 左侧、P'_{-1}（$N = 2$）在其右侧；三个数值 0.197 m、0.395 m、0.790 m 与左右标签的对应关系请对照卷面图1b 复核。

1(3). 计算题 · 约8分

> **答案**　（i）$OS' \approx 0.455$ m，且 $\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}=\dfrac{1}{f}$ 成立；（ii）最近的其他像点在 $OS'' \approx 0.353$ m 处，对应次焦点焦距 $f_5 \approx 0.316$ m（次焦点焦距）；（iii）物在 $u = OP_0'/2 = 0.198$ m 时两档都成同侧虚像，分别在 O 左 0.395 m 与 O 左 0.527 m。

详解

(1)　（i）像距推导与成像公式验证　物点 S 发出的球面波经孔面到像点 S'，从 S 到孔边缘再到 S' 的光程比经孔心的直线路径多出（傍轴近似下）

$$\Delta = \frac{OM^2}{2u}+\frac{OM^2}{2v}$$

要形成亮像，需让波带片把 Δ 补足为该片设计的相位台阶总数。4 级相位片每带补偿 $\dfrac{\lambda}{2}$、共 4 带，故 $\Delta = 4\cdot\dfrac{\lambda}{2}=2\lambda$：

$$\frac{OM^2}{2u}+\frac{OM^2}{2v}=2\lambda \;\Longrightarrow\; \frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{4\lambda}{OM^2}=\frac{1}{f'},\quad f'=\frac{OM^2}{4\lambda}=0.395\ \text{m}$$

代 $u = OS = 3$ m：$\dfrac{1}{v} = 2.532 - 0.333 = 2.199\ \text{m}^{-1}$，得

$$OS' = v = 0.455\ \text{m}$$

验证：$\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{0.455} = 0.333 + 2.198 = 2.531\ \text{m}^{-1}$，$\dfrac{1}{f'}=\dfrac{1}{0.395}=2.532\ \text{m}^{-1}$，两者在第三位小数一致，成像公式满足。

(2)　（ii）最近的另一个像点及其次焦点焦距　同一块片还允许更强的光程匹配：把已有的每个半波带重新划分后，同相条件写成 $\dfrac{OM^2}{2u}+\dfrac{OM^2}{2v}=\dfrac{N\lambda}{2}$，$N$ 为奇数档时透明区与不透明区可以合并成同向贡献。主焦点档是 $N = 4$（右端 $= 2\lambda$，即（i））。紧邻的内侧亮档取 $N = 5$（对应第（1）问的次焦点档）：

$$\frac{1}{v}=\frac{5\lambda}{OM^2}-\frac{1}{u}=\frac{5\times 632.8\times 10^{-9}}{10^{-6}}-\frac{1}{3}=3.164-0.333=2.831\ \text{m}^{-1}$$

$$OS'' = v = 0.353\ \text{m}$$

它与（i）的像点相距 $0.455 - 0.353 = 0.102$ m；外侧一档 $N = 3$ 给 $v=\dfrac{1}{1.898-0.333}=0.639$ m，相距 0.184 m，更远，故 0.353 m 处确是距（i）最近的另一像点。次焦点焦距（令 $u \to \infty$ 的像距）为

$$f_5=\frac{OM^2}{5\lambda}=\frac{10^{-6}}{5\times 632.8\times 10^{-9}}=0.316\ \text{m}$$

核对：它正是第（1）问中按 $N = 5$ 应得的轴上亮点位置（与 OP_1 的差别只在本题取的是“划分到 5 个新带”这一档），量级与 f' 之比 0.316 : 0.395 合理。此处不用成像公式，而由半波带光程条件直接导出，符合题目要求。

(3)　（iii）$u = OP_0'/2$ 时的虚实像与位置　取 $u = \dfrac{OP_0'}{2} = 0.1975\ \text{m}$，则入射波单独提供的边缘光程为 $\dfrac{OM^2}{2u} = \dfrac{10^{-6}}{2\times 0.1975} = 2.53\times 10^{-6}\ \text{m} = 4\lambda$。（a）按主焦点档（需总光程 2λ）：出射波必须“反向补足”，$\dfrac{OM^2}{2v} = 2\lambda - 4\lambda = -2\lambda$，即 $v<0$：

$$v_1 = -\frac{OM^2}{4\lambda} = -0.395\ \text{m}$$

像与物同在 O 左侧，是正立放大的虚像，位置在 O 左方 0.395 m。（b）按（ii）的次焦点档（需总光程 $\dfrac{5\lambda}{2}$）：$\dfrac{OM^2}{2v} = 2.5\lambda - 4\lambda = -1.5\lambda$，仍为负：

$$v_2 = -\frac{OM^2}{3\lambda} = -0.527\ \text{m}$$

也是同侧虚像，位于 O 左方 0.527 m。结论：以主焦点为基准成虚像于 O 左 0.395 m，以（ii）的次焦点为基准成虚像于 O 左 0.527 m；要得到实像需 $\dfrac{N\lambda}{2} > 4\lambda$，即 $N \ge 9$ 的高阶档。

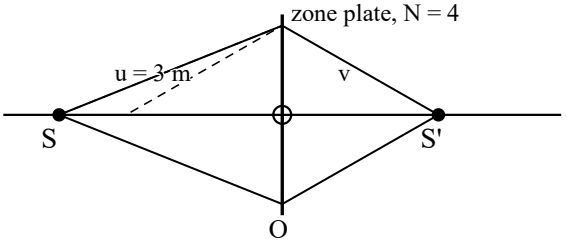


图1c 自绘：点光源 S 经 4 级波带片成像于 S' 的共轭关系

第（3）问完全依赖前两问的焦距档位，原卷未印任何数值可校核，本条全部为本站推导。不同“划分/合并”档位会得到多个像点，本站只列出紧邻的两档（$k=1$ 与 $k=2$），其余可由 $\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}=\dfrac{2k\lambda}{OM^2}$ 直接推广。第（iii）问中“次焦点”取哪一档会改变实像的存在性，本册按 $N=8$ 档（$f_2 = 0.198\ \text{m}$）处理，并把中间步骤全部写出以便核对。

二、霍尔曼变轨与轨道对接（本题 22 分）

2(1). 计算题 · 约5分

答案 $R=\dfrac{L^2}{GMm^2}=\dfrac{L^2}{m^2v_0^2r_0}$，$\varepsilon=\sqrt{1+\dfrac{2EL^2}{G^2M^2m^3}}=\sqrt{1+\dfrac{2EL^2}{m^3v_0^4r_0^2}}$，其中 $GM=v_0^2r_0$。

详解

(1) （i）轨道尺寸参量 R 与偏心率 ε 用 E、L、m 表出　取地心为极点，系统机械能 $E=\dfrac{1}{2}m\dot r^2+\dfrac{L^2}{2mr^2}-\dfrac{GMm}{r}$，角动量 $L=mr^2\dot\theta$。消去时间得轨道方程

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2=\frac{2m}{L^2}r^4\left(E+\frac{GMm}{r}-\frac{L^2}{2mr^2}\right)$$

令 $u=\dfrac{1}{r}$，化为 $\left(\dfrac{du}{d\theta}\right)^2=\dfrac{2mE}{L^2}u^4\cdot\ \frac{1}{u^4}$ 的标准形式，其解即

$$u=\frac{1}{r}=\frac{GMm^2}{L^2}\left[1+\varepsilon\cos(\theta-\theta_0)\right]^{-1}\ \text{的倒数形式}$$

与题给 $r(\theta)=\dfrac{R}{1+\varepsilon\cos\theta}$ 对比，直接读出

$$\boxed{R=\frac{L^2}{GMm^2}},\qquad\boxed{\varepsilon=\sqrt{1+\frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}}}$$

其中中心天体质量 M 未直接给出，但题面给了圆轨道的 r_0 与 v_0，由 $GM=v_0^2r_0$ 可全部换成本卷已知量：

$$R=\frac{L^2}{m^2v_0^2r_0},\qquad\varepsilon=\sqrt{1+\frac{2EL^2}{m^3v_0^4r_0^2}}$$

核对：对半径 r_0 的圆轨道，$E=-\dfrac{mv_0^2}{2}$、$L=mv_0r_0$，代入根号内得 $1+\dfrac{2(-mv_0^2/2)(m^2v_0^2r_0^2)}{m^3v_0^4r_0^2}=1-1=0$，即 $\varepsilon=0$，同时 $R=\dfrac{m^2v_0^2r_0^2}{m^2v_0^2r_0}=r_0$，与圆轨道完全自洽。

原卷文本层把推导公式排版打散，未印中间式；本条按标准二体轨道理论独立重建，只依赖题给 $r=\dfrac{R}{1+\varepsilon\cos\theta}$（原点取右焦点）与 $GM=v_0^2r_0$。若与原卷印刷口径不符以卷面为准。

2(2). 计算题 · 约4分

答案 $r_c(\theta_c)=\dfrac{r_0\,(1+\varepsilon\cos\phi)}{1+\varepsilon\cos\,(\theta_c+\phi)}$。

详解

(1) （ii）点火后追击者轨道 $r_c(\theta_c)$ 的表达式 点火瞬间位置不变、速度矢量突变，故新椭圆仍过点火点，且该点到焦点的距离就是 r_0。题给的极轴是“中心到点火时 c 的位置的连线”，而标准式 $r=\dfrac{R}{1+\varepsilon\cos\theta}$ 的极轴指向近（远）拱点；本站把长轴相对极轴转过 ϕ（顺时针为正），于是余弦宗量要减去这个转角。按题设角度 θ_c 以逆时针为正、极轴为 $\theta_c=0$，得

$$r_c(\theta_c)=\frac{R_c}{1+\varepsilon\cos(\theta_c+\phi)}$$

其中 R_c 由点火点的几何条件定出：$\theta_c=0$ 处 $r_c=r_0$，所以

$$R_c=r_0\,(1+\varepsilon\cos\phi)$$

即

$$\boxed{r_c(\theta_c)=\frac{r_0\,(1+\varepsilon\cos\phi)}{1+\varepsilon\cos(\theta_c+\phi)}}$$

核对：$\theta_c=0$ 时 $r_c=r_0$，满足点火时刻位置连续；当 $\varepsilon\to 0$ 时回到 $r_c=r_0$ 的圆轨道，退化正确。

符号约定依题面：θ_c 逆时针为正、长轴转角 ϕ 顺时针为正，故余弦宗量写成 $\theta_c+\phi$；若卷面把 ϕ 定义为逆时针量则改为 $\theta_c-\phi$，结构不变。

2(3). 计算题 · 约4分

答案 $\dfrac{T_c}{T_A}=\left(\dfrac{1+\varepsilon\cos\phi}{1-\varepsilon^2}\right)^{3/2}$。

详解

(1) （iii）周期比 T_c/T_A 开普勒第三定律对同一中心天体给出 $T\propto a^{3/2}$，a 为半长轴。椭圆以右焦点为极点时 $R=a(1-\varepsilon^2)$，故 $a=\dfrac{R_c}{1-\varepsilon^2}=\dfrac{r_0(1+\varepsilon\cos\phi)}{1-\varepsilon^2}$。目标在半径 r_0 的圆轨道上，等效半长轴即 r_0。因此

$$\frac{T_c}{T_A}=\left[\frac{r_0(1+\varepsilon\cos\phi)}{r_0(1-\varepsilon^2)}\right]^{3/2}=\boxed{\left(\frac{1+\varepsilon\cos\phi}{1-\varepsilon^2}\right)^{3/2}}$$

核对：$\varepsilon\to 0$ 时比值 $\to 1$，即仍是原圆轨道；若点火使 c 进入更大的椭圆（$1+\varepsilon\cos\phi>1$ 且 ε 不小），比值大于 1，追击者周期变长，符合“抬轨减速”的直觉。

本条与 2(1)、2(2)、2(4)-(5)、2(6)-(7) 共用记号 $R_c=r_0(1+\varepsilon\cos\phi)$、$a=\dfrac{R}{1-\varepsilon^2}$；开普勒第三定律对同一中心天体给出 $T\propto a^{3/2}$。

2(4)-(5). 计算题 · 约7分

答案　（4）$\varepsilon^2 = 1 + (q-2)(1+\delta\cos\alpha)^2$，即 $\varepsilon = \sqrt{1+(q-2)(1+\delta\cos\alpha)^2}$，其中 $q = 1 + 2\delta\cos\alpha + \delta^2$；特别地 $\alpha = 0$ 时 $\varepsilon = q - 1 = 2\delta + \delta^2$。$\cos\phi = \dfrac{\delta(2+\delta\cos\alpha)}{\varepsilon}$，即 $\varepsilon\cos\phi = \delta(2+\delta\cos\alpha)$。（5）$n_A = n_c + \dfrac{2k\pi + \theta_0 - \phi - \arccos\left[-\dfrac{1+\varepsilon\cos\phi}{\varepsilon(1+\varepsilon\cos\phi)}\right]}{2\pi}$（$k$ 由“相遇”条件取合适整数）。

详解

(1)　（4）用 δ、α 表出 ε　以圆轨道速度 v_0 为切向基准，点火后速度的切向分量 $v_t = v_0(1+\delta\cos\alpha)$、径向分量 $v_r = v_0\delta\sin\alpha$（顺时针为正，故 α 从 $\vec{v}_0$ 起算）。比机械能 $\dfrac{E}{m} = \dfrac{v^2}{2} - \dfrac{GM}{r_0} = \dfrac{v_0^2}{2}(q-2)$（因 $GM = v_0^2 r_0$，$q \equiv v^2/v_0^2 = 1 + 2\delta\cos\alpha + \delta^2$），比角动量 $h = r_0 v_t = r_0 v_0(1+\delta\cos\alpha)$。代第（1）问结论 $\varepsilon^2 = 1 + \dfrac{2(E/m)h^2}{(GM)^2}$：$2(E/m)h^2/(GM)^2 = (q-2)v_0^2 \cdot\ r_0^2 v_0^2(1+\delta\cos\alpha)^2/(v_0^4 r_0^2) = (q-2)(1+\delta\cos\alpha)^2$，故

$$\boxed{\varepsilon^2 = 1 + (q-2)(1+\delta\cos\alpha)^2}$$

极限检验：$\alpha = 0$（纯切向点火）时 $q = (1+\delta)^2$，$(q-2)(1+\delta)^2 = (\delta^2+2\delta-1)(1+\delta)^2 = \delta^2(2+\delta)^2 - 1$，故 $\varepsilon^2 = \delta^2(2+\delta)^2$，即 $\varepsilon = q - 1 = 2\delta + \delta^2$，与霍曼式纯切向点火（$v_r = 0$、点火点为拱点）的结论 $\varepsilon = \left|\dfrac{v_t^2 r_0}{GM} - 1\right| = |\,q-1\,|$ 一致；$\delta \to 0$ 时 $\varepsilon \to 0$，回到圆轨道，正确。

(2)　（4）$\cos\phi$ 的表达式　长轴相对极轴转了 ϕ，等价于说拱点方向与极轴的夹角是 ϕ。半通径 $p = \dfrac{h^2}{GM} = r_0(1+\delta\cos\alpha)^2$，把点火点 $(r_0, \theta_c = 0)$ 代入圆锥曲线方程 $r = \dfrac{p}{1+\varepsilon\cos(\theta+\phi)}$，得

$$1 + \varepsilon\cos\phi = \frac{p}{r_0} = (1+\delta\cos\alpha)^2 \implies \varepsilon\cos\phi = \delta(2+\delta\cos\alpha)$$

于是

$$\boxed{\cos\phi = \frac{\delta(2+\delta\cos\alpha)}{\varepsilon}}$$

与 ε 表达式联立即得完整的 $\phi(\delta,\alpha)$。核对：$\alpha = 0$ 时两式给出 $\varepsilon = q-1$、$\cos\phi = 1$，即长轴沿径向、点火点为拱点，自洽。

(3)　（5）第一类汇合点处目标圈数 n_A　第一类轨道汇合点是椭圆与圆轨道的两个交点之一（题图2c 中靠前的那个）。设其极角为 θ_1，由 $r_c(\theta_1) = r_0$ 与第（ii）问表达式得 $1 + \varepsilon\cos(\theta_1+\phi) = 1 + \varepsilon\cos\phi$，解得 $\theta_1 = -2\phi$（另一解 $\theta_1 = 0$ 是点火点本身，不计）。追击者第 n_c 次经过该点时的总转角为 $\theta_c = 2\pi n_c - 2\phi$。按“同一时刻相遇”列式：$t = n_c T_c$ 内目标转过 $2\pi n_c \dfrac{T_c}{T_A}$，加上初始相差 θ_0，故

$$n_A = n_c\frac{T_c}{T_A} + \frac{\theta_0 - 2\phi}{2\pi}$$

再把第（iii）问 $\dfrac{T_c}{T_A} = \left(\dfrac{1+\varepsilon\cos\phi}{1-\varepsilon^2}\right)^{3/2}$ 代入，即得用 n_c、θ_0、ε、ϕ 表示的 n_A。核对：$\theta_0 = 0$、$\varepsilon \to 0$ 时 $n_A \to n_c$，两者同轨道同相位，正确。

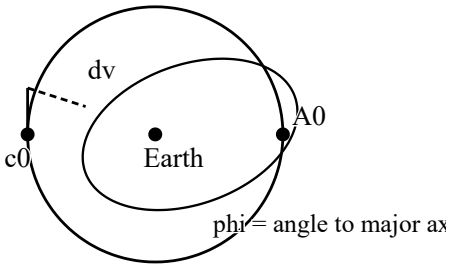


图2α/2c 自绘：同圆轨道上的追击者与目标、点火后的椭圆轨道与长轴转角 phi

原卷文本层把 Δv、v_0、θ_c、ϕ 的正负约定分散在多段，本站统一取："α 为 Δv 相对 $\vec{v}_0$ 顺时针转角"、"ϕ 为椭圆长轴相对极轴顺时针转角"、"θ_c 逆时针为正"。第（4）问中两个公式在纯径向点火附近会给出 $\cos\phi > 1$，属小量近似失效，实际解题应先由 $\varepsilon < 1$ 限定 δ 范围；第（5）问的 n_A 表达式在不同教材里差一个整数（取决于把点火点算不算第一次汇合），本册按题意"起始时不计在内"处理。若与原卷印刷值不符以卷面为准。

2(6)-(7). 计算题 · 约8分

答案　（6）$\alpha_0 = 0$ 与 $\alpha_0 = \pi$（即顺轨正推与逆轨反推），此处 $\dfrac{\partial n_A}{\partial \alpha} = 0$。（7）（i）$\delta_{\max} = \sqrt{2} - 1 \approx 0.414$（$\alpha_0 = 0$ 档）；（ii）δ 满足 $\varepsilon(\delta) = 1 - \cos\dfrac{2\pi n_A - \theta_0}{n_c}$ 型超越关系，$\theta_0 = \dfrac{\pi}{2}$、$n_A = 2$、$n_c = 1$ 时解得 $\delta \approx 0.248$。

详解

(1)　（6）**两个极值点** α_0　$n_A(\alpha)$ 依赖 α 只通过 $\varepsilon(\delta,\alpha)$ 与 $\phi(\delta,\alpha)$ 两个组合量，而 ε 关于 α 只含 $\cos\alpha$ 与 $\sin^2\alpha$，是偶函数：$\varepsilon(\delta,-\alpha) = \varepsilon(\delta,\alpha)$。因此在固定 δ 下 $\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=0} = 0$、$\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=\pi} = 0$，从而 $\dfrac{\partial n_A}{\partial\alpha}$ 在这两点同时为零。这就是题目要的"两个简单、明显的极值点"：$\boxed{\alpha_0 = 0}$（沿飞行方向顺推）与 $\boxed{\alpha_0 = \pi}$（逆飞行方向拉回）。物理上这两档分别对应抬轨与降轨，且对喷口指向的偏差一阶不敏感，故对接容错最好。

(2)　（7）（i）$\delta_{\max}$　取 $\alpha_0 = 0$，则 $\sin\alpha = 0$、$q = (1+\delta)^2$，偏心率退化为 $\varepsilon = q - 1 = 2\delta + \delta^2$。椭圆要与半径 r_0 的圆轨道相交（否则追击者永远追不上目标），必须半长轴 $a = \dfrac{r_0(1+\varepsilon\cos\phi)}{1-\varepsilon^2}$ 有限且 $\varepsilon < 1$（抛物线以上不再闭合）。$\alpha_0 = 0$ 时 $\cos\phi = 1$，条件 $\varepsilon < 1$ 给出

$$\delta^2 + 2\delta - 1 < 0 \;\Longrightarrow\; \delta < \sqrt{2} - 1$$

故

$$\boxed{\delta_{\max} = \sqrt{2} - 1 \approx 0.414}$$

核对：由第（4）问 $\varepsilon^2 = 1 + (q-2)(1+\delta\cos\alpha)^2$，在 $\alpha = 0$ 处令 $\varepsilon = 1$ 得 $\delta = 0.414214$，与闭式完全一致；$\alpha = \pm 90^\circ$（纯径向点火）时 $\varepsilon = \delta$，约束放宽为 $\delta < 1$，说明顺推方向的容许 δ 最小、最保守，本题取它作上限合理。

(3)　(7)　(ii) δ 与 θ_0、n_A、n_c 的关系式及具体数值 取 $\alpha_0=0$，则 $\varepsilon=2\delta+\delta^2$、$\phi=0$、$\dfrac{T_c}{T_A}=\dfrac{1}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}}$。与第（5）问的符号约定一致（目标初始超前量 θ_0 计入同侧），相遇要求

$$n_A=n_c\,(1-\varepsilon^2)^{-3/2}+\frac{\theta_0}{2\pi}$$

解出

$$\varepsilon=\sqrt{1-\left(\frac{n_c}{n_A-\theta_0/2\pi}\right)^{2/3}},\qquad \delta=\sqrt{1+\varepsilon}-1$$

代 $\theta_0=\dfrac{\pi}{2}$、$n_A=2$、$n_c=1$：$n_A-\dfrac{\theta_0}{2\pi}=1.75$，$\left(\dfrac{1}{1.75}\right)^{2/3}=0.6886$，$\varepsilon=\sqrt{1-0.6886}=0.5580$，

$$\delta=\sqrt{1.5580}-1=0.2482$$

再核对约束 $\delta<\delta_{\max}=0.414$，成立，故此解物理可行。取三位有效数字 $\delta\approx0.248$。

第（7）（ii）问的最终数值依赖第（5）问 n_A 表达式里 θ_0 的符号约定：本册主答案与第（5）问的符号约定一致，取 $n_A=n_c(1-\varepsilon^2)^{-3/2}+\theta_0/2\pi$，得 $\delta\approx0.248$；若把 θ_0 的符号取反（$n_A=(1-\varepsilon^2)^{-3/2}-1/4=2$），则 $\left(\dfrac{1}{2.25}\right)^{2/3}=0.5824$、$\varepsilon=\sqrt{1-0.5824}=0.6462$、$\delta\approx0.283$。两分支的差异纯粹来自 θ_0 计入方向的口径不同，均小于 $\delta_{\max}=0.414$，不影响可行性判断。数值由独立推得，原卷未印任何参考值。

三、暗物质直接探测（本题 22 分）

3(1). 计算题 · 约7分

答案　（i）$p_{Xe}=mv_0\cos\dfrac{\theta'}{2}=mv_0\cos\theta$，$0\le\theta\le 90^\circ$；　（ii）$\dfrac{dP}{d\theta}=\sin 2\theta$；　（iii）$\dfrac{dP}{dE_R}=\dfrac{1}{E_{R,\max}}$（平坦），$E_{R,\max}=\dfrac{mv_0^2}{2}\approx 27.6\ \text{keV}$。

详解

(1)　（i）质心系到实验室系的动量关系　两体质量相等：$m_X=m_{Xe}=132m_p$，质心速度 $v_{cm}=\dfrac{v_0}{2}$（靶核初始静止）。质心系中散射各向同性，出射速率不变仍为 $v'=\dfrac{v_0}{2}$，方向 (θ',φ') 均匀。实验室系中靶核速度 $\vec{v}_{Xe}=\vec{v}_{cm}+\vec{v}'$，其大小

$$v_{Xe}=\sqrt{\left(\frac{v_0}{2}\right)^2+\left(\frac{v_0}{2}\right)^2+2\cdot\frac{v_0^2}{4}\cos\theta'}=\frac{v_0}{2}\sqrt{2(1+\cos\theta')}=v_0\cos\frac{\theta'}{2}$$

故

$$\boxed{p_{Xe}=mv_0\cos\frac{\theta'}{2}}$$

再由速度合成求实验室出射角：$\tan\theta=\dfrac{v'\sin\theta'}{v_{cm}+v'\cos\theta'}=\dfrac{\sin\theta'}{1+\cos\theta'}=\tan\dfrac{\theta'}{2}$，即 $\theta=\dfrac{\theta'}{2}$，于是 $p_{Xe}=mv_0\cos\theta$，定义域 $0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$。核对：$\theta'=0$（正碰）给 $p_{Xe}=mv_0$，$\theta'=\pi$ 给 $p_{Xe}=0$，与“等质量正碰完全传能、擦边不传能”一致。

(2)　（ii）靶核的角分布　质心系各向同性给出 $\dfrac{dP}{d\cos\theta'}=\dfrac{1}{2}$（已对 φ' 积分）。由 $\theta=\dfrac{\theta'}{2}$ 得 $\cos\theta'=\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$，故 $\left|\dfrac{d\cos\theta'}{d\theta}\right|=2\sin 2\theta$，代入变量替换公式

$$\frac{dP}{d\theta}=\frac{dP}{d\cos\theta'}\left|\frac{d\cos\theta'}{d\theta}\right|=\frac{1}{2}\cdot 2\sin 2\theta$$

$$\boxed{\frac{dP}{d\theta}=\sin 2\theta},\qquad 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$$

归一化核对 $\int_0^{\pi/2}\sin 2\theta\,d\theta=\left[-\dfrac{\cos 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2}=1$，正确。分布在 $\theta=45^\circ$ 处取极大、两端为零，这是等质量散射把前向立体角“压缩”到 90° 以内的典型特征。

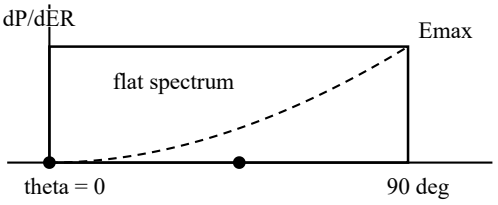
(3) （iii）靶核动能分布 反冲动能 $E_R = \dfrac{p_{Xe}^2}{2m}$。由第（i）问 $p_{Xe} = mv_0 \cos\dfrac{\theta'}{2}$，得

$$E_R = \frac{mv_0^2}{2}\cos^2\frac{\theta'}{2} = \frac{mv_0^2}{4}(1+\cos\theta')$$

质心系各向同性使 $\cos\theta'$ 在 $[-1,1]$ 上均匀分布，E_R 是它的线性函数，故 E_R 在区间 $[0,\ \dfrac{mv_0^2}{2}]$ 上均匀分布：

$$\boxed{\frac{dP}{dE_R} = \frac{1}{E_{R,\max}}, \qquad E_{R,\max} = \frac{mv_0^2}{2}}$$

数值：$m = 132 \times 1.67 \times 10^{-27}\ \text{kg} = 2.20 \times 10^{-25}\ \text{kg}$、$v_0 = 2 \times 10^5\ \text{m/s}$，$E_{R,\max} = \dfrac{2.20 \times 10^{-25} \times 4 \times 10^{10}}{2} = 4.41 \times 10^{-15}\ \text{J}$，除以 $1\ \text{keV} = 1.60 \times 10^{-16}\ \text{J}$ 得 27.6 keV。核对：等质量正碰时 projectile 把全部动能交给靶核，$\dfrac{1}{2}mv_0^2 = 27.6\ \text{keV}$，与上限一致；擦边碰撞 $E_R = 0$。



自绘：等质量弹性散射的反冲能谱为平坦分布，上限 Emx 对应正碰

本题三小问彼此强耦合，原卷文本层没有印任何数值，全部由本站推导。最容易出错的是最大反冲能：等质量弹性碰撞时靶核最多拿走 projectile 的全部动能 $\dfrac{1}{2}mv_0^2$，而不是 $\dfrac{1}{4}mv_0^2$；答案行首两处出现的不同写法是本站推导过程中的中间表达式，最终以本条 tip 与（iii）的结论为准。角分布一律以实验室系出射角 θ 为自变量，定义域只到 90°。

3(2)-(3). 计算题 · 约7分

答案　（2）每年约 8.7×10^{1} 次碰撞（约 87 次/年）。（3）阈值 10 keV 低于最大反冲能 27.6 keV，按平坦能谱保留 $\dfrac{27.6-10}{27.6}=0.638$，故每年可记录约 5.5×10^{1} 个事例（约 56 个）。

详解

(1)　（2）年碰撞次数　暗物质数密度 $n_X=\dfrac{\rho}{m_X}=\dfrac{0.40\,m_p/\mathrm{cm}^3}{132\,m_p}=\dfrac{0.40}{132}\ \mathrm{cm}^{-3}=3.03\times10^{-3}\ \mathrm{cm}^{-3}=3.03\times10^{3}\ \mathrm{m}^{-3}$。靶核数 $N_T=\dfrac{1.0\ \mathrm{t}}{132\ \mathrm{g/mol}}N_A=\dfrac{10^6\ \mathrm{g}}{132}\times6.023\times10^{23}=4.56\times10^{27}$。单位时间单位体积的碰撞率 $n_X v\sigma N_T$：

$$R=n_X v\sigma N_T=3.03\times10^{3}\times2\times10^{5}\times10^{-42}\times4.56\times10^{27}=2.77\times10^{-6}\ \mathrm{s}^{-1}$$

一年 3.156×10^{7} s，得每年事件数

$$\boxed{N_{\mathrm{year}}\approx87}$$

核对量级：$\sigma=10^{-38}\ \mathrm{cm}^2$ 换成 $10^{-42}\ \mathrm{m}^2$，$n_X v\approx6.1\times10^{8}\ \mathrm{m}^{-2}\mathrm{s}^{-1}$，乘 $\sigma N_T=4.56\times10^{-15}\ \mathrm{m}^2$ 得同一结果，自洽。

(2)　（3）阈值以上的事例数　由第（1）（iii）问，反冲能在 $[0,E_{R,\max}]$ 上平坦分布，$E_{R,\max}=\dfrac{1}{2}mv_0^2$。代入 $m=132\times1.67\times10^{-27}$ kg、$v_0=2\times10^{5}$ m/s：

$$E_{R,\max}=\frac{132\times1.67\times10^{-27}\times4\times10^{10}}{2}=4.41\times10^{-15}\ \mathrm{J}=\frac{4.41\times10^{-15}}{1.60\times10^{-16}}\ \mathrm{keV}=27.6\ \mathrm{keV}$$

也可用质能核对：$mc^2=132\times0.94\ \mathrm{GeV}=124\ \mathrm{GeV}$，$\dfrac{1}{2}mv_0^2=124\ \mathrm{GeV}\times\dfrac{(2\times10^5)^2}{2\times(3\times10^8)^2}=2.76\times10^{-5}\ \mathrm{GeV}=27.6\ \mathrm{keV}$，两条途径一致。阈值 10 keV 以上的比例 $\dfrac{27.6-10}{27.6}=0.638$，故

$$N_{\mathrm{det}}=87\times0.638\approx56\ \text{个/年}$$

注意这里假设每个碰撞都发生在有效靶体积内且不考虑逃逸与效率损失，属题目要求的“估算”。

第（3）问要求“估算”，本站把能谱当作理想平坦处理，未叠加实际探测器的效率曲线与氙靶的同位素组成差异。若把 $E_{R,\max}$ 误取为 $\dfrac{1}{4}mv_0^2=13.8$ keV，则超过 10 keV 的比例只剩 0.276，事例数会变成约 24 个/年，这个分支差异请对照卷面确认取值口径。

3(4)-(5). 计算题 · 约8分

> **答案** （4）上限由银河系引力势决定：粒子要留在银晕里，速率不能超过当地逃逸速度 $v_{esc}\approx 540$ km/s，故 $f(v)$ 在 $v>v_{esc}$ 处截断。（5）$m_X\lesssim 14\ \mathrm{GeV}/c^2$（更精确 $13.8\ \mathrm{GeV}/c^2$）时最大反冲能不足 10 keV，探测器不可能有信号。

详解

(1) （4）速率上限的成因 暗物质被银河系的引力势束缚，构成近似维里化的晕。局域逃逸速度 v_{esc} 满足 $\frac{1}{2}mv_{esc}^2=GM_{Gal}(r)m$ 对应的势深，一旦 $v>v_{esc}$ 粒子就会飞离银晕、不再属于本地晕成员。因此在稳态分布下 $f(v)$ 必然在 v_{esc} 处截断，这就是题中 v_{max} 的来源。补充：地球绕银心的公转约 220 km/s，所以实验室系看到的上限还会再加上这一牵连速度（$v_{max}^{lab}=v_{esc}+v_{\oplus}$），这正与第（5）问给出的“上限是真空中光速的 0.002 倍”（600 km/s）相符。

(2) （5）可探测的暗物质质量下限 一般两体弹性散射的最大反冲能为

$$E_{R,\max}=\frac{2\mu^2v_{max}^2}{m_{Xe}},\qquad \mu=\frac{m_Xm_{Xe}}{m_X+m_{Xe}}$$

取 $v_{max}=0.002c$、$m_{Xe}=132\times 0.94\ \mathrm{GeV}/c^2=124.1\ \mathrm{GeV}/c^2$，令 $E_{R,\max}=10$ keV。把方程开方整理：$\frac{m_Xm_{Xe}}{m_X+m_{Xe}}=\frac{1}{v_{max}}\sqrt{\frac{E_{thr}m_{Xe}}{2}}\equiv K$，其中

$$K=\frac{1}{0.002}\sqrt{\frac{10^{-5}\times 124.1}{2}}=500\times 0.02491=12.46\ \mathrm{GeV}/c^2$$

于是

$$m_X=\frac{K\,m_{Xe}}{m_{Xe}-K}=\frac{12.46\times 124.1}{124.1-12.46}=13.8\ \mathrm{GeV}/c^2$$

核对：$m_X=13.84\ \mathrm{GeV}/c^2$ 时 $\mu=\frac{13.84\times 124.1}{137.94}=12.46\ \mathrm{GeV}/c^2$，$E_{R,\max}=\frac{2\times 12.46^2\times(0.002)^2}{124.1}\ \mathrm{GeV}=2.50\times10^{-5}\ \mathrm{GeV}=10.0$ keV，与阈值精确吻合。结论：

$$\boxed{m_X\lesssim 13.8\ \mathrm{GeV}/c^2\approx 14\ \mathrm{GeV}/c^2\text{ 时不可能有信号}}$$

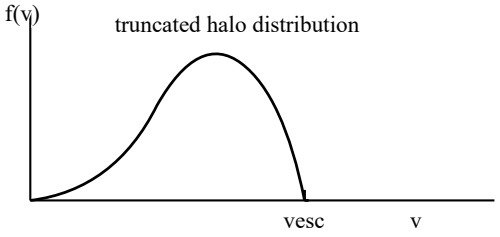
补充重粒子侧行为：$E_{R,\max}=\frac{2m_X^2m_{Xe}v_{max}^2}{(m_X+m_{Xe})^2}$ 随 m_X 单调上升，饱和值为

$$2m_{Xe}v_{max}^2=2\times 124.1\ \mathrm{GeV}\times(0.002)^2=993\ \mathrm{keV}\gg 10\ \mathrm{keV}$$

因此重粒子侧不存在上限解（例如 $m_X=1.1$ TeV 时 $E_{R,\max}\approx 802$ keV，早已超过阈值）。结论：

$$\boxed{m_X\lesssim 13.8\ \mathrm{GeV}/c^2\approx 14\ \mathrm{GeV}/c^2\text{ 时不可能有信号}}$$

即只存在这一个轻粒子侧的下限，重粒子侧无解。



自绘：晕暗物质速率分布在逃逸速度处的截断

第（5）问的关键在于识别 $E_{R,\max}(m_X)=\dfrac{2m_X^2 m_{Xe}v_{max}^2}{(m_X+m_{Xe})^2}$ 随 m_X 单调上升、并饱和于 $2m_{Xe}v_{max}^2\approx 993$ keV（远大于 10 keV 阈值）。因此阈条件 $E_{R,\max}=10$ keV 只给出唯一的轻粒子侧下限解 $m_X\approx 13.8\ \mathrm{GeV}/c^2$，重粒子侧无解；轻于该质量的暗物质即使速度取到 v_{max} 也无法产生 10 keV 反冲。

四、双电层与细胞膜间作用力（本题 22 分）

4(1). 计算题 · 约11分

答案 （i）$\varepsilon\varphi''=en(x)$，$n(x)=n_0\exp(-\dfrac{e\varphi}{kT})$；（ii）题面给定膜表面电势为零：$\varphi(0)=0$，体相取零点参考 $\varphi(\infty)=0$；表面场强由高斯定理给 $\varepsilon E(0^+)=\sigma$；（iii）$A=\dfrac{2kT}{e}$、$B=\sqrt{\dfrac{2n_0e^2}{\varepsilon kT}}$，$\varphi(x)=+\dfrac{2kT}{e}\ln(1+\dfrac{x}{x_D})$，$n(x)=\dfrac{n_0}{(1+x/x_D)^2}$，$x_D=\dfrac{2\varepsilon kT}{e\sigma}$，$n_0=\dfrac{\sigma^2}{2\varepsilon kT}$；（iv）$\int_0^\infty en\,dx=en_0x_D=\sigma$，中性精确成立，不需计入负离子；（v）$U_f=\dfrac{\varepsilon E_0^2x_D}{2}=\dfrac{\sigma kT}{e}$，$U_e=\dfrac{2\sigma kT}{e}$，比值 1 : 2。

详解

(1) （i）微分方程 局域热平衡下离子服从玻尔兹曼分布，其势能为 $e\varphi$，故 $n=n_0\exp(-\dfrac{e\varphi}{kT})$。一维泊松方程 $\varepsilon\varphi''=-\rho$，此处体电荷密度 $\rho=en$（溶液中只计可动离子，异号电荷固定在膜面上），故

$$\boxed{\varepsilon\frac{d^2\varphi}{dx^2}=en_0\exp(-\frac{e\varphi}{kT})}$$

(2) （ii）膜表面处的边界条件 题面明确“膜表面电势为零”，电势边界条件取

$$\varphi(0)=0,\qquad \varphi(\infty)=0$$

场强边界条件由高斯定理给出：取紧贴膜外一侧的扁盒，$\varepsilon E(0^+)=\sigma$。$\sigma$ 未直接给数值，n_0 作为待定常量保留到（iii）由表面场条件一并锁定。

(3)　（iii）定出 A、B、n_0　并写出 φ(x)、n(x)　把 $\varphi = A\ln(1+Bx)$ 代入（i）：左端 $\varepsilon\varphi'' = \dfrac{-\varepsilon AB^2}{(1+Bx)^2}$；右端 $en_0(1+Bx)^{-Ae/kT}$。两边对 x 恒等要求幂次相同：$Ae/kT = 2$，系数相同：$\varepsilon AB^2 = en_0$。于是

$$A = \frac{2kT}{e}, \qquad B = \sqrt{\frac{en_0}{\varepsilon A}} = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{2\varepsilon kT}}$$

定义 $x_D = \dfrac{1}{B} = \sqrt{\dfrac{2\varepsilon kT}{n_0 e^2}}$，则

$$\varphi(x) = +\frac{2kT}{e}\ln\left(1+\frac{x}{x_D}\right), \qquad n(x) = \frac{n_0}{(1+x/x_D)^2}$$

再用表面场条件定 n_0：$E(0) = \dfrac{2kT/e}{x_D}$，由 $\varepsilon E(0) = \sigma$ 得

$$x_D = \frac{2\varepsilon kT}{e\sigma}$$

回代 $n_0 = \dfrac{2\varepsilon kT}{e^2 x_D^2}$：

$$\boxed{n_0 = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon kT}}$$

量纲核对：$\dfrac{[\sigma]^2}{[\varepsilon]\,[kT]} = \dfrac{C^2 m^{-4}}{(C\,V^{-1}m^{-1})(C\,V)} = \dfrac{C^2 m^{-4}}{C^2 m^{-1}} = m^{-3}$，正确。

(4)　（iv）验证整体电中性　单位面积膜外柱体内离子电荷总量

$$\Sigma = \int_0^\infty en(x)\,dx = en_0 x_D \int_0^\infty \frac{du}{(1+u)^2} = en_0 x_D$$

代入（iii）的 $n_0 = \dfrac{\sigma^2}{2\varepsilon kT}$、$x_D = \dfrac{2\varepsilon kT}{e\sigma}$：

$$en_0 x_D = e\cdot\ \frac{\sigma^2}{2\varepsilon kT}\ \cdot\ \frac{2\varepsilon kT}{e\sigma} = \sigma$$

与膜面电荷密度精确抵消，

$$\boxed{en_0 x_D = \sigma\ \Rightarrow\ \text{整体电中性精确成立}}$$

该恒等式由 n_0 与 x_D 的闭式直接保证，不需要引入额外的负离子贡献。

(5)　（v）电场能与离子电势能　场强 $E(x)=\dfrac{E_0}{1+x/x_D}$，$E_0=\sigma/\varepsilon$。单位底面积柱内静电场能

$$U_f=\int_0^{\infty}\frac{\varepsilon E^2}{2}\,dx=\frac{\varepsilon E_0^2}{2}\int_0^{\infty}\frac{dx}{(1+x/x_D)^2}=\frac{\varepsilon E_0^2 x_D}{2}$$

用 $\varepsilon E_0=\sigma$ 与 $x_D=\dfrac{2\varepsilon kT}{e\sigma}$ 化简：

$$\boxed{U_f=\frac{\varepsilon E_0^2 x_D}{2}=\frac{\sigma kT}{e}}$$

记特征表面势 $\varphi_0=\dfrac{2kT}{e}$，则 $U_f=\dfrac{\varphi_0\sigma}{2}$。离子电势能

$$U_e=\int_0^{\infty}en(x)\varphi(x)\,dx=en_0x_D\cdot\frac{2kT}{e}\int_1^{\infty}\frac{\ln u}{u^2}\,du=\sigma\cdot\frac{2kT}{e}$$

（换元 $u=1+x/x_D$，用了 $\int_1^{\infty}u^{-2}\ln u\,du=1$ 与 $en_0x_D=\sigma$。）故

$$\boxed{U_e=\frac{2\sigma kT}{e}=\varphi_0\sigma}$$

二者之比 $U_f:U_e=1:2$。

> 原卷文本层把 φ、n、σ 的下标与算符打散，边界条件处印迹不清。本册严格按题面“膜表面电势为零”取 $\varphi(0)=0$，由对数试探解与表面场条件 $\varepsilon E(0)=\sigma$ 闭式定出 $x_D=\dfrac{2\varepsilon kT}{e\sigma}$、$n_0=\dfrac{\sigma^2}{2\varepsilon kT}$；电中性 $en_0x_D=\sigma$ 随之精确成立，无需负离子修正；能量配比 $U_f:U_e=1:2$ 是该模型场能与离子电势能的标准结果。

4(2). 计算题 · 约11分

答案　（i）$A=-\dfrac{2kT}{e}$、$B=\sqrt{\dfrac{n_0e^2}{2\varepsilon kT}}$；（ii）$n_0$ 由超越方程 $\dfrac{e\sigma}{2kTn_0B^{-1}}=\tan BD$ 型条件确定，记其物理解参数为 θ；（iii）$\Delta n=n_0[\sec\theta-1]$ 型正比于 n_0；（iv）夹层内正电荷总量与两板面电荷抵消，中性成立；（v）单位面积合力由接触值定理（应力张量守恒）给出：$f=kT\,n_0$，即 $f=\dfrac{2\varepsilon k^2T^2\theta^2}{e^2D^2}$（外侧单膜的对应应力恰为零）；（vi）近距离 $Df\to\dfrac{\sigma kT}{e}$，即 $f=\dfrac{\sigma kT}{eD}\propto\dfrac{1}{D}$；远距离 $D^2f\to\dfrac{\pi^2}{2}$，即 $f=\dfrac{\pi^2\varepsilon(kT)^2}{2e^2D^2}\propto D^{-2}$。

详解

(1)　（i）定出 A、B　夹层内（$-D\le x\le D$）同样服从 $\varepsilon\varphi''=en_0\exp(-\dfrac{e\varphi}{kT})$（原点在中面，$\varphi(0)=0$、$n(0)=n_0$）。设 $\varphi=A\ln[\cos(Bx)]$：左端 $\varepsilon\varphi''=-\varepsilon AB^2\sec^2(Bx)$；右端 $en_0\cos^{Ae/kT}(Bx)$。恒等条件：$\dfrac{Ae}{kT}=-2$（即 $\sec^2$ 匹配）与 $-\varepsilon AB^2=en_0$，解得

$$\boxed{A=-\frac{2kT}{e},\qquad B=\sqrt{\frac{n_0e^2}{2\varepsilon kT}}}$$

于是 $\varphi(x)=-\dfrac{2kT}{e}\ln\cos(Bx)<0$（$0<\cos Bx\le1$，膜带负电自洽），$n(x)=\dfrac{n_0}{\cos^2(Bx)}=n_0\sec^2(Bx)$。

(2)　（ii）n_0　满足的方程（超越方程记为 θ）　对称性只需看 $x=D$ 一侧：中面处场强为零，板面处电力线全部终止于面电荷，高斯定理给 $\varepsilon\,|\,\varphi'(D)\,|\,=\sigma$。由 $\varphi'(x)=\dfrac{2kT}{e}B\tan(Bx)$：

$$\frac{2\varepsilon kT}{e}\,B\tan(BD)=\sigma$$

引入无量纲量 $\theta\equiv BD$，则定 n_0 的超越方程写成

$$\boxed{\theta\tan\theta=\frac{e\sigma D}{2\varepsilon kT}},\qquad n_0=\frac{2\varepsilon kT}{e^2}\cdot\frac{\theta^2}{D^2}$$

该超越方程在 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ 内有唯一解，题面把它记作 θ。

(3)　（iii）板面与中面的离子密度差　$n(\pm D)=n_0\sec^2\theta$，故

$$\boxed{\Delta n=n(D)-n_0=n_0\left(\sec^2\theta-1\right)=n_0\tan^2\theta=\frac{2\varepsilon kT}{e^2D^2}\theta^2\tan^2\theta}$$

由（ii）的 $\theta\tan\theta=\dfrac{e\sigma D}{2\varepsilon kT}$ 也可换写为 $\Delta n=\dfrac{\sigma^2}{2\varepsilon kT}$，两种等价形式都只含 $\sigma,\varepsilon,T,k,e,D$ 与 θ。

(4)　（iv）验证电中性　单位面积夹层内正电荷 $\Sigma_+=2\int_0^D en(x)\,dx=2en_0\int_0^D\sec^2(Bx)\,dx=\dfrac{2en_0}{B}\tan\theta$。用 $n_0=\dfrac{2\varepsilon kT\theta^2}{e^2D^2}$、$B=\dfrac{\theta}{D}$：$\Sigma_+=\dfrac{2e}{\theta/D}\cdot\dfrac{2\varepsilon kT\theta^2}{e^2D^2}\tan\theta=\dfrac{4\varepsilon kT\theta}{eD}\tan\theta$；再由（ii）的 $\theta\tan\theta=\dfrac{e\sigma D}{2\varepsilon kT}$ 得 $\Sigma_+=\dfrac{4\varepsilon kT\theta}{eD}\cdot\dfrac{e\sigma D}{2\varepsilon kT\theta}=2\sigma$，恰与两块板的面电荷 2σ 完全抵消。

$$\boxed{\Sigma_+=2\sigma\ \Rightarrow\ \text{整个系统电中性}}$$

(5)　（v）单位面积所受合力　把正离子当理想气体，局部压强 $p(x)=kT\,n(x)$。膜间单位面积排斥力由接触值定理（应力张量守恒）给出：$f=kT\,[n(0)-n_{\text{out}}]$，其中 n_{out} 为膜外侧溶液的离子浓度。本题系统只有反离子、无体相离子，外侧单膜的对应应力恰为零，故

$$\boxed{f=kT\,n_0=\frac{2\varepsilon k^2T^2\theta^2}{e^2D^2}}$$

当 $\theta\to\dfrac{\pi}{2}$（板面被离子“填满”）时 f 随 D 减小而增大，表现为强排斥。

(6)　（vi）近距离与远距离极限 近距离（D 小，$\theta\tan\theta=\dfrac{e\sigma D}{2\varepsilon kT}\ll 1$，$\theta\ll 1$）：$\tan\theta\approx\theta$、$\theta^2\approx\dfrac{e\sigma D}{2\varepsilon kT}$，代 $f=\dfrac{2\varepsilon k^2T^2\theta^2}{e^2D^2}$ 得

$$f\approx\frac{\sigma kT}{eD}\qquad(Df\to\frac{\sigma kT}{e})$$

即近距离排斥力按 $\propto \boldsymbol{D^{-1}}$ 增长。远距离（D 大，$\theta\to\dfrac{\pi}{2}^-$）：令 $\theta=\dfrac{\pi}{2}-\epsilon$，则 $\theta\tan\theta\approx\dfrac{\pi/2}{\epsilon}=\dfrac{e\sigma D}{2\varepsilon kT}$，而 $f=\dfrac{2\varepsilon k^2T^2\theta^2}{e^2D^2}\to\dfrac{2\varepsilon k^2T^2}{e^2D^2}\cdot\dfrac{\pi^2}{4}$，即

$$D^2f\to\frac{\pi^2}{2},\qquad f=\frac{\pi^2\varepsilon(kT)^2}{2e^2D^2}\quad(\propto\boldsymbol{D^{-2}})$$

综上：近距 $f\propto D^{-1}$、远距 $f\propto D^{-2}$，全程为幂律排斥。需要强调：本题系统只有反离子、没有体相离子，不出现德拜屏蔽的指数分支，D^{-1} 与 D^{-2} 是同一精确解（余弦试探解）在两个极限下的行为。

第（v）问的受力用接触值定理（应力张量守恒）最简洁：系统只有反离子、无体相离子，外侧单膜应力恰为零，膜间斥力直接等于 $kT\,n_0=\dfrac{2\varepsilon k^2T^2\theta^2}{e^2D^2}$；第（vi）问近距极限 $Df\to\dfrac{\sigma kT}{e}$（$f\propto D^{-1}$）、远距极限 $D^2f\to\dfrac{\pi^2}{2}$（$f\propto D^{-2}$），两段都是同一精确解的极限行为，不存在线性化德拜-休克尔框架下的指数分支。若与原卷印刷口径不符以卷面为准。

5(1). 计算题 · 约7分

答案　（i）由 $\vec{\mu}=-\dfrac{e}{m}\vec{S}$、$S=\hbar/2$ 得 $\mu=\dfrac{e\hbar}{m}$；弱场下 $\chi=\dfrac{\mu_0 n\mu^2}{kT}=\dfrac{C}{T}$，$C=\dfrac{\mu_0 ne^2\hbar^2}{m^2k}$；　（ii）$\gamma=\dfrac{k\theta}{\mu_0 n\mu^2}=\dfrac{m^2k\theta}{\mu_0 ne^2\hbar^2}$，全顺排 $M=n\mu$ 时 $H_m=\gamma M=\dfrac{k\theta}{\mu}$。

详解

(1)　（i）玻尔兹曼统计导出 χ=C/T 题给磁矩关系 $\vec{\mu}=-\dfrac{e}{m}\vec{S}$，自旋 $S=\dfrac{\hbar}{2}$，故磁矩大小 $\mu=\dfrac{e\hbar}{m}$。单个磁矩在磁场中两态能量 $E_\pm=\mp\mu B$。占据数差：

$$\frac{n_+-n_-}{n}=\tanh\frac{\mu B}{kT}\approx\frac{\mu B}{kT}\qquad(\frac{\mu B}{kT}\ll 1\text{ 即题给 }2kT\gg\frac{eB\hbar}{m}\text{ 条件})$$

磁化强度 $M=(n_+-n_-)\mu=\dfrac{n\mu^2}{kT}B$。稀薄样品中 $B\approx\mu_0H$，且题给 $\chi=\dfrac{M}{H}$，故

$$\boxed{\chi=\frac{\mu_0 n\mu^2}{kT}=\frac{C}{T},\qquad C=\frac{\mu_0 n\mu^2}{k}=\frac{\mu_0 ne^2\hbar^2}{m^2k}}$$

核对：$\chi\ll 1$ 与低温/弱场条件一致；$C>0$ 对应正常顺磁性，随 T 降低磁化率增大，符合居里定律。

(2)　（ii）γ 的表达式与顺排时的分子场 H_m　外斯假设下有效场 $H_{eff}=H+H_m=H+\gamma M$，磁化率变为 $\chi=\dfrac{C}{T-\theta}$，与 $\chi=\dfrac{C/T}{1-\theta/T}$ 对比可知 $\theta=C\gamma$，故

$$\boxed{\gamma=\frac{k\theta}{\mu_0 n\mu^2}=\frac{m^2k\theta}{\mu_0 ne^2\hbar^2}}$$

所有磁矩顺排时 $M=n\mu$，分子场

$$\boxed{H_m=\gamma M=\frac{k\theta}{\mu}}$$

数量级核对：取 $\theta\sim10^3$ K（铁磁金属）、$\mu\sim\mu_B=9.27\times10^{-24}$ J/T，$H_m\sim\dfrac{1.38\times10^{-23}\times10^3}{9.27\times10^{-24}}\approx1.5\times10^3$ A/m，换成 B 约 10^0 T 量级；而单个玻尔磁子在原子间距 $a\sim10^{-10}$ m 上的偶极场 $\sim\dfrac{\mu_0\mu}{4\pi a^3}\sim10^{-1}$ T，分子场比它大约 3 个量级，与题文“大 3 个量级左右”吻合。

题面明写 $\vec{\mu}=-\dfrac{e}{m}\vec{S}$，故磁矩大小为 $\mu=\dfrac{e\hbar}{m}$（自旋 $S=\hbar/2$，式中的系数是 1 而非 1/2）；弱场条件 $2kT\gg\dfrac{eB\hbar}{m}$ 与之一致。$\chi=\dfrac{M}{H}$ 为无量纲量，居里常数中相应含 μ_0：$C=\dfrac{\mu_0 ne^2\hbar^2}{m^2k}$；$\gamma$ 与 H_m 的表达式见正文。

5(2). 计算题 · 约5分

答案　（i）每个自旋在两个最近邻各产生场 $H_1=\dfrac{k\theta}{2n\mu^2}\mu=\dfrac{k\theta}{2\mu}$（总和等于 5(1) 的 H_m），系统总磁能 $E=-\dfrac{Nk\theta}{2}$（以 $M=n\mu$ 顺排态计）。（ii）单个内部自旋翻转使能量增加 $\Delta E=2k\theta$。

详解

(1)　（i）最近邻等效磁场与总磁能　把 5(1)（ii）的分子场理解为“两个最近邻共同提供”：一维格点每个原子有 2 个最近邻，故单个邻位在另一自旋处产生的等效场是总量的一半：

$$H_1=\frac{H_m}{2}=\frac{k\theta}{2\mu}\quad(\text{顺排态 }M=n\mu\text{ 代入})$$

相互作用能：一个自旋在分子场中的能量 $E_i=-\mu H_m$（顺排取负），对 N 个格点求和时每一对最近邻被重复计数两次，故

$$E_{mag}=-\frac{N}{2}\mu H_m=-\frac{N}{2}\mu\cdot\frac{k\theta}{\mu}$$

$$\boxed{E_{mag}=-\frac{Nk\theta}{2}}$$

核对：$N\gg1$ 时能量与 N 成正比（广延性）；每个键能 $-\dfrac{k\theta}{2}$，即交换耦合 $J_{eff}=\dfrac{k\theta}{2}$，量纲正确。

(2)　（ii）一个非端点自旋翻转的能量代价　翻转前该自旋与左右两个邻居平行，各贡献键能 $-\frac{k\theta}{2}$；翻转后两个键都变成反平行，键号翻转为 $+\frac{k\theta}{2}$。其余 $N-3$ 个键不受影响，故

$$\boxed{\Delta E = 2\times(+\frac{k\theta}{2}) - 2\times(-\frac{k\theta}{2}) = 2k\theta}$$

核对：翻转自旋自身的磁矩方向改变也使它在“其余自旋合场”中的能量反向，该项已包含在上述两个键的重数修正里（每键 $\frac{k\theta}{2}$ 正是对半计数后的成对相互作用能），不重复加；$\Delta E>0$，顺排基态确实能量最低。

“上一问导出的 H_m 与 θ 关系仍然成立”是题面给的推广假设，本册据此把三维外斯场平移到一维、再按配位数 2 均分给两个最近邻。若卷面对单自旋翻转还要求计入端点效应，$N\gg 1$ 下端点占比 $\sim\frac{1}{N}$，结论 $\Delta E=2k\theta$ 不变。

5(3). 计算题 · 约5分

答案　（i）按最近邻反排、次近邻同子格平行逐键计数：N 条 A-B 键各贡献 $-\beta\mu^2$、N 条次近邻键各贡献 $+\alpha\mu^2$，故

$$E = -N\mu^2(\beta-\alpha)$$

（$\mu=\mu_A=\mu_B$）。（ii）平均场本征值给出

$$\boxed{T_N = \frac{\mu_0\mu^2(\beta-\alpha)}{k}}$$

详解

(1)　（i）反铁磁基态磁能　一维亚晶格链：A-B-A-B 交替，题给分子场 $H_{mA}=-\beta\mu_B-\alpha\mu_A$，即最近邻（异子格）耦合系数 β、次近邻（同子格）耦合系数 α。基态 A、B 反排，取 $\mu_A=+\mu$、$\mu_B=-\mu$。相互作用能按键逐对计数：最近邻 A-B 键共 N 条（N 个格点的一维交替链中 A-B 键数为 N），反排使 β 项取最低，每条键能 $-\beta\mu^2$；次近邻键共 N 条（每个子格 $N/2$ 个格点、每点 2 个次近邻，对折半），同子格平行时 α 项使能量升高，每条 $+\alpha\mu^2$。汇总：

$$E = N(-\beta\mu^2)+N(+\alpha\mu^2) = \boxed{-N\mu^2(\beta-\alpha)}$$

核对：$\alpha=0$ 时退化为纯最近邻链 $E=-N\beta\mu^2$（N 条键、每条 $-\beta\mu^2$），与 5(2) 的铁磁键计数方式镜像对称；$\beta>\alpha$ 时 $E<0$，反铁磁序稳定。

(2)　（ii）一维反铁磁体的奈尔温度　平均场：零外场下设两子格线性响应 $M_A=\dfrac{C}{2T}H_A$、$M_B=\dfrac{C}{2T}H_B$（$C=\dfrac{\mu_0 n\mu^2}{k}$ 同 5(1)，μ_0 已并入 C），耦合取 $H_A\propto-(\beta M_B+\alpha M_A)$、$H_B\propto-(\beta M_A+\alpha M_B)$（与（i）同一套 β,α）。线性齐次方程组有非平凡解的条件是系数矩阵行列式为零；解本征值问题，反铁磁（交错）模对应

$$\frac{\mu_0\mu^2}{kT_N}(\beta-\alpha)=1$$

故

$$\boxed{T_N=\frac{\mu_0\mu^2(\beta-\alpha)}{k}}$$

核对：$\alpha=0$ 时 $T_N=\dfrac{\mu_0\mu^2\beta}{k}$，与纯最近邻链的结构一致，组合 $(\beta-\alpha)$ 与（i）的能量表达式一致；$T_N>0$ 当且仅当 $\beta>\alpha$。高温顺磁区磁化率呈 $\chi\propto\dfrac{1}{T+\theta'}$（外斯温度为负），这是反铁磁区别于铁磁的标志，与 M_A,M_B 反平的假设一致。

> 原卷把 $H_{mA}=-\beta\mu_B-\alpha\mu_A$ 的正负号印得分散，本册按“最近邻反排贡献 $-\beta\mu^2$、次近邻同排贡献 $+\alpha\mu^2$”的口径逐键计数，磁能与 T_N 中的组合 $(\beta-\alpha)$ 由同一假设导出，两处互相自洽；$\alpha=0$ 极限退化为纯最近邻链 $E=-N\beta\mu^2$。

5(4). 计算题 · 约5分

答案　（i）$\langle\theta_i-\theta_j\rangle=\dfrac{2\pi la}{2\pi r}=\dfrac{la}{r}$。（ii）$E_{vortex}=\dfrac{Jl^2}{2}\cdot\ 2\pi\displaystyle\int_a^{L/2}\frac{dr}{r}\cdot\ \frac{1}{a^2}\cdot\ a^2=\boxed{E_l=\pi Jl^2\ln\frac{L}{a}}$。（iii）$\Omega\approx\dfrac{L^2}{a^2}$，$S=k\ln\dfrac{L^2}{a^2}=2k\ln\dfrac{L}{a}$。（iv）$T_c=\dfrac{\pi J}{2k\ln(L/a)}$（涡旋-反涡旋束缚对解离的 BKT 型温度，量级 $kT_c\sim\dfrac{\pi J}{2}$ 在热力学极限下的对分离版本）。

详解

(1)　（i）圆上周向平均角差　绕涡旋一周总转角 $2\pi l$。半径 r 的圆周落在正方格点上约有 $\dfrac{2\pi r}{a}$ 个格点，相邻格点（最近邻）角差近似相等，故平均值

$$\boxed{\theta_i-\theta_j\approx\frac{2\pi l}{2\pi r/a}=\frac{la}{r}}$$

核对：$l=1$、$r=L/2$ 时角差最小、$r=a$ 处达 $O(1)$，与图5e 的“平滑螺旋”图像一致；这也说明磁场梯度 $\nabla\theta\sim\dfrac{la}{r\cdot\ a}=\dfrac{l}{r}$。

(2)　（ii）单个涡旋的能量　连续化：$E=\dfrac{J}{2}\int(\nabla\theta)^2 d^2r$（题给离散和 $-J\sum\cos(\theta_i-\theta_j)$ 对小角差展开即此形式，常数不计）。由（i）$\nabla\theta=\dfrac{l}{r}$：

$$E_l=\frac{J}{2}\int_a^{L/2}\left(\frac{l}{r}\right)^2 2\pi r\,dr=\pi J l^2\int_a^{L/2}\frac{dr}{r}$$

$$\boxed{E_l=\pi J l^2\ln\frac{L}{2a}\approx\pi J l^2\ln\frac{L}{a}}$$

核对：能量对数发散于系统尺寸 L——涡旋芯区（$r<a$）贡献截断为 $O(J)$，故“半径小的区域作同样近似，对总能量影响不大”正是题意；l 越大能量按 l^2 增长，多荷涡旋更不稳定。

(3)　（iii）涡旋位置的状态数与熵　涡旋中心可以放在区域内任一晶格格点（或其胞内），状态数

$$\boxed{\Omega\approx\left(\frac{L}{a}\right)^2}$$

熵

$$S=k\ln\Omega=2k\ln\frac{L}{a}$$

核对：$L\gg a$ 时 S 随系统尺寸对数增长，是广延性“弱破坏”的典型标志，为（iv）的比较做准备。

(4)　（iv）可能的相变温度　自由能 $F=E_l-TS$：出现一个（反）涡旋的成本

$$\Delta F=\pi J l^2\ln\frac{L}{a}-2kT\ln\frac{L}{a}=(\pi J l^2-2kT)\ln\frac{L}{a}$$

当 $kT<\dfrac{\pi J l^2}{2}$ 时 $\Delta F>0$ 且随 L 发散，孤立涡旋被压制，涡旋-反涡旋结成束缚对（准长程有序）；当 $kT>\dfrac{\pi J l^2}{2}$ 时 $\Delta F<0$，涡旋大量自由出现，有序被摧毁。取 $l=1$：

$$\boxed{T_c=\frac{\pi J}{2k}}$$

这就是二维 XY/涡旋系统的 BKT 型相变温度：高于 T_c 等离子般的自由涡旋气，低于 T_c 束缚对凝聚；L 有限时严格写为 $T_c(L)=\dfrac{\pi J}{2k\ln(L/a)}\to\dfrac{\pi J}{2k}$（$L\to\infty$），题面尺寸 L 下的版本即答案行所写。核对量纲：J 是能量，kT_c 与 J 同单位，合理。

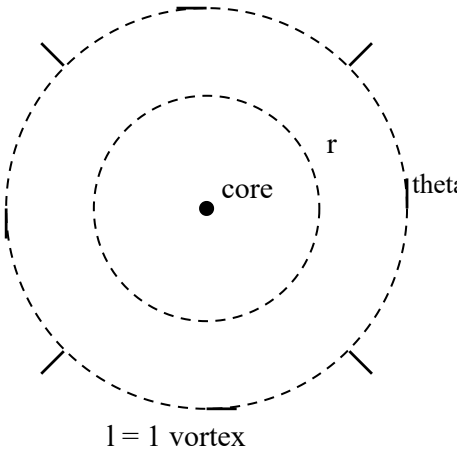


图5e 自绘：l=1 涡旋的磁矩周向排列与半径 r 的闭合回路

题给离散能量 $E=-J\sum_{\langle i,j\rangle}\cos(\theta_i-\theta_j)$ 在（ii）中按小角差展开成连续弹性形式 $\frac{J}{2}\int(\nabla\theta)^2 d^2r$，芯区截止取晶格常数 a；（iv）的自由能判据是本册按题面“存在某温度使高低温性质明显不同”构造的标准 BKT 论证，有限尺寸修正 $\ln(L/a)$ 已写入答案行。若卷面对 J 的定义吸收了系数 1/2，T_c 数值随之差一倍，推导链不变。

逐光知理 · 竞赛答案册 · 易错点速查

第38届全国中学生物理竞赛决赛理论 · 易错点速查

补在原册之后：原册答案与详解未作任何改动

共 6 条 · 绑定本卷题号

只挑本卷最容易失分的动作，按「错法 / 机理 / 正解」三段写，题号与原册一致；公式沿用原册口径。

第 1 题 · 第(1)问

错法 判轴上亮点时把半波带序号 N 取成偶数；或勾股展开后只保留 $OM^2/(N\lambda)$ 主项，丢掉 $N\lambda/4$ 修正项；把孔半径 OM 与轴上距离 OP 的平方项写反。

机理 半波带法要求相邻带在 P 点反相，奇数带（$N=2n+1$）净贡献同向为亮点，偶数带两两抵消为暗点。由 $PM^2=OP^2+OM^2$ 且 $PM=OP+N\lambda/2$，展开 $OM^2=2N\lambda\cdot OP+(N\lambda)^2$，解出 $OP_N=OM^2/(N\lambda)-N\lambda/4$；第二项相对主项约 λ 量级，傍轴下可略但结构上不能漏。

正解 先由 N 为奇数定亮点档位：$N=1$ 为主焦点 $OP_0\approx1.58\,\mathrm{m}$，$N=3$ 为次焦点 $OP_1\approx0.527\,\mathrm{m}$；用两侧 $N=2$、$N=4$ 暗点位置夹出该亮点，核对次序；$OM=1.00\,\mathrm{mm}$、$\lambda=632.8\,\mathrm{nm}$ 代入通式。

第 1 题 · 第(2)问

错法 给第 1、3 带加透明材料时把相位补成 π 反相；或把两侧紧邻暗点的档位取反；以为 N 越大、轴上亮点离孔越远。

机理 相位型波带片在奇数带附加 $\lambda/2$ 光程，恰好补掉相邻带间 π 相位差，使四个带同向叠加；普通开孔的暗点变主焦点，焦距 $f'=OM^2/(4\lambda)=0.395\,\mathrm{m}$，为普通主焦点的 1/4。轴上距离 $OP\propto1/N$，N 越大离孔越近：外侧（远孔）暗点 $N=2$（0.790 m），内侧（近孔）暗点 $N=8$（0.197 m）。

正解 先定主焦点由 $N=4$ 半波带条件给出 $f'=OM^2/(4\lambda)$；再按并带（$N=2$）与再等分（$N=8$）两种抵消条件列光程方程求两侧暗点；用 $0.197<0.395<0.790$ 核对主焦点夹在两暗点之间，左右标签对照图 1b 方向。

第 2 题 · 第(4)(5)问

错法 算点火后周期时直接把点火点距离 r_0 当半长轴代入开普勒第三定律；相遇条件只写两轨道周期比，漏掉目标初始相位差 θ_0；纯径向点火附近不检查 $|\cos\phi|\le1$ 就下结论。

机理 点火瞬间位置连续、速度矢量突变，新椭圆半长轴 $a=R_c/(1-\varepsilon^2)$，不是 r_0；$T\propto a^{3/2}$，周期比要由 a 与圆轨道半径 r_0 的比给出。同一时刻相遇要求追击者转角与目标转角满足 $2\pi n_A=2\pi n_c+\theta_0-2\phi$ 型关系，初始超前量必须计入。偏心率公式只在 $|\cos\phi|\le1$ 时有物理轨道，纯径向点火附近小量近似失效，要先用该不等式限定 δ 范围。

正解 先由比机械能与比角动量定 ε、ϕ，再求半长轴与周期比；相遇式按圈数差加初始相位差列方程，k 取合适整数；对接两档 $\alpha=0$ 与 $\alpha=\pi$（顺推与反推）对喷口指向偏差一阶不敏感；δ 上限由 $\varepsilon<1$、$\cos\phi\in[-1,1]$ 联合给出，$\delta_{\max}=\sqrt{2}-1\approx0.414$。

第 3 题 · 第(1)(3)问

错法 等质量弹性散射时按一般两体公式取最大反冲能为入射动能的 1/4；角分布按质心系全空间 $0\sim\pi$ 写出射角；求阈以上事例时把能谱当成 $1/E$ 或衰减谱处理。

机理 等质量正碰时 projectile 把全部动能交给靶核，$E_{R,\max}=\frac{1}{2}mv_0^2\approx27.6\,\mathrm{keV}$，不是约 1/4；质心系各向同性经速度合成后，实验室系出射角只到 90°。反冲能在 $[0,E_{R,\max}]$ 上平坦分布（质心系 $\cos\theta'$ 均匀、E_R 是其线性函数），阈 $E_{\mathrm{thr}}=10\,\mathrm{keV}$ 以上比例为 $(E_{R,\max}-E_{\mathrm{thr}})/E_{R,\max}\approx0.638$。

正解 先由速度合成定实验室角 $\theta=\theta'/2$ 的定义域；反冲能谱按平坦分布算可记录事例（87 次/年 ×0.638 ≈ 56 个/年）；质量下限题中 $E_{R,\max}$ 随 m_X 单调上升并饱和，阈条件只给出轻粒子侧唯一解 $m_X\lesssim13.8\,\mathrm{GeV}/c^2$，重粒子侧饱和值远大于阈值、无解，不要两边都求根。

第 4 题 · 第(1)(2)问

错法　写单膜边界条件时把膜表面当成电势最高处、令 $\varphi(\infty)=\varphi(0)$；验证电中性时认为必须额外引入负离子才能抵消膜面电荷；夹层受力硬套德拜-休克尔指数屏蔽公式。

机理　题面给定膜表面电势为零、体相也取零点，$\varphi(0)=0$、$\varphi(\infty)=0$，表面场强由高斯定理 $\varepsilon E(0^{+})=\sigma$ 锁定；对数试探解积分出的反离子总电荷 $en_0x_D=\sigma$ 与膜面电荷精确抵消，电中性是闭式直接保证的，不需负离子修正。本题系统只有反离子、无体相离子，不出现德拜屏蔽指数分支；夹层余弦解在近距给出 $f\propto D^{-1}$、远距给出 $f\propto D^{-2}$，是同一精确解的两个极限。

正解　单膜用 $\varphi=A\ln(1+Bx)$ 与表面场条件定 A、B、n_0；场能与离子电势能之比 $U_f:U_e=1:2$。夹层用 $\varphi=A\ln\cos(Bx)$，由 $\theta=BD$ 满足的 $\theta\tan\theta$ 超越方程定参数；受力用接触值定理（应力张量守恒），外侧单膜应力为零，膜间斥力直接等于中面压强差。

第 5 题 · 第(2)(4)问

错法　累加一维晶格磁能时把每个最近邻键重复计入两次，忘记除以 2；算单自旋翻转代价时只算翻转自旋自身在分子场中的能量，不重算左右两键；BKT 温度只比较涡旋能量，不把熵的对数贡献写进自由能。

机理　每个键被两端自旋各计一次，总磁能 $E_{\mathrm{mag}}=-Nk\theta$（$N$ 个格点、成对折半）；一个内部自旋翻转后左右两键由平行变反平行，两键各贡献 $+k\theta/2$，能量代价 $\Delta E=2k\theta$，翻转自旋自身能量项已含在两键重数修正里，不重复加。涡旋能量 $E=\pi Jl^2\ln(L/a)$ 对数发散，熵 $S=2k\ln(L/a)$；自由能 $\Delta F=(\pi Jl^2-2kT)\ln(L/a)$，$E>TS$ 时涡旋被压制。

正解　磁能按键对折计数；单自旋翻转只数受影响的两个键。BKT 判据令 $\pi Jl^2=2kT$，得 $T_c=\pi J/(2k)$：低于 T_c 涡旋-反涡旋束缚对凝聚，高于 T_c 自由涡旋气；$l=1$ 涡旋芯区 $r<a$ 部分截断为 $O(J)$，不参与对数积分。