第39届全国中学生物理竞赛复赛试题（本站重排版）

逐光知理 · 竞赛试题重排版金样 ｜ 8 题 ｜ 共 8 道大题 · 每题 40 分 · 总分 320 分（2022 年 10 月 6 日）

题干据原卷逐题转录；公式采用 KaTeX 排版；配图为本站重绘矢量图。解析与详解另册（本站自编）。

一、（40 分）发电机刹车能量回收

新型电动汽车在刹车时，可以用发电机来回收能量。假设此发电机原理可抽象为如图 1 所示，两磁极之间的磁场可近似为均匀磁场，磁感应强度大小为 B。绕有 n 匝导线的线圈为长方形，长、宽分别为 a 和 b，整个线圈都处于磁场中。线圈转轴为两条短边的三分点连线（见图 1），线圈外接有阻值为 R 的纯电阻负载。忽略线圈电阻，假设电动汽车刹车时受到的地面摩擦力等阻力与发电机线圈转动导致的阻力相比可以忽略，即刹车时失去的动能全部用来发电，电动汽车质量为 M。

⑴ 初始时刻线圈平面与磁场垂直，若线圈转动角速度恒为 ω，求电路开路时线圈两端电压随时间的变化。

⑵ 线圈和电阻回路闭合后，当电动汽车在水平面上刹车至速度为 v_1 时，线圈平面转过磁场方向与磁场夹角为 θ_1 $\left(0<\theta_1<\dfrac{\pi}{2}\right)$，线圈转动角速度为 ω_1，求此时电动汽车的加速度大小。

⑶ 线圈和电阻回路闭合后，电动汽车在水平面上以某初始速度开始刹车。假设在某种刹车模式下，线圈刚好转过 N 圈后，电动汽车完全刹住，直到刹停前发电机线圈转动角速度为恒值 ω_2。求电动车初速度。

⑷ 线圈和电阻回路闭合后，电动汽车在水平面上以某初始速度开始刹车。假设在另一种刹车模式下，刹车开始时线圈平面刚好与磁场垂直，且发电机线圈转动第一圈时角速度为 ω_2，之后每转动一圈角速度的值为前一圈角速度的一半。若在发电机转完第 N 圈，且未转完第 $N+1$ 圈时，电动汽车刹停。求电动汽车初速度的范围。

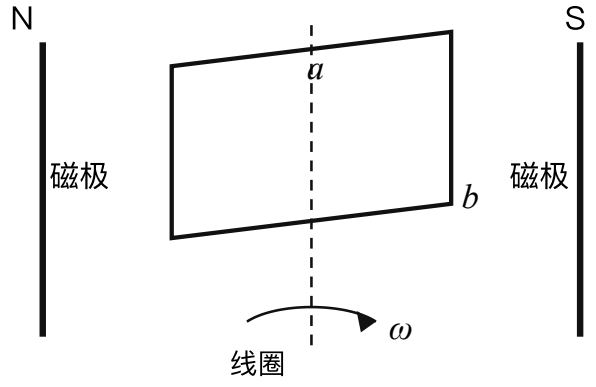

图 1　发电机原理示意

二、（40 分）引力透镜与仿透镜光学

根据广义相对论，当光线经过某大质量球对称天体附近时，会向天体方向弯曲一个很小的角度 ϵ，ϵ 称为偏折角，即出射光与入射光的夹角。已知 $\epsilon=\dfrac{R}{r}$，其中常数 $R=\dfrac{4GM}{c^2}$，r 为光线与天体中心的最近距离，G 为万有引力常数，M 为天体质量，c 为真空中光速。

物理常数和单位：$c=3\times10^{8}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，$G=6.67\times10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^{2}\cdot kg^{-2}}$，1 秒差距 $=3.09\times10^{16}\ \mathrm{m}$，1 毫弧秒 $=10^{-3}\times\dfrac{2\pi}{360\times3600}\ \mathrm{rad}$。

⑴ 如图 2a 所示，当发光背景天体、大质量球对称天体中心以及望远镜恰好处在同一条直线上时，望远镜会观测到爱因斯坦环这一引力透镜现象。已知一背景天体发出的光线通过某近邻白矮星附近时，形成的爱因斯坦环相对于望远镜的角半径 $\theta_E = 31.53$ 毫弧秒，近邻白矮星到望远镜的距离为 $d_L = 5.52$ 秒差距，背景天体到望远镜的距离为 $d_S = 2 \times 10^3$ 秒差距。求该近邻白矮星的质量 M。

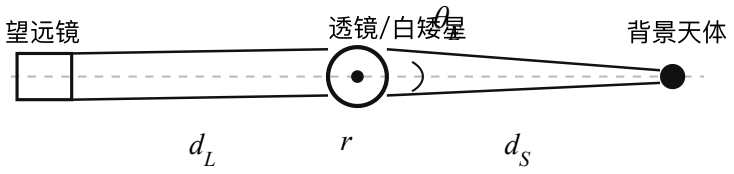

图 2a　爱因斯坦环观测

⑵ 引力透镜现象可以用一个轴对称光学透镜来模拟演示。透镜的横截面如图 2b 所示，x 轴为旋转对称轴，透镜入射面在 $0 \le r < r_0$ 的区域不透光，出射面垂直于 x 轴。假设光线平行于 x 轴入射，入射光与 x 轴距离为 r，偏折角 ϵ 仍满足 $\epsilon = \dfrac{R}{r}$。已知光学透镜的折射率为 n_0 $(n_0 > 1)$，空气折射率为 1，偏折角 ϵ 可视为小角度。求透镜入射面在 $r \ge r_0$ 区域的表达式 $x(r)$，用 r、n_0、R 和 r_0 表示。

⑶ 引力透镜现象还可以用一个轴对称等厚变折射率透镜模拟演示。透镜的横截面如图 2c 所示，x 轴为旋转对称轴，透镜厚度为 D，透镜折射率 $n(r) > 1$。假设光线垂直入射，入射光与 x 轴距离为 r，忽略光线在透镜内的偏折，光线在透镜出射面的偏折角 ϵ 仍满足 $\epsilon = \dfrac{R}{r}$，偏折角 ϵ 可视为小角度。已知 $n(r_1) = n_1$，且 $r < r_1$ 区域不透光。求透镜折射率在 $r \ge r_1$ 区域的表达式 $n(r)$，用 r、n_1、R、r_1、D 表示。

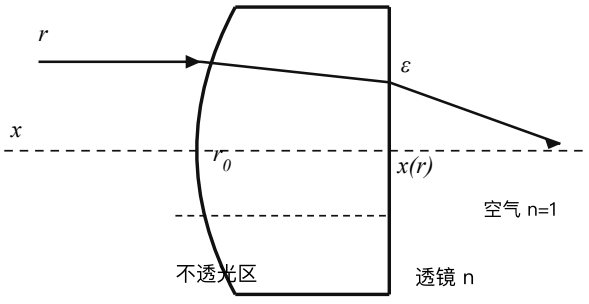

图 2b　轴对称光学透镜

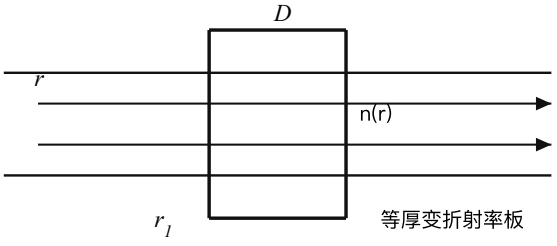

图 2c　等厚变折射率透镜

三、（40 分）卯榫门式框架的失稳与振动

中国传统建筑“卯榫穿插，层层出挑”，是中国传统文化的表现。卯榫结构是中国古建木架结构中的重要形式，看似零碎的木质部件，却可以托起千钧重量。卯榫工艺汇聚了我国古人的智慧，广泛应用于木塔、钟鼓楼、住宅、寺庙等古建。卯榫结构弯曲变形时，由于卯榫的卯头截面尺寸比大梁或立柱本身的截面尺寸小得多，所以其弯曲刚度亦小得多，在框架失稳变形时，大梁和立柱的变形可以忽略不计。如图 3a 所示，当卯榫结构受弯矩作用其弯曲转角 φ 小于临界角 φ_0 时，卯榫的弯矩 M 和转角 φ 之间满足线性关系 $M = k\varphi$，其中 k 为卯榫的弯曲变形刚度系数。北京大钟寺的永乐大钟重 46.5 吨悬挂在木架上（图 3b），木架由大梁和立柱通过卯榫结构进行连接，其承重立柱立在石座上，石座与立柱之间的连接可以视为满足简支条件，即立柱

仅绕支点无滑转动。由于该木架结构较为复杂，基于以上假设及理论，考虑竖直面内二维“卯榫”框架力学问题。木架质量相对承载重物质量非常小，忽略木架质量及卯榫摩擦损耗。

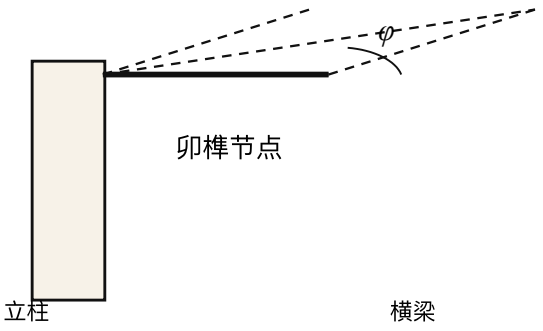

图 3a　卯榫弯曲变形

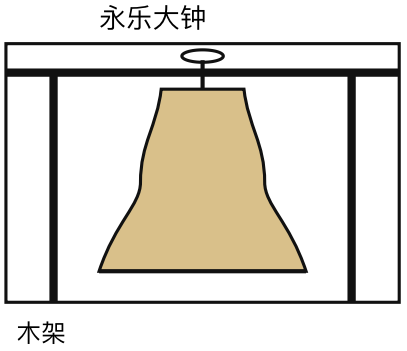

图 3b　永乐大钟木架

⑴ 如图 3c 所示，竖直面内门型卯榫框架立于水平基石 C、D 处，已知立柱高为 R、横梁长为 l。立柱、横梁由卯榫结构连接于 A、B，该卯榫的弯曲变形刚度系数为 k_1。若在横梁中心固定一重物，木架失稳后立柱在竖直面内的侧倾角最大可达 θ_0 $(\theta_0 < \varphi_0)$，求重物重量 G。

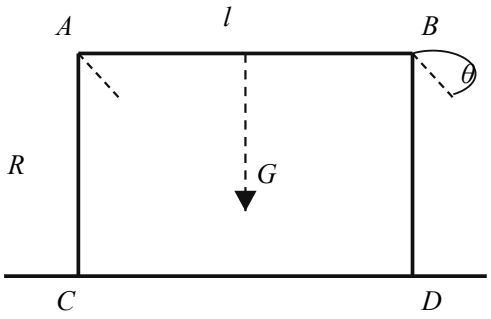

图 3c　门型卯榫框架

⑵ 若以上木架横梁中心固定重物的质量为 m，系统失稳后立柱侧倾角 θ $(\theta < \varphi_0)$ 很小。求木架和重物构成的系统失稳后作简谐振动所需条件，以及该系统简谐振动的角频率。重力加速度大小为 g。

⑶ 如图 3d 所示，为了提高木架受扰后的稳定性和承重能力，在制作卯榫结构时使木架立柱 AC、BD 具有一个原始倾角 β，从而具有等腰梯形结构。设倾斜立柱和横梁的长度分别为 R、l。木架横梁中心固定重量为 G 的重物后受扰失稳，系统平衡时立柱 AC、BD 的附加倾角（即倾角改变量）分别为 θ、γ。求 C、D 支点受力竖直分量 F_{Cy}、F_{Dy} 的大小，结果用 G、R、l、β、θ、γ 表示。

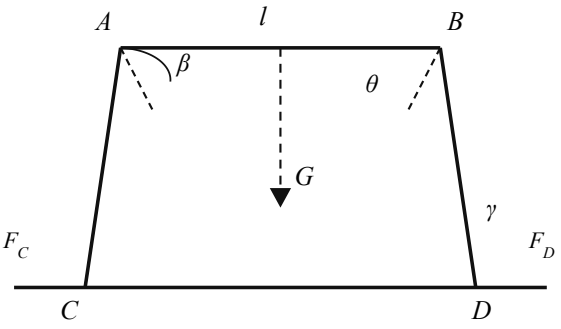

图 3d　等腰梯形卯榫框架

⑷ 对于图 3d 中的木架，若该卯榫结构的弯曲变形刚度系数为 k_2，木架横梁中心固定重物后受扰失稳，立柱 AC 右倾附加倾角达到最大值 θ_0 ($\theta_0 < \varphi_0$) 时，立柱 BD 的附加倾角、横梁与水平方向的夹角相应地分别为 γ_0、α。求重物重量 G。

四、（40 分）四球摩擦耦合

如图 4 所示，半径为 R、质量均为 m 的均匀实心球体 A、B、C 两两相切地放置在光滑水平面上。三个球体的外侧有一光滑固定圆筒，其内表面与 A、B、C 外切。初始时刻，A、B、C 静止，一绕圆筒竖直中心轴转动的均匀球体 D 轻放于球体 A、B、C 正上方。已知 D 的质量也为 m、半径也为 R，D 的初始角速度大小为 Ω_0，D 与 A、B、C 之间的动摩擦因数为 μ，A、B、C 三个球体之间无摩擦。经历一段时间后，整个体系达到 D 相对于 A、B、C 没有滑动的稳定状态。重力加速度大小为 g。求：

⑴ 体系从初始状态到达稳定状态所需时间，以及稳定状态时，球体 A、D 的角速度大小。

⑵ 达到稳定状态时，A、C 两球切点的相对速度大小与 A 球质心速度大小之比。

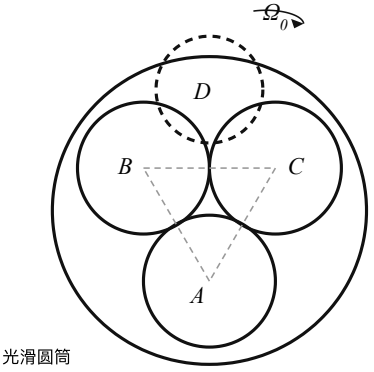

图 4　四球与圆筒

五、（40 分）MEMS 差分电容加速度计

微机电系统（MEMS）加速度传感器在汽车电子、机器人、工业自动化、卫星导航等领域获得了广泛的应用。电容式加速度计是一种 MEMS 加速度传感器，由固定的金属电极和可动的金属薄板电极组成可变电容器。当传感器加速运动时，可动薄板电极相对固定电极位置发生了变化，因此电极之间的电容也发生变化。利用接口电路测量电容变化量可以得到加速度的大小。

⑴ 一种常见的梳齿状差分电容式加速度传感器如图 5a 所示，在绝缘底座上固定两个金属电极板，可动电极安装在绝缘的敏感质量块上，与左右两个极板形成两个平板电容，分别为 C_1 和 C_2。当传感器垂直于薄板平面方向加速运动时，敏感质量块平行于此方向发生平移（极板之间保持平行）。已知可动电极与两侧金属板的初始距离均为 d_0，极板的正对面积为一个边长为 a 的正方形，真空介电常数为 ε_0，忽略极板边缘效应及底座的影响。当可动极板与左侧金属板的距离减少了 Δd 时，求差分电容 $\Delta C = (C_1 - C_2)$ 的表达式。

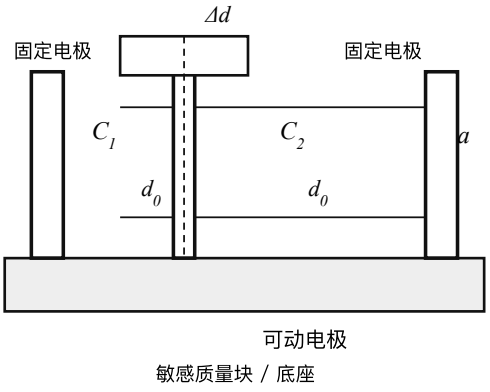

图 5a　梳齿状差分电容

⑵ 另一种摆式差分电容式加速度传感器如图 5b 所示，在绝缘底座上固定两个金属电极板，可动电极通过一个转轴连接到底座上，与左右两个极板形成两个平板电容，分别为 C_1 和 C_2。在系统静止或匀速直线运动时，可动电极与固定电极相平行；当传感器垂直于薄板平面方向加速运动时，可动电极绕转轴偏转一个小角度 ϕ，可动电极与左右两个极板之间不再平行。已知转轴与两固定电极的距离均为 d，薄板电极是边长为 a 的正方形，真空介电常数为 ε_0，偏转角 $\phi \ll d/a$，忽略极板边缘效应及底座的影响。求差分电容 $\Delta C = (C_1 - C_2)$ 的表达式。

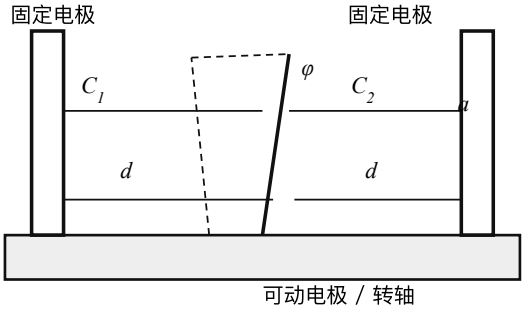

图 5b　摆式差分电容

⑶ 差分电容式加速度传感器的接口电路常采用二极管双“丁”字型电桥结构如图 5c 所示。由二极管 D_1、D_2，电容 C_1、C_2，电阻 R_1、R_2，负载电阻 R_L，以及周期性方波信号源 u 组成。假设 D_1、D_2 均为理想二极管，方波信号源 u 的内阻为 0，电压幅值为 $+U$ 和 $-U$，周期 T 远大于电容充放电的时间常数。如图 5d 所示，在 $t = t_0$ 时刻，方波输出转变为 $+U$。求 $(t_0, t_0 + \dfrac{T}{2})$ 时间内负载电阻 R_L 上的电压表达式 $V(t)$。

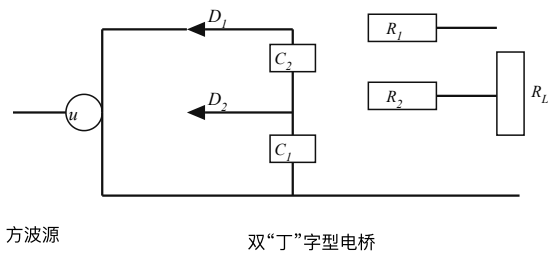

图 5c　二极管双“丁”字型电桥

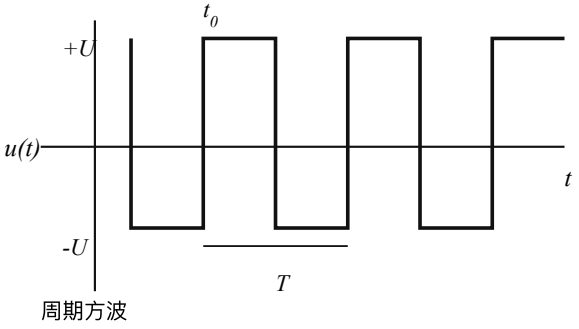

图 5d　方波信号

六、(40 分) 变温液体中悬浮圆桶

一个深为 H 的足够大的池内装满液体，液体温度与深度 h 的关系为 $T=T_0\left[a\left(\dfrac{2h}{H}-1\right)^n+1\right]$，$0\le h\le H$，$n$ 为正整数。液体密度为 ρ。一个薄正圆柱形圆桶质量为 M，截面积为 S，桶壁光滑绝热。圆桶中有一质量为 m 的良导热薄活塞。活塞和桶底之间密封一定量气体，圆桶倒扣在池内，如图 6 所示。初始时刻，圆桶悬浮在液体池内某处，气体温度为 T_0，体积为 V_0，气体体积远小于圆桶容积。重力加速度大小为 g，大气压强恒定为 P_0。容器内气体可视为理想气体，圆桶薄壁和薄活塞的厚度均可以忽略，$\dfrac{(M+m)g}{S}\ll P_0$。

⑴ 若 $a=0$，证明悬浮圆桶处于不稳定平衡。

⑵ 若初始时刻悬浮圆桶处于稳定平衡，求满足条件的 n 和 a。

⑶ 若 $n=3$，求圆桶悬浮并且处于稳定平衡时活塞在液体中的深度。

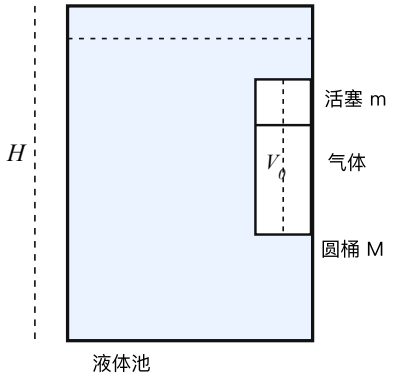

图 6　悬浮圆桶

七、(40 分) α 粒子电离计数器

1908 年盖革设计制成了一台 α 粒子电离计数器。带电粒子穿过气体能产生电离，电离计数器是一种气体探测器，它能测量电离过程中产生的电荷量。如图 7 所示，某电离室可以简化为放置在充以氩气的气密容器内的平行板电容器，电容器两电极之间施加电压以产生均匀电场，忽略边缘效应。带电粒子穿过电离室时会损失能量将氩原子电离，使氩原子电离的平均能量是 $25\ \mathrm{eV}$，产生的电子和氩离子在电场作用下发生漂移，分别被阳极和阴极收集，引出相应的电信号即可实现对带电粒子的测量。电离室等效电容 $C=10\ \mathrm{pF}$，电极间距 $d=30\ \mathrm{cm}$。电压 $U_0=1.5\times10^4\ \mathrm{V}$ 时，电子沿电场方向的漂移速度 $v^-=5\ \mathrm{cm/\mu s}$，氩离子的漂移速度 $v^+=10\ \mathrm{cm/ms}$，电子电量大小 $e=1.6\times10^{-19}\ \mathrm{C}$。能量为 $5\ \mathrm{MeV}$ 的 α 粒子平行于电极板入射到电离室后损失全部能量，忽略其在电场中的偏转，其入射位置与阳极的距离 $x_0=10\ \mathrm{cm}$。假定电离电荷全部被电极收集，读出信号是电阻 R 上的电压。

⑴ 若电阻 $R=10^{11}\ \Omega$。求 α 粒子入射后，电阻 R 上电压随时间的变化。

⑵ 若电阻 $R=5\times10^7\ \Omega$。求 α 粒子入射后，电阻 R 上电压随时间的变化。

⑶ 电离计数器对入射 α 粒子计数时，读出信号幅度超过阈值再降到阈值以下的过程视为有一个 α 粒子穿过了探测器。如果这一过程持续时间（过阈时间）过长，入射 α 粒子频率过高时会发生漏计情况。通过减小电阻，可以有效降低信号过阈时间，提高计数准确率。将电阻 R 更换为 $2\times10^5\ \Omega$，信号幅度阈值设为 $\varepsilon=0.3\ \mathrm{mV}$。求电阻 R 上读出信号的过阈时间（计算精度取 2 位有效数字），并判断能否满足 $50\ \mathrm{kHz}$ 的计数率要求?

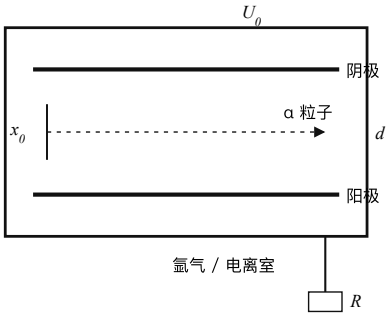

图 7　电离室

八、（40 分）氢原子 $n=2$ 态的自旋进动

1925 年乌伦贝克与古德斯米特提出电子自旋假设，即电子具有内禀角动量，角动量大小为 $\frac{\sqrt{3}}{2}\hbar$，在测量方向上的分量只可能为 $\pm\frac{1}{2}\hbar$。比如电子在匀强稳恒磁场中，磁场方向为测量方向，尽管自旋角动量大小是 $\frac{\sqrt{3}}{2}\hbar$，在磁感应强度方向上的分量只可能为 $\pm\frac{1}{2}\hbar$，而不可能是其它值。

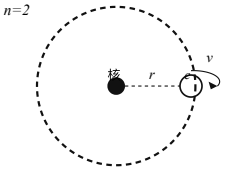

图 8　玻尔轨道

电子有自旋磁矩，磁矩大小与角动量大小之比称为旋磁比，自旋角动量的旋磁比是轨道角动量的两倍。在氢原子中，原子核相对电子的轨道运动会在电子处形成磁场，该磁场会影响电子自旋的运动。设电子质量为 m，电子电量大小为 e，真空介电常数为 ε_0，普朗克常数为 h，$\frac{h}{2\pi}$ 记为 $\hbar$，光速为 c，电子的轨道运动满足玻尔氢原子模型，对于氢原子 $n=2$ 的态：

⑴ 在相对电子静止的参考系中，求电子所在位置的磁感应强度大小；

⑵ 在相对原子核静止的参考系中，证明电子自旋磁矩随电子的运动发生进动，并求自旋磁矩的进动角速度大小；

⑶ 在相对原子核静止的参考系中，若电子的运动速度与光速之比的三次方是可忽略的小量，求电子所在位置的磁感应强度大小。（基于玻尔原子模型所解得的结果与实验有所偏差）