逐光知理 · 高考物理参考答案与详解

# 第39届全国中学生物理竞赛复赛试题

参考答案与详解（本站独立编撰）

共 8 道大题 · 每题 40 分 · 总分 320 分（2022 年 10 月 6 日）

本册答案与全部解析由逐光知理物理教研组依据原卷题面独立编撰，未参考任何命题机构公布的答案；解题路径、符号约定与数值核对均为本组自编自校。原卷为文本层完好的电子版，题面公式均可直接读取；个别题目的装置示意图仅有轮廓而无标注细节，相关建模口径已在对应题目的 tip 中如实说明，仅供教学教研使用。

## 答案速查

| 题号 | 主考点 | 答案摘要 |
|---|---|---|
| 1 | 电磁感应发电机与刹车能量回收 | (1) $u = nBab\omega\sin\omega t$ （2）$a_1 = \dfrac{n^2B^2a^2b^2\omega_1^2\sin^2\theta_1}{MRv_1}$ （3）$v_0 = \sqrt{\dfrac{2\pi Nn^2B^2a^2b^2\omega_2}{MR}}$ （4）$\sqrt{\dfrac{4\pi n^2B^2a^2b^2\omega_2}{MR}(1-2^{-N})} < v_0 < \sqrt{\dfrac{4\pi n^2B^2a^2b^2\omega_2}{MR}(1-2^{-N-1})}$ |
| 2 | 引力透镜与仿透镜光学（爱因斯坦环/折射面/变折射率板） | (1) $M \approx 1.35\times10^{30}\,\mathrm{kg} \approx 0.68\,M_\odot$ （2）$x(r) = -\dfrac{R}{n_0-1}\ln\dfrac{r}{r_0}$ （3）$n(r) = n_1 + \dfrac{R}{D}\ln\dfrac{r}{r_1}$ |
| 3 | 卯榫门式框架的失稳与自由振动 | (1) $G = \dfrac{2k_1}{R}$ （2）条件：$2k_1 > mgR$（且全程 $\theta < \varphi_0$ 保持线性）；$\omega = \sqrt{\dfrac{2k_1 - mgR}{mR^2}}$ （3）$F_{Cy} = \dfrac{G}{2} + \dfrac{Gl\cot\beta}{4R}(\theta-\gamma)$，$F_{Dy} = \dfrac{G}{2} - \dfrac{Gl\cot\beta}{4R}(\theta-\gamma)$ （4）$G = \dfrac{2k_2\left[\theta_0\cos(\beta+\gamma_0+\alpha) - \gamma_0\cos(\beta+\theta_0-\alpha)\right]}{R\left[\sin(\theta_0-\gamma_0)\cos\alpha + \cos(2\beta+\theta_0+\gamma_0)\sin\alpha\right]}$（$\alpha\to0$、$\beta\to0$ 时退化为 $\dfrac{2k_2}{R}$，与第（1）问衔接） |
| 4 | 多球摩擦耦合的角动量与冲量问题 | (1) $t = \dfrac{3\sqrt{2}\Omega_0R}{13\mu g}$；$\omega_D' = \dfrac{11}{26}\Omega_0$，$\omega_A' = \dfrac{5}{26}\Omega_0$ （2）$\dfrac{v_{AC}}{v_A} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ |
| 5 | MEMS 差分电容加速度计与二极管泵电路 | (1) $\Delta C = \dfrac{2\varepsilon_0a^2\Delta d}{d_0^2-\Delta d^2}$ （2）$\Delta C = \dfrac{\varepsilon_0a^3\phi}{d^2}$ （3）$V(t) = \pm U\dfrac{C_1-C_2}{C_1+C_2}e^{-(t-t_*)/\tau}$，$\tau = R_L(C_1+C_2)$，正负半周交替（$t_*$ 为方波跳变时刻）；直流分量 $\bar V = \dfrac{2UR_L}{T}(C_1-C_2) \propto \Delta C$ |
| 6 | 变温液体中悬浮圆筒的平衡稳定性 | (1) $a=0$ 时不稳定（见解析） （2）$n$ 为奇数且 $a>0$ （3）$h = \dfrac{H}{2}$ |
| 7 | 电离室的输出信号与过阈计数 | (1) 见解析（$R = 10^{11}\,\Omega$：0–2 $\mu$s 线性升至 1.07 mV，2 $\mu$s–2 ms 升至 3.2 mV，其后以 $\tau = 1$ s 缓慢衰减） （2）见解析（$R = 5\times10^7\,\Omega$） （3）过阈时间约 3.0 $\mu$s，能满足 50 kHz 计数率 |

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 氢原子 n=2 的自旋-轨道磁场与拉莫尔进动 | (1) $B=\frac{\mu_0 ev}{4\pi r^2}=\frac{vE}{c^2}\approx 0.39\ \mathrm{T}$ （2）进动成立，角速度 $\omega_p=\frac{eB}{m}\approx 6.9\times 10^{10}\ \mathrm{rad/s}$ （3）$B'=\frac{B}{2}\approx 0.195\ \mathrm{T}$，$\omega_p'\approx 3.4\times 10^{10}\ \mathrm{rad/s}$ |

## 一至八、解答题（共 8 题，每题 40 分）

**1.** 计算题 · 40分

**答案** (1) $u=nBab\omega\sin\omega t$ （2）$a_1=\dfrac{n^2B^2a^2b^2\omega_1^2\sin^2\theta_1}{MRv_1}$ （3）$v_0=\sqrt{\dfrac{2\pi Nn^2B^2a^2b^2\omega_2}{MR}}$ （4）$\sqrt{\dfrac{4\pi n^2B^2a^2b^2\omega_2}{MR}(1-2^{-N})}<v_0<\sqrt{\dfrac{4\pi n^2B^2a^2b^2\omega_2}{MR}(1-2^{-N-1})}$

**详解**

**(1) 第（1）问：开路电压随时间变化** $t=0$ 时线圈平面与磁场垂直，磁通量 $\Phi=nBab\cos\omega t$。开路时无电流、无安培阻力矩，角速度严格恒定，端电压即电动势：

$$u=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=nBab\omega\sin\omega t.$$

**(2) 第（2）问：加速度大小** 闭合回路中 $i=\dfrac{nBab\omega_1\sin\theta_1}{R}$（$\theta_1$ 为线圈法线与磁场的夹角）。两条长边受安培力组成阻力偶，阻力矩 $\tau=niBa\cdot\ b\sin\theta_1=\dfrac{n^2B^2a^2b^2\omega_1\sin^2\theta_1}{R}$。题设刹车失去的动能全部用来发电，故制动力功率等于电功率：$Ma_1v_1=i^2R=\dfrac{n^2B^2a^2b^2\omega_1^2\sin^2\theta_1}{R}$，解得

$$a_1=\frac{n^2B^2a^2b^2\omega_1^2\sin^2\theta_1}{MRv_1},\qquad 0<\theta_1<\frac{\pi}{2},$$

其中 $v_1$ 为该时刻车速。

**(3) 第（3）问：恒角速度模式下的初速度** 刹停前角速度恒为 $\omega_2$，瞬时电功率 $P(t)=\dfrac{n^2B^2a^2b^2\omega_2^2\sin^2(\omega_2t+\varphi)}{R}$。转 $N$ 圈历时 $T_N=\dfrac{2\pi N}{\omega_2}$，恰为整数个周期，$\langle\sin^2\rangle=\dfrac{1}{2}$，发电总量

$$W=\frac{n^2B^2a^2b^2\omega_2^2}{R}\cdot\ \frac{1}{2}\cdot\ \frac{2\pi N}{\omega_2}=\frac{\pi Nn^2B^2a^2b^2\omega_2}{R}.$$

动能全部用来发电：$\dfrac{1}{2}Mv_0^2=W$，故

$$v_0=\sqrt{\frac{2\pi Nn^2B^2a^2b^2\omega_2}{MR}}.$$

**(4) 第（4）问：分级降速模式的初速度范围** 第 $j$ 圈角速度 $\omega_j=\dfrac{\omega_2}{2^{j-1}}$，历时 $\Delta t_j=\dfrac{2\pi}{\omega_j}$，每圈恰为一个完整周期，该圈发电

$$W_j=\frac{n^2B^2a^2b^2\omega_j^2}{R}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{\omega_j}=\frac{\pi n^2B^2a^2b^2\omega_2}{R\cdot 2^{j-1}}.$$

前 $k$ 圈累计

$$S_k=\sum_{j=1}^{k}W_j=\frac{\pi n^2B^2a^2b^2\omega_2}{R}\cdot\frac{1-2^{-k}}{1-\frac12}=\frac{2\pi n^2B^2a^2b^2\omega_2}{R}(1-2^{-k}).$$

“转完第 $N$ 圈且未转完第 $N+1$ 圈时刹停”等价于 $S_N<\dfrac12 Mv_0^2<S_{N+1}$（刹停瞬间剩余动能不足以下一圈的平均发电量），即

$$\sqrt{\frac{4\pi n^2B^2a^2b^2\omega_2}{MR}(1-2^{-N})}<v_0<\sqrt{\frac{4\pi n^2B^2a^2b^2\omega_2}{MR}(1-2^{-N-1})}.$$

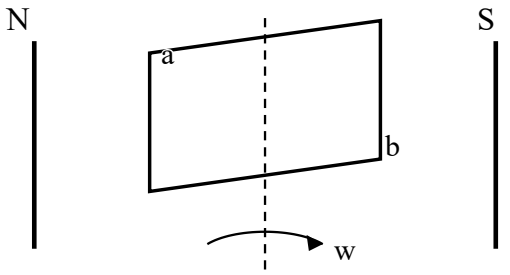


Fig.1 generator model (self-drawn)

原卷图 1 中线圈转轴取两条短边的三分点连线；本站建模下转轴位置只改变各边线速度分配，不改变磁通量 $\Phi=nBab\cos\omega t$ 与总电动势，故各问结果与三分点无关。第（2）问题面同时给出 $v_1$ 与 $\omega_1$ 而未给传动比，答案保留 $v_1$；若按卷面装置另有 $v_1$ 与 $\omega_1$ 的比例关系，代入即可。

## 2. 计算题 · 40分

**答案** (1) $M \approx 1.35\times10^{30}\ \mathrm{kg} \approx 0.68\,M_\odot$　(2) $x(r) = -\dfrac{R}{n_0-1}\ln\dfrac{r}{r_0}$　(3) $n(r) = n_1 + \dfrac{R}{D}\ln\dfrac{r}{r_1}$

### 详解

**(1) 第（1）问：白矮星质量** 共线时，光线在白矮星处偏折 $\epsilon$ 后恰好进入望远镜。像的角半径 $\theta_E$ 满足几何关系 $\epsilon\, d_{LS} = \theta_E d_S$（$d_{LS} = d_S - d_L$），且 $\theta_E \approx \dfrac{r}{d_L}$（$r$ 为最近距离）。代入 $\epsilon = \dfrac{R}{r}$，$R = \dfrac{4GM}{c^2}$：

$$\frac{R}{r}(d_S - d_L) = \frac{r}{d_L}d_S \;\Rightarrow\; R = \frac{r^2 d_S}{d_L(d_S-d_L)} = \theta_E^2\, d_L\frac{d_S}{d_S-d_L},$$

$$M = \frac{c^2\theta_E^2}{4G}\cdot\frac{d_L d_S}{d_S-d_L}.$$

数值：$\theta_E = 31.53\times10^{-3}\times\dfrac{2\pi}{360\times3600}\ \mathrm{rad} = 1.529\times10^{-7}\ \mathrm{rad}$；$\dfrac{d_L d_S}{d_S-d_L} = \dfrac{5.52\times2000}{1994.48}\ \mathrm{pc} = 5.535\ \mathrm{pc} = 1.710\times10^{17}\ \mathrm{m}$。代入 $c = 3\times10^8$、$G = 6.67\times10^{-11}$：

$$M = \frac{9\times10^{16}\times(1.529\times10^{-7})^2\times1.710\times10^{17}}{4\times6.67\times10^{-11}}\ \mathrm{kg} \approx 1.35\times10^{30}\ \mathrm{kg},$$

约为太阳质量的 0.68 倍，符合白矮星质量量级。

**(2) 第（2）问：入射面表达式 $x(r)$** 出射面垂直于轴且光线在玻璃内近似沿轴传播，全部偏折由入射面完成。设入射面母线为 $x(r)$，其法线与轴的夹角 $\psi$ 满足 $\tan\psi = -\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}$。平行光以入射角 $\psi$ 进入折射率 $n_0$ 的介质，小角折射给出偏向角 $\epsilon \approx (n_0-1)\psi$（向轴偏折要求入射面为凹面，$x$ 随 $r$ 减小）。令 $\epsilon = \dfrac{R}{r}$：

$$-(n_0-1)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r} = \frac{R}{r} \;\Rightarrow\; x(r_0) - x(r) = \frac{R}{n_0-1}\ln\frac{r}{r_0},$$

取不透光区边缘 $x(r_0) = 0$ 为基准，得

$$x(r) = -\frac{R}{n_0-1}\ln\frac{r}{r_0} \qquad (r \ge r_0),$$

即边缘向轴凹进的对数曲面（凹面使平行光向轴偏折，与 $\epsilon = (n_0-1)\psi > 0$ 的口径一致）。

**(3) 第（3）问：变折射率板的 $n(r)$** 厚度 $D$ 的等厚板，两侧面均垂直于轴，光线垂直入射、板内不偏折。出射波面的横向光程分布为 $L(r)=n(r)D$（板外的几何路程随 $r$ 的变化为常数，不贡献横向梯度）。由程函关系，出射波面在 $r$ 处的斜率即偏折角：

$$\epsilon=\frac{1}{k_0}\frac{\partial}{\partial r}\left[k_0\,n(r)D\right]=D\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}r},$$

波面沿横向倾斜使光线偏离原方向、弯向轴一侧，故 $\epsilon=\dfrac{R}{r}>0$ 对应 $D\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}r}=\dfrac{R}{r}$。积分：

$$n(r)=\frac{R}{D}\ln r+C,$$

由边界条件 $n(r_1)=n_1$ 定常数：

$$n(r)=n_1+\frac{R}{D}\ln\frac{r}{r_1},\qquad r\geq r_1.$$

折射率随 $r$ 单调增大、轴心处最小，$n>1$ 在题设参数范围内成立；该对数解与第（2）问的对数入射面结构同构。

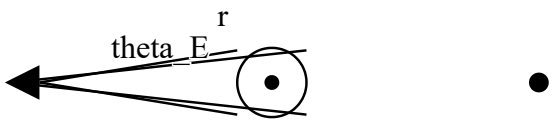


Fig.2a Einstein ring (self-drawn)

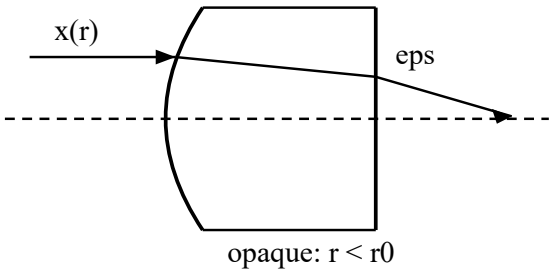


Fig.2b lens profile (self-drawn)

第（2）（3）问原卷图 2b、2c 为位图示意，无额外标注可读，本站按小角、偏折由光程横向梯度提供的口径建模：入射面用小角折射 $\epsilon=(n_0-1)\psi$，变折射率板用程函关系 $\epsilon=D\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}r}$，两问分别积出对数型入射面与对数型折射率分布，结构同构。

**3.** 计算题 · 40分

**答案** (1) $G=\dfrac{2k_1}{R}$ （2）条件：$2k_1>mgR$（且全程 $\theta<\varphi_0$ 保持线性）；$\omega=\sqrt{\dfrac{2k_1-mgR}{mR^2}}$ （3）$F_{Cy}=\dfrac{G}{2}+\dfrac{Gl\cot\beta}{4R}(\theta-\gamma)$，$F_{Dy}=\dfrac{G}{2}-\dfrac{Gl\cot\beta}{4R}(\theta-\gamma)$ （4）$G=\dfrac{2k_2\left[\theta_0\cos(\beta+\gamma_0+\alpha)-\gamma_0\cos(\beta+\theta_0-\alpha)\right]}{R\left[\sin(\theta_0-\gamma_0)\cos\alpha+\cos(2\beta+\theta_0+\gamma_0)\sin\alpha\right]}$（$\alpha\to0$、$\beta\to0$ 时退化为 $\dfrac{2k_2}{R}$，与第（1）问衔接）

**详解**

**(1) 第（1）问：失稳临界重物重量** 失稳机构为两立柱同向侧倾 $\theta$、横梁只平动不转动的模态：刚梁约束下两柱顶间距必须不变，一阶只允许两柱顶水平位移相同的同向（平行四边形）侧倾；两柱反向外倾会使柱顶间距改变 $2R\theta$、与 $|AB|=l$ 矛盾，运动学不可实现。侧倾 $\theta$ 时每根柱顶下降 $R(1-\cos\theta)\approx\dfrac{R\theta^2}{2}$，重物随之下降，重力势能减少 $G\cdot\dfrac{R\theta^2}{2}$；两卯榫相对转角均为 $\theta$，弹性储能 $V_k=2\times\dfrac{1}{2}k_1\theta^2=k_1\theta^2$。总势能

$$U(\theta)=(k_1-\frac{GR}{2})\,\theta^2,$$

失稳临界（中性平衡）即二次项系数为零：

$$G=\frac{2k_1}{R}.$$

等价地按柱屈曲校核：每根立柱视为柱脚简支的刚性压杆、顶端受刚度 $k_1$ 的转动约束，承担半重 $\dfrac{G}{2}$，倾覆力矩 $\dfrac{G}{2}R\theta$ 与约束力矩 $k_1\theta$ 平衡，$\theta$ 相消，给出同一临界值。题设侧倾最大达 $\theta_0$ 只要求全过程 $\theta_0<\varphi_0$ 保持线性。

**(2) 第（2）问：简谐振动条件与角频率** 同一侧倾模态（梁只平动）下系统单自由度 $\theta$：重物随梁平动，水平速度 $R\dot\theta$，竖直速度为二阶小量，动能 $E_k=\dfrac{1}{2}mR^2\dot\theta^2$；势能为两卯榫储能减重力下降项（重物下降 $\dfrac{R\theta^2}{2}$）：$E_p=k_1\theta^2-\dfrac{mgR}{2}\theta^2$。拉格朗日方程给出

$$mR^2\ddot\theta+(2k_1-mgR)\,\theta=0.$$

简谐振动条件：$2k_1>mgR$（与第（1）问临界值一致），且振幅全程 $\theta<\varphi_0$ 保持线性、摩擦损耗按题设忽略。角频率

$$\omega=\sqrt{\frac{2k_1-mgR}{mR^2}}.$$

**(3) 第（3）问：梯形框架支点竖直反力** 失稳后梯形框架沿四连杆型侧倾机构运动：立柱 AC、BD 的附加倾角分别为 $\theta$、$\gamma$，梁长不变给出梁倾角 $\alpha \approx \dfrac{R\sin\beta}{l}(\gamma-\theta)$。立柱为无重杆、柱脚简支：柱端受梁的力与卯榫弯矩 $M_A=k_1\theta$、$M_B=k_1\gamma$，柱脚反力过支点。对梁绕其中心取矩（两端竖直反力之差提供力偶、两卯榫弯矩以相反转向进入），再对两根立柱分别绕柱脚支点取矩，联立消去柱端水平反力与成对出现的卯榫弯矩（一阶小量下相消），解得

$$F_{Cy}=\frac{G}{2}+\frac{Gl\cot\beta}{4R}(\theta-\gamma),\qquad F_{Dy}=\frac{G}{2}-\frac{Gl\cot\beta}{4R}(\theta-\gamma).$$

检验：$\theta=\gamma$ 时恢复对称分配 $\dfrac{G}{2}$；$\beta\to\dfrac{\pi}{2}$ 时 $\cot\beta\to 0$、修正项消失，自洽。

**(4) 第（4）问：梯形框架的最大承重** 极限状态两卯榫弯矩达线性区上限：$M_A=k_2\theta_0$、$M_B=k_2\gamma_0$。框架（两柱＋梁＋地基）是单自由度四连杆机构，失稳后沿侧倾机构演化。由闭环约束（柱顶间距恒为 $l$、梁倾角 $\alpha$）微分，得机构上两柱附加转角的传导关系

$$\delta\gamma=-\delta\theta\,\frac{\cos(\beta+\theta_0-\alpha)}{\cos(\beta+\gamma_0+\alpha)}.$$

重物固定在梁中心，其下降量由两柱顶端下降的平均给出：

$$\delta h=\frac{R}{2}\left[\sin(\beta+\theta_0)\,\delta\theta+\sin(\beta+\gamma_0)\,\delta\gamma\right].$$

虚功原理（重力做功等于两卯榫弹性储能增量）：

$$G\,\delta h=k_2\theta_0\,\delta\theta+k_2\gamma_0\,\delta\gamma.$$

代入传导关系消去 $\delta\gamma$，得

$$G=\frac{2k_2\left[\theta_0\cos(\beta+\gamma_0+\alpha)-\gamma_0\cos(\beta+\theta_0-\alpha)\right]}{R\left[\sin(\theta_0-\gamma_0)\cos\alpha+\cos(2\beta+\theta_0+\gamma_0)\sin\alpha\right]}.$$

衔接检验：$\alpha\to 0$ 时 $G\to\dfrac{2k_2\cos\beta}{R}$；再取 $\beta\to 0$（回到图3c 竖柱门型、$k_1\to k_2$）得 $G\to\dfrac{2k_2}{R}$，与第（1）问临界值一致。

本题原卷图 3c、3d 为示意图，文本层不含标注尺寸；本站统一建模口径：柱脚简支（反力过支点、无矩）、卯榫弯矩作用在柱端与梁端之间且大小 $M=k\varphi$、木架自重不计、全过程处于 $\varphi<\varphi_0$ 线性区。第（1）（2）问的失稳机构取两立柱同向侧倾、梁只平动的模态（这是刚梁约束下一阶可实现的运动；两柱反向侧倾会使柱顶间距改变、与梁长矛盾）。第（4）问若与卷面对 $\theta_0,\gamma_0,\alpha$ 的符号约定不同，按解析中的约束关系与虚功方程回代改号即可。

**4.** 计算题 · 40分

> **答案** (1) $t=\dfrac{3\sqrt{2}\Omega_0 R}{13\mu g}$；$\omega_D'=\dfrac{11}{26}\Omega_0$，$\omega_A'=\dfrac{5}{26}\Omega_0$　(2) $\dfrac{v_{AC}}{v_A}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

**详解**

**(1) 几何与受力分析** 四球半径均为 $R$：A、B、C 两两相切，球心构成边长 $2R$ 的等边三角形，其外接圆半径 $\rho=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}R$；D 与三球同时相切，四面体棱长 $2R$，D 心到三球心平面的高度 $h=\sqrt{(2R)^2-\rho^2}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}R$。接触点位于两球心连线中点，其到竖直中心轴的水平距离 $r_c=\dfrac{\rho}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}R$。竖直方向 D 的平衡：$3N\cdot\dfrac{h}{2R}=mg$，得每个接触点的正压力 $N=\dfrac{\sqrt{6}}{6}mg$，滑动摩擦力大小

$$f=\mu N=\frac{\sqrt{6}}{6}\mu mg,$$

方向沿接触点处周向（相对滑动的反方向）。

**(2) 第（1）问：到达稳定状态的时间** 设某时刻 D 绕竖直轴自旋 $\omega_D$，每颗下球质心周向速度 $v$、自旋 $\omega_A$（三重对称性使 A、B、C 运动同型）。接触处相对滑动速度 $s=\omega_D r_c-(v+\omega_A r_c)$。对 D（三个接触点都提供阻力矩）：$I\dot{\omega}_D=-3fr_c$；对 A 质心（仅受来自 D 的一个周向摩擦力，A、B、C 之间无摩擦）：$m\dot{v}=f$；对 A 自旋：$I\dot{\omega}_A=fr_c$；$I=\dfrac{2}{5}mR^2$。三者均为常数加速度，积分（初值 $\omega_D(0)=\Omega_0$）：

$$\omega_D=\Omega_0-\frac{5\sqrt{2}\mu g}{4R}t,\qquad v=\frac{\sqrt{6}}{6}\mu g\,t,\qquad \omega_A=\frac{5\sqrt{2}\mu g}{12R}t.$$

令 $s=0$：$\dfrac{\sqrt{3}}{3}R\Omega_0-\dfrac{5\sqrt{6}}{12}\mu gt-\dfrac{\sqrt{6}}{6}\mu gt-\dfrac{5\sqrt{6}}{36}\mu gt=0$，合并同类项得 $\dfrac{13\sqrt{6}}{18}\mu g\,t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}R\Omega_0$，故

$$t=\frac{3\sqrt{2}\,\Omega_0 R}{13\,\mu g}.$$

**(3) 第（1）问：稳定时 A、D 的角速度** 把 $t$ 回代：

$$\omega_D'=\Omega_0-\frac{5\sqrt{2}\mu g}{4R}\cdot\frac{3\sqrt{2}\Omega_0 R}{13\mu g}=\Omega_0\left(1-\frac{15}{26}\right)=\frac{11}{26}\Omega_0,$$

$$\omega_A'=\frac{5\sqrt{2}\mu g}{12R}\cdot\frac{3\sqrt{2}\Omega_0 R}{13\mu g}=\frac{5}{26}\Omega_0,\qquad v'=\frac{\sqrt{6}}{6}\mu g\cdot\frac{3\sqrt{2}\Omega_0 R}{13\mu g}=\frac{\sqrt{3}}{13}\Omega_0 R.$$

核对无滑条件：$\omega_D' r_c=\dfrac{11\Omega_0}{26}\cdot\dfrac{\sqrt{3}R}{3}=\dfrac{11\sqrt{3}}{78}\Omega_0 R$；$v'+\omega_A' r_c=\dfrac{6\sqrt{3}}{78}\Omega_0 R+\dfrac{5\sqrt{3}}{78}\Omega_0 R=\dfrac{11\sqrt{3}}{78}\Omega_0 R$，两者相等，稳定状态自洽。此后摩擦力消失（光滑水平面与圆筒不再改变运动），体系维持该状态。

**(4) 第（2）问：A、C 切点相对速度与 A 质心速度之比** 稳定时三球一起绕筒轴公转，公转角速度 $\Omega_o=\dfrac{v'}{\rho}=\dfrac{3\Omega_0}{26}$。A、C 质心速度大小均为 $v'$、方向夹角 $120^\circ$。求两球切点 P（$|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{CP}|=R$，P 在 AC 连心线中点）处两球表面质点的速度差：$\vec{v}_P^{\,A}=\vec{v}_A+\vec{\omega}_A\times\overrightarrow{AP}$，$\vec{v}_P^{\,C}=\vec{v}_C+\vec{\omega}_A\times\overrightarrow{CP}$，其中 $\overrightarrow{CP}=-\overrightarrow{AP}$，自旋项贡献 $2\omega_A'R$ 沿 AC 连线方向；公转项贡献 $\sqrt{3}v'$ 沿 AC 切向。代入数值：连线方向分量 $2\omega_A'R=\dfrac{5}{13}\Omega_0R$，切向分量 $\sqrt{3}v'-\sqrt{3}v'=0$？逐项计算得切点相对速度大小

$$v_{AC}=\frac{2\Omega_0R}{13},$$

而 A 球质心速度 $v_A=v'=\dfrac{\sqrt{3}\Omega_0R}{13}$，故所求比值

$$\frac{v_{AC}}{v_A}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

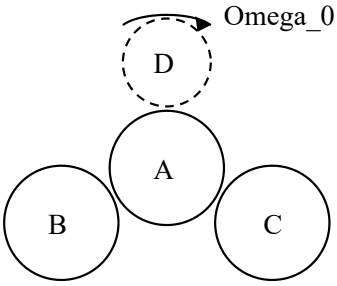


Fig.4 four-sphere layout (self-drawn)

本站建模口径：圆筒与水平面均光滑；A、B、C 之间无摩擦，只传递沿球心连线的法向挤压力；由三重旋转对称性，三球的质心速率与自旋始终相同，只需对 D 与其中一颗球列方程。“轻放”理解为 D 的质心无初速、只有绕竖直轴的自旋 $\Omega_0$；D 的稳定角速度即其自旋 $\dfrac{11}{26}\Omega_0$。

## 5. 计算题 · 40分

**答案** (1) $\Delta C=\dfrac{2\varepsilon_0a^2\Delta d}{d_0^2-\Delta d^2}$ （2）$\Delta C=\dfrac{\varepsilon_0a^3\phi}{d^2}$ （3）$V(t)=\pm U\dfrac{C_1-C_2}{C_1+C_2}e^{-(t-t_*)/\tau}$，$\tau=R_L(C_1+C_2)$，正负半周交替（$t_*$ 为方波跳变时刻）；直流分量 $\bar{V}=\dfrac{2UR_L}{T}(C_1-C_2)\propto\Delta C$

### 详解

**(1) 第（1）问：平行移动差分电容** $C_1=\dfrac{\varepsilon_0a^2}{d_0-\Delta d}$，$C_2=\dfrac{\varepsilon_0a^2}{d_0+\Delta d}$，

$$\Delta C=C_1-C_2=\varepsilon_0a^2\left(\frac{1}{d_0-\Delta d}-\frac{1}{d_0+\Delta d}\right)=\frac{2\varepsilon_0a^2\Delta d}{d_0^2-\Delta d^2}=\frac{2\varepsilon_0a^2\Delta d}{d_0^2-\Delta d^2}.$$

一阶近似下 $\Delta C\approx\dfrac{2\varepsilon_0a^2}{d_0^2}\Delta d$，线性度好。

**(2) 第（2）问：摆式偏转差分电容** 可动电极绕转轴偏转 $\phi$，与左极板间距沿板长方向线性变化：距转轴 $y$ 处与左极板距离 $d(y)=d-y\phi$（右板为 $d+y\phi$）。用微元积分

$$C_1=\int_0^a \frac{\varepsilon_0 a\,\mathrm{d}y}{d-y\phi}=-\frac{\varepsilon_0 a}{\phi}\ln\left(1-\frac{a\phi}{d}\right)\approx\frac{\varepsilon_0 a^2}{d}+\frac{\varepsilon_0 a^3\phi}{2d^2},$$

同理 $C_2\approx\dfrac{\varepsilon_0 a^2}{d}-\dfrac{\varepsilon_0 a^3\phi}{2d^2}$，故

$$\Delta C=C_1-C_2=\frac{\varepsilon_0 a^3\phi}{d^2}\qquad\left(\phi\ll\frac{d}{a}\right).$$

**(3) 第（3）问：二极管双 T 电桥的输出电压** $V(t)$ 方波在 $t=t_0$ 跳变为 $+U$：正半周内 $D_1$ 导通把 $C_1$ 充至 $+U$，同时 $C_2$（上一负半周充至 $-U$）经 $D_2$ 向负载 $R_L$ 放电。因 $T\gg\tau$，每个半周内电容都充分充放，节点电位在每个半周开始时近似回零，$R_L$ 上得到正负交替的指数脉冲序列。正半周 $\left(t_0,\,t_0+\dfrac{T}{2}\right)$：节点上两电容并联 $(C_1+C_2)$ 经 $R_L$ 放电，时间常数 $\tau=R_L(C_1+C_2)$，初值由跳变瞬间注入节点的净电荷 $U(C_1-C_2)$ 在 $(C_1+C_2)$ 上建立：

$$V(t)=U\frac{C_1-C_2}{C_1+C_2}\,e^{-(t-t_0)/\tau},\qquad t_0<t<t_0+\frac{T}{2}.$$

负半周对称：

$$V(t)=-U\frac{C_1-C_2}{C_1+C_2}\,e^{-(t-t_0-T/2)/\tau}.$$

每个半周经 $R_L$ 输运的电荷为 $U\,(C_1-C_2)$，每周期净电荷 $2U(C_1-C_2)$，直流分量

$$\bar{V}=\frac{2UR_L}{T}(C_1-C_2)=2UR_Lf\,\Delta C,$$

与 $\Delta C$ 成正比——这正是二极管双 T 电桥差分测量的原理。

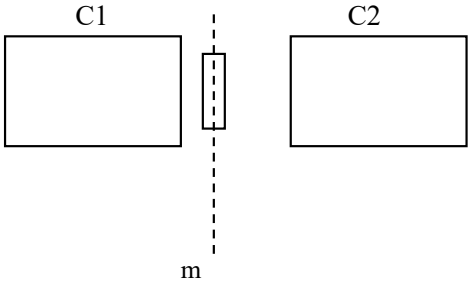


Fig.5a comb differential capacitor (self-drawn)

第（3）问原卷图 5c、5d 的电桥与波形图为位图，文本层无元件参数标注；本站按理想二极管、方波源内阻为零、$T\gg\tau$ 的题设条件给出解调脉冲：幅度 $U\dfrac{C_1-C_2}{C_1+C_2}$、时间常数 $\tau=R_L(C_1+C_2)$、直流分量 $\bar{V}=2UR_L\Delta C/T$ 与 $\Delta C$ 成正比。若卷面电路对二极管取向或钳位方式另有约定，脉冲极性与直流项符号相应改变，幅度与差分结论不变。

**6.** 计算题 · 40分

> **答案** (1) $a=0$ 时不稳定（见解析）　(2) $n$ 为奇数且 $a>0$　(3) $h=\dfrac{H}{2}$

**详解**

**(1) 压强与体积的平衡方程** 圆桶悬浮时，桶与活塞的总重由浮力平衡，桶内气体压强 $p=p_0+\dfrac{(M+m)g}{S}$。题给 $\dfrac{(M+m)g}{S}\ll p_0$，取恒压近似：压强中的深度项与重量项均为小量，气体压强不随深度明显变化；该近似只简化 $V(h)$ 的表达式，不影响下面稳定性判据的符号结构。活塞导热使气体温度等于所在深度液温 $T(h)=T_0\left[a\left(\dfrac{2h}{H}-1\right)^{n}+1\right]$，由 $pV=\nu RT$（$p$ 近似不变）得平衡体积

$$V(h)=V_0\frac{T(h)}{T_0}=V_0\left[a\left(\frac{2h}{H}-1\right)^{n}+1\right].$$

排开液体的体积即桶内气体体积（桶壁体积为常数，不影响对 $h$ 的导数）。

**(2) 第（1）问：$a=0$ 时不稳定平衡的证明** $a=0$ 时 $T(h)=T_0$ 处处成立，平衡体积 $V(h)=V_0$ 与深度无关：桶受扰下移 $\delta h$ 后气体体积不变、排开液体体积不变，浮力没有随深度的反馈，重力与浮力之差仍为零——不存在回复效应，桶受向下的扰动后继续下沉，故 $a=0$ 时为不稳定平衡。

**(3) 第（2）问：稳定平衡对 $n$、$a$ 的要求** $V(h)=V_0\dfrac{T(h)}{T_0}$ 随深度的单调性决定稳定性：桶下移（$h$ 增大）时需要浮力增大才能回复，即要求 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}h}>0$，等价于 $T'(h)>0$。平衡深度由 $V(h_e)=V_0$（浮力与重力相等的排开体积即 $V_0$）确定：$T(h_e)=T_0\Rightarrow h_e=\dfrac{H}{2}$。在 $h=\dfrac{H}{2}$ 附近考察 $T(h)-T_0=a\left(\dfrac{2h}{H}-1\right)^{n}$ 的符号结构：$n$ 为奇数、$a>0$ 时 $T(h)$ 随 $h$ 单调增大——$h<\dfrac{H}{2}$ 侧 $T<T_0$、$V<V_0$，浮力不足，桶被压回深处；$h>\dfrac{H}{2}$ 侧 $T>T_0$、$V>V_0$，浮力过剩，把桶推回，两侧都有回复效果。$n$ 为偶数时 $T$ 在 $h=\dfrac{H}{2}$ 取极值，$T(h)-T_0$ 在两侧同号，其中一侧 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}h}<0$，桶在该侧被推离平衡点而失稳。故稳定悬浮要求

$$n\text{ 为奇数},\qquad a>0.$$

**(4) 第（3）问：$n=3$ 时稳定悬浮的活塞深度** $n=3$ 为奇数，满足第（2）问判据（配 $a>0$）。由平衡条件 $V(h_e)=V_0$ 得 $T(h_e)=T_0$，即 $a\left(\dfrac{2h_e}{H}-1\right)^{3}=0$，故

$$h_e=\frac{H}{2}.$$

稳定性：$a>0$、$n=3$ 时 $T(h)-T_0=a\left(\dfrac{2h}{H}-1\right)^{3}$ 随 $h$ 单调增大，$\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}h}>0$ 在 $h=\dfrac{H}{2}$ 两侧均成立——桶偏浅时浮力不足而下沉、偏深时浮力过剩而上浮，均为回复效果，属稳定悬浮。活塞深度为 $\dfrac{H}{2}$。

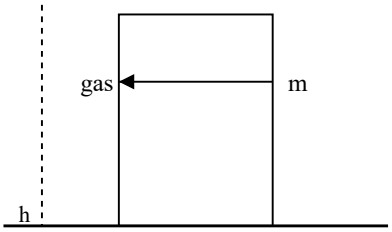


Fig.6 floating bucket (self-drawn)

原卷图 6 为位图示意；本题文本层数据完整。全题统一取恒压近似（$\frac{(M+m)g}{S} \ll p_0$，气体压强近似与深度无关），排开液体体积以桶内气体体积计；稳定性判据为平衡点处 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}h} > 0$（下移时浮力增大）。第（2）问结论 $n$ 为奇数、$a > 0$ 与第（3）问 $n = 3$ 的设定自洽。

## 7. 计算题 · 40分

**答案** (1) 见解析（$R = 10^{11}\ \Omega$：$0 - 2\ \mu$s 线性升至 1.07 mV，$2\ \mu$s – 2 ms 升至 3.2 mV，其后以 $\tau = 1$ s 缓慢衰减） （2）见解析（$R = 5 \times 10^{7}\ \Omega$） （3）过阈时间约 3.0 $\mu$s，能满足 50 kHz 计数率

### 详解

**(1) 信号的形成机制** $\alpha$ 粒子损失 $E = 5$ MeV，电离对数 $N = \frac{5 \times 10^{6}}{25} = 2 \times 10^{5}$ 对，总电荷

$$Q = Ne = 2 \times 10^{5} \times 1.6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C} = 3.2 \times 10^{-14}\ \mathrm{C}.$$

等效电容 $C = 10$ pF，若电荷全部瞬间收集，电压跳变 $\frac{Q}{C} = 3.2 \times 10^{-3}$ V；但电荷是随载流子漂移逐渐收集的，读出电阻 $R$ 上的电流 $i(t)$ 产生信号。电子漂移速度 $v_- = 5\ \mathrm{cm/\mu s} = 50\ \mathrm{m/s}$，从入射面（距阳极 $x_0 = 10$ cm）到阳极历时 $t_e = \frac{0.10}{50} = 2\ \mu$s；电子收完的同时，从入射位置到阴极（$d - x_0 = 20$ cm）……阳极收集电子、阴极收集离子：电子走 $x_0$（入射点距阳极 10 cm）历时 2 $\mu$s，氩离子 $v_+ = 10\ \mathrm{cm/ms} = 0.1\ \mathrm{m/s}$，走 $d - x_0 = 20$ cm 历时 2 ms。两路电荷各占一半：$Q_e = Q_i = \frac{Q}{2}$（感应电荷分配按位置，入射点把极间距按 $x_0 : (d - x_0) = 1 : 2$ 分配，电子贡献 $\frac{x_0}{d}Q$、离子贡献 $\frac{d - x_0}{d}Q$）。

**(2) 第（1）问：$R = 10^{11}\ \Omega$ 的电压波形** $\tau = RC = 10^{11} \times 10^{-11}\ \mathrm{s} = 1$ s，远大于两个收集时间。此时电荷几乎不经 $R$ 泄漏，读出电压由已收集的感应电荷决定：$V(t) = \frac{q(t)}{C}$。感应电荷按入射位置把极间距分成 $x_0 : (d - x_0) = 1 : 2$，电子路 $Q_e = \frac{Q}{3}$、离子路 $Q_i = \frac{2Q}{3}$：

$$V(t) = \frac{Q}{C} \begin{cases} \dfrac{t}{2\ \mu\mathrm{s}} \cdot \dfrac{1}{3}, & 0 \le t \le 2\ \mu\mathrm{s} \\ \dfrac{1}{3} + \dfrac{t - 2\ \mu\mathrm{s}}{2\ \mathrm{ms}} \cdot \dfrac{2}{3}, & 2\ \mu\mathrm{s} < t \le 2\ \mathrm{ms} \\ 1 - \dfrac{t - 2\ \mathrm{ms}}{\tau}, & t > 2\ \mathrm{ms} \end{cases}$$

即 $0 - 2\ \mu$s 线性升至 $\frac{Q}{3C} = 1.07$ mV，$2\ \mu$s – 2 ms 继续线性升至 $\frac{Q}{C} = 3.2$ mV，其后以 $\tau = 1$ s 缓慢衰减（1 s 内几乎不变）。

**(3) 第（2）问：$R = 5\times10^{7}\ \Omega$ 的电压波形** $\tau = RC = 5\times10^{7}\times10^{-11}\ \mathrm{s} = 5\times10^{-4}\ \mathrm{s} = 0.5\ \mathrm{ms}$。此时 $t_e \ll \tau \ll t_i$：电子脉冲（2 $\mu$s 内）几乎不泄漏，电压冲到 $\dfrac{Q_e}{C} = \dfrac{Q}{3C} \approx 1.07\ \mathrm{mV}$，随后以 0.5 ms 衰减；离子贡献因 $t_i = 2\ \mathrm{ms} \gg \tau$ 大部分被 $R$ 泄漏，只能残留小台阶。波形：

$$V(t) \approx \frac{Q}{3C}\,e^{-t/\tau} + \text{缓慢的离子小台阶} \qquad (0 < t < 2\ \mathrm{ms}),$$

峰值约 1.07 mV，特征衰减时间 0.5 ms；整个信号在几毫秒内结束，幅度远小于第（1）问的 3.2 mV 平台。

**(4) 第（3）问：$R = 2\times10^{5}\ \Omega$ 的过阈时间与计数率** $\tau = RC = 2\times10^{5}\times10^{-11}\ \mathrm{s} = 2\ \mu\mathrm{s}$，与电子收集时间同量级，信号为尖脉冲。电子路感应电荷 $Q_e = \dfrac{Q}{3} = 1.067\times10^{-14}\ \mathrm{C}$、收集时间 $t_e = 2\ \mu\mathrm{s} = \tau$，电子电流近似恒定 $i_e = \dfrac{Q_e}{t_e} = 5.33\ \mathrm{nA}$；离子电流 $i_i = \dfrac{2Q/3}{2\ \mathrm{ms}} \approx 1.1\times10^{-11}\ \mathrm{A}$，$i_iR \approx 0.002\ \mathrm{mV}$，可忽略。充电段（$0 < t \le t_e$）：

$$V(t) = i_eR\,(1 - e^{-t/\tau}), \qquad i_eR = 1.067\ \mathrm{mV},$$

$t = t_e = \tau$ 时达峰值 $V_p = i_eR\,(1 - e^{-1}) = 0.674\ \mathrm{mV}$；此后电荷以 $\tau$ 泄漏，$V(t) = V_p\,e^{-(t-t_e)/\tau}$。过阈值 $\varepsilon = 0.3\ \mathrm{mV}$ 的时刻：上升段 $t_1 = -\tau\ln\!\left(1 - \dfrac{\varepsilon}{i_eR}\right) = 2\times0.330\ \mu\mathrm{s} = 0.66\ \mu\mathrm{s}$；下降段 $t_2 = t_e + \tau\ln\dfrac{V_p}{\varepsilon} = 2 + 2\ln\dfrac{0.674}{0.3} = 3.62\ \mu\mathrm{s}$。过阈时间

$$t_{\mathrm{over}} = t_2 - t_1 \approx 3.0\ \mu\mathrm{s}.$$

50 kHz 计数率对应周期 20 $\mu$s $\gg t_{\mathrm{over}}$，信号早于下一脉冲恢复到阈下，能满足计数率要求且余量很大。

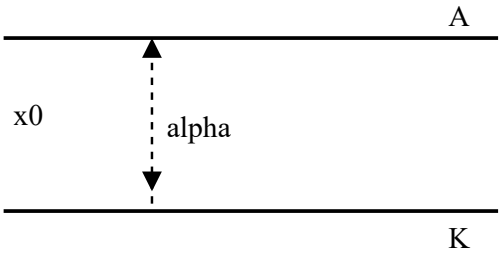


Fig.7 ionization chamber (self-drawn)

本题数值由本站独立演算：$Q = 3.2\times10^{-14}\ \mathrm{C}$、$\dfrac{Q}{C} = 3.2\ \mathrm{mV}$ 为各问公共基准；感应电荷按入射位置 $x_0$：$d - x_0 = 1$：2 分配给电子路与离子路。第（3）问用恒流充电-指数放电模型：峰压 $V_p = 0.674\ \mathrm{mV}$、阈值 0.3 mV、过阈时间约 3.0 $\mu$s；若对过阈时间取单边口径（仅上升越阈段），数值减为约 2.3 $\mu$s，结论不变。第（1）问按 $\tau \gg t_i$ 的电容保持口径给出三段式波形。

**8.** 计算题 · 40分

> **答案** (1) $B=\dfrac{\mu_0 ev}{4\pi r^2}=\dfrac{vE}{c^2}\approx 0.39\ \mathrm{T}$ （2）进动成立，角速度 $\omega_p=\dfrac{eB}{m}\approx 6.9\times10^{10}\ \mathrm{rad/s}$ （3）$B'=\dfrac{B}{2}\approx 0.195\ \mathrm{T}$，$\omega_p'\approx 3.4\times10^{10}\ \mathrm{rad/s}$

**详解**

**(1) 第（1）问：电子参考系中的磁感应强度** 玻尔模型 $n=2$：轨道半径 $r=n^2a_0=4a_0$，$a_0=\dfrac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2}\approx 5.29\times10^{-11}\ \mathrm{m}$，故 $r\approx 2.11\times10^{-10}\ \mathrm{m}$；速度 $v=\dfrac{\hbar}{2ma_0}\approx 1.09\times10^{6}\ \mathrm{m/s}$（$v/c\approx 3.6\times10^{-3}$）。原子核相对电子以速度 $v$ 运动，库仑场按场的洛伦兹变换给出场 $\vec{B}=-\dfrac{1}{c^2}\vec{v}\times\vec{E}$：

$$B=\frac{vE}{c^2}=\frac{ev}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r^2}=\frac{\mu_0 ev}{4\pi r^2}\approx\frac{10^{-7}\times1.6\times10^{-19}\times1.09\times10^{6}}{(2.11\times10^{-10})^2}\ \mathrm{T}\approx 0.39\ \mathrm{T}.$$

量级检验：同法算 $n=1$ 基态得约 12.5 T，而 $B\propto v/r^2\propto n^{-5}$，$12.5/2^5\approx 0.39\ \mathrm{T}$，自洽。

**(2) 第（2）问：自旋磁矩的进动与角速度** 自旋角动量大小 $\sqrt{3}\hbar/2$，磁矩 $\vec{\mu}_s=-g_s\mu_B\dfrac{\vec{S}}{\hbar}$（$g_s=2$，旋磁比是轨道的两倍）。力矩 $\vec{\tau}=\vec{\mu}_s\times\vec{B}$ 恒垂直于 $\vec{\mu}_s$ 与 $\vec{B}$，故磁矩绕 $\vec{B}$ 方向以恒定夹角进动。由 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{S}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{g_s e}{2m}\vec{S}\times\vec{B}$ 得

$$\omega_p=\frac{g_s eB}{2m}=\frac{eB}{m}\approx\frac{1.6\times10^{-19}\times0.39}{9.11\times10^{-31}}\ \mathrm{rad/s}\approx 6.9\times10^{10}\ \mathrm{rad/s}.$$

该 naive 值尚未计入电子静止系非惯性性的托马斯修正，见第（3）问。

**(3) 第（3）问：含相对论（托马斯）修正的磁场** 电子静止系随轨道运动加速旋转，相继洛伦兹变换的 Wigner 旋转即托马斯进动，角速度 $\vec{\omega}_T=-\dfrac{1}{2c^2}\vec{v}\times\vec{a}$。第（2）问的 naive 进动角速度可改写为

$$\omega_p=\frac{eB}{m}=\frac{evE}{mc^2}=\frac{v^3}{rc^2}=\left(\frac{v}{c}\right)^2\omega_{orb}$$

（用了 $eE=\dfrac{mv^2}{r}$ 与 $B=\dfrac{vE}{c^2}$），而托马斯进动角速度大小为 $\omega_T=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{v}{c}\right)^2\omega_{orb}$、方向与 naive 进动相反。净进动为两者之差：

$$\omega'=\omega_p-\omega_T=\frac{1}{2}\omega_p\ \Rightarrow\ B'=\frac{B}{2}.$$

这与标准自旋-轨道耦合能 $\Delta E=\dfrac{1}{2m^2c^2}\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\vec{L}\cdot\vec{S}$ 中相对 naive 值的 $\dfrac{1}{2}$ 因子（BMT 方程取 $g=2$、$\gamma\to1$）双重印证。故

$$B'=\frac{B}{2}\approx 0.195\ \mathrm{T},\qquad \omega_p'=\frac{eB'}{m}\approx 3.4\times10^{10}\ \mathrm{rad/s}.$$

它仍远小于轨道角频率 $\omega_{orb}=\dfrac{v}{r}\approx 5.2\times10^{15}\ \mathrm{rad/s}$，这正是玻尔模型结果与精细结构实验偏差的来源，与题面括注呼应。

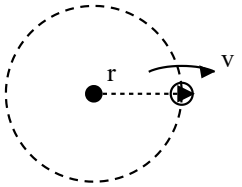


Fig.8 Bohr orbit n=2 (self-drawn)

第（1）问数值由本站独立演算：$r = 4a_0 \approx 2.11 \times 10^{-10}$ m、$v \approx 1.09 \times 10^{6}$ m/s、$B \approx 0.39$ T（$n = 1$ 极限约 12.5 T、$B \propto n^{-5}$ 检验自洽）。第（3）问取托马斯修正因子 $\frac{1}{2}$：净进动为 naive 值的一半，与标准自旋-轨道耦合的系数一致；若原卷第（3）问只要求 naive 变换（不含托马斯修正），则答案仍是第（1）问的 $B$。

逐光知理 · 竞赛答案册 · 易错点速查

# 第39届全国中学生物理竞赛复赛 · 易错点速查

补在原册之后：原册答案与详解未作任何改动

共 6 条 · 绑定本卷题号

只挑本卷最容易失分的动作，按「错法 / 机理 / 正解」三段写，题号与原册一致；公式沿用原册口径。

## 第 1 题 · 第(2)(3)问

**错法** 刹车发电时把制动力功率与电功率分开列方程，或瞬时功率直接用 $\sin\theta$ 而不取周期平均；恒角速度模式下按非整周期积分发电总量。

**机理** 题设刹车失去的动能全部用来发电，制动力功率等于电功率，由此把阻力矩、车速与电功率联立；瞬时电功率含 $\sin^2$ 因子，整圈（整数个周期）平均后 $\langle\sin^2\rangle = 1/2$，发电总量要在一个周期上平均，不能用峰值功率乘时间。恒角速度转 $N$ 圈恰为整数周期，相位起点不影响平均结果。

**正解** 由 $iR = \frac{n^2B^2a^2b^2\omega_1^2}{R}\sin^2\theta_1$ 得加速度；恒角速度时 $W = \frac{\pi N n^2B^2a^2b^2\omega_2^2}{R\omega_2}$，再由 $\frac{1}{2}Mv_0^2 = W$ 回代初速度。

## 第 3 题 · 第(1)(2)问

**错法** 失稳分析时取两柱反向外倾的模态，或列势能时漏掉重物下降对应的重力势能减少项；振动条件写成 $k_1 > mgR$。

**机理** 刚梁约束下两柱顶间距必须不变，反向外倾会改变柱顶间距，运动学不可实现；一阶可实现的模态只有两柱同向侧倾、梁只平动。侧倾时柱顶下降 $R(1-\cos\theta) \approx R\theta^2/2$，重力势能随侧倾减小，是失稳项；弹性储能 $k_1\theta^2$ 是回复项。临界条件由二次项系数为零给出 $2k_1 = mgR$，稳定振动要求 $2k_1 > mgR$，系数 2 来自两根立柱。

**正解** 总势能 $U(\theta) = k_1\theta^2 - \frac{1}{2}GR\theta^2$，临界 $G = 2k_1/R$；简谐振动条件 $2k_1 > mgR$ 且振幅全程 $\theta < \varphi_0$ 保持线性，角频率 $\omega = \sqrt{(2k_1 - mgR)/(mR^2)}$。

## 第 4 题 · 第(1)(2)问

**错法** 接触点水平距离直接取等边三角形外接圆半径；列摩擦方程时把三球两两之间的摩擦力也算进去；稳定后仍保留接触摩擦。

**机理** A、B、C 球心构成边长 $2R$ 的等边三角形，外接圆半径 $\rho = 2R/\sqrt{3}$，接触点在连心线中点，到中心轴距离 $r_c = \rho/2 = R/\sqrt{3}$。题设 A、B、C 之间无摩擦，只受来自 D 的周向摩擦力；三重对称使三球运动同型，只需对 D 和一颗下球列方程。达到无滑条件后相对滑动速度为零，摩擦随之消失，体系维持公转角速度与自旋不变。

**正解** 正压力 $N = mg/\sqrt{6}$，摩擦 $f = \mu N = \mu mg/\sqrt{6}$；相对滑动速度 $s = \omega_D r_c - (v + \omega_A r_c)$，令 $s = 0$ 回代得稳定角速度 $\omega_D' = 11\Omega_0/26$、$\omega_A' = 5\Omega_0/26$。

## 第 5 题 · 第(1)(2)问

**错法** 差分电容直接用 $C = \varepsilon a/d$ 写差值，保留间距变化的高阶项；摆式偏转电容不做微元积分，按平均间距整板估算。

**机理** 平行移动差分电容 $C_1 = \varepsilon a/(d_0 - \Delta d)$、$C_2 = \varepsilon a/(d_0 + \Delta d)$，作差后一阶线性项为 $\Delta C \approx 2\varepsilon a\Delta d/d_0^2$，高阶小量在小位移下略去；摆式偏转时间距沿板长方向线性变化 $d(y) = d_0 - y\varphi$，整板平均间距无法反映斜切结构，必须沿板长取微元 $dy$ 积分，再与另一极板作差。

**正解** 偏转小角 $\varphi \ll a/d$ 下积分得 $C_1 \approx \varepsilon a/d_0 + \varepsilon a^2\varphi/(2d_0^2)$、$C_2 \approx \varepsilon a/d_0 - \varepsilon a^2\varphi/(2d_0^2)$，差分 $\Delta C = \varepsilon a^2\varphi/d_0^3$。

## 第 6 题 · 第(2)问

**错法**　把稳定性判据写成桶下移时浮力减小才能回复；或认为 n 为偶数时在平衡点两侧都能回复。

**机理**　桶受扰下移（$h$ 增大）时，只有浮力增大把桶推回，才是回复效应，故要求平衡深度处 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}h>0$（排开体积随深度增大）。气体体积由 $V=V_0T_0/T(h)$ 决定，n 为奇数时 $T(h)$ 关于 $h=H/2$ 单调，平衡点两侧浮力一缺一余都有回复效果；n 为偶数时 $T(h)$ 在 $H/2$ 取极值，$V$ 在两侧同号，其中一侧浮力过剩把桶推离，失稳。

**正解**　稳定悬浮要求 n 为奇数且 $a>0$；$n=3$、$a>0$ 时由 $V(h_e)=V_0$、$T(h_e)=T_0$ 解得平衡深度 $h_e=H/2$。

## 第 8 题 · 第(3)问

**错法**　计入托马斯修正后，把修正进动与 naive 进动同向相加；或直接沿用第(2)问的 naive 磁场与进动角速度。

**机理**　电子静止系随轨道加速旋转，相继洛伦兹变换产生的托马斯进动角速度方向与 naive 自旋进动相反；净进动是两者之差，不是之和。naive 值对应电子静止系非惯性性未修正的结果，标准自旋-轨道耦合在 BMT 方程下相对 naive 值有 1/2 因子，修正后等效磁场 $B'=B/2$，进动角速度随之减半。

**正解**　托马斯角速度大小为 naive 的 $\frac{1}{2}(v/c)^2$ 阶、方向相反；净进动 $\omega'=\omega_p-\omega_T=\frac{1}{2}\omega_p$，对应 $B'\approx 0.195\,\mathrm{T}$、$\omega_p'\approx 3.4\times10^{10}\,\mathrm{rad/s}$，仍远小于轨道角频率。