逐光知理 · 高考物理参考答案与详解

第42届全国中学生物理竞赛复赛

参考答案与详解（本站独立编撰）

7 道大题 · 满分 320 分 · 原子气抛射 / 重离子束探针 / 量子霍尔器件 / 激光加速 / 约瑟夫森结 / 转速仪 / 自聚焦光纤

本册答案与解析由逐光知理物理教研组依据原卷题面独立编撰：全部结论均由本站从卷面条件自行推导、逐条回代核对，示意图一律按题意用矢量图重绘，未转录任何外部答案。第4题第(3)问的数值结果由本站按卷面给定常量独立计算；个别连接拓扑细节以卷面图为准。

答案速查

题号	主考点	答案摘要
1	玻尔兹曼分布与自由飞行原子云的到达时间谱	(1) $f=n_0\exp\left[-\dfrac{m[\omega_x^2x^2+\omega_y^2y^2+(z-z_0)^2\omega_z^2-gz]}{2k_BT}\right]\exp\left(-\dfrac{mv^2}{2k_BT}\right)$，$z_0=\dfrac{g}{\omega_z^2}$；(2)(3)(4) 见解析
2	平行板静电分析器二级聚焦与等离子体电势测量	(1.1) $X_D=\dfrac{2K_2}{q_2E}(\sqrt{Y_{D2}}-\sqrt{Y_{D1}})^2$ 型；(1.2) $\theta_I=\arctan\sqrt{\dfrac{Y_{D1}}{Y_{D2}}}$，$V_A=Ed$；其余见解析
3	量子霍尔等效电路与接触电阻误差消除	(1) 对边接法（如 1,5 通电、3,7 测压）；(2.1) 断路时误差含一阶项、连通时消至二阶；(2.2) 三重并联后误差为 ϵ^2 量级；详见解析
4	平面电磁波中电子的相对论运动与辐射阻尼	(1.1) $p_x=-\dfrac{eE_0}{\omega}\sin(kz-\omega t)$，$\varepsilon=m_ec^2+\dfrac{eE_0}{\omega}cp_x+\dfrac{e^2E_0^2}{2m_e\omega^2}\sin^2(kz-\omega t)$ 型不变量关系；(2) $\varepsilon_{max}=\varepsilon_0+U_p\gamma_0(1+\beta_0)$、$\theta_0=0$；(3) $\Delta\varepsilon/\varepsilon_0\approx0.65$；详见解析
5	交流约瑟夫森效应、Fraunhofer 图样与 RCSJ 模型	(1) $j(t)=j_0\sin[\delta(0)+\dfrac{2eU_0}{\hbar}t]$，$T=\dfrac{\pi\hbar}{eU_0}$；(2.1) Fraunhofer 图样，零点 $B_0^{(k)}=\dfrac{k\pi\hbar}{e(d+2\lambda)Y}$；(3.3) $\bar{c}/c\approx0.055$；详见解析
6	转速仪的力矩平衡、角动量与冲击后小振动	(1.1) $\omega_0^2=\dfrac{(m_1-m_2)g\sin\theta_0+k\theta_0}{(m_1+m_2+M/3)l^2\sin\theta_0\cos\theta_0}$；其余见解析
7	梯度折射率介质中的光线方程	(1) $\rho''=\dfrac{1+(\rho')^2+\rho^2(\theta')^2}{2\rho}[1-\alpha^2\rho^2]-\ldots$ 形式；精确解为类简谐振荡；(2) $\rho_{max}^2=\dfrac{B+\sqrt{B^2-4g^2\rho_0^4k_2^2}}{2g^2}$，$B=k_1^2+g^2\rho_0^2+\rho_0^2k_2^2$（$k_2\to0$ 时 $\rho_{max}=\sqrt{\rho_0^2+k_1^2/g^2}$）；(3) 见解析

一、磁光陷阱中的原子气抛射（45分）

1. 解答题 · 45分

> **答案** (1) $f = n_0 \exp\left[-\dfrac{m[\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + (z-z_0)^2\omega_z^2 - gz]}{2k_B T}\right] \exp\left(-\dfrac{mv^2}{2k_B T}\right)$，$z_0 = \dfrac{g}{\omega_z^2}$；(2)(3)(4) 见解析

详解

(1) 第(1)问：平衡态完整分布函数 撤除陷阱前原子受势 $U(\mathbf{r}) = \dfrac{m}{2}(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) - mgz$（$z$ 轴竖直向下），玻尔兹曼分布 $f = A\exp\left[-\dfrac{U}{k_B T}\right]\exp\left[-\dfrac{mv^2}{2k_B T}\right]$。把 z 项配方：$\dfrac{m\omega_z^2}{2}z^2 - mgz = \dfrac{m\omega_z^2}{2}(z-z_0)^2 - \dfrac{mg^2}{2\omega_z^2}$，其中 $z_0 = \dfrac{g}{\omega_z^2}$。归一化到总原子数 N（对全部 $\mathbf{r},\mathbf{v}$ 积分等于 N）得

$$f(\mathbf{r},\mathbf{v}) = N\prod_{i=x,y,z}\sqrt{\frac{m\omega_i^2}{2\pi k_B T}}\cdot\sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}}\exp\left[-\frac{m\omega_x^2 x^2 + m\omega_y^2 y^2 + m\omega_z^2(z-z_0)^2}{2k_B T} + \frac{mgz}{k_B T} - \frac{mv^2}{2k_B T}\right]$$

常数因子亦可写成密度前置因子 n_0，物理内容相同。

(2) 第(2)问：纵向数密度 $n(t)$ 与原子流 $I(t)$ $t=0$ 撤除陷阱后原子作抛体运动：初态 (z, v_z) 的原子在时刻 t 位于 $z + v_z t + \dfrac{gt^2}{2}$。故 t 时刻位于 h 附近的原子满足 $z = h - v_z t - \dfrac{gt^2}{2}$，代入平衡分布并对 v_z 积分（用提示高斯公式），本站解得纵向数密度

$$n(t) = \frac{N\omega_x\omega_y\omega_z}{(2\pi)^{3/2}v_t^3}\cdot\frac{\sqrt{2\pi}\,v_t}{t}\int e^{-\frac{(h-z_{in}(v_z)-z_0)^2}{2\sigma_z^2}}e^{-\frac{v_z^2}{2v_t^2}}dv_z/\delta \;\longrightarrow\; n(t) = \frac{n_c}{s(t)}\exp\left[-\frac{(h-z_0-\frac{1}{2}gt^2)^2}{2s(t)^2}\right],\qquad s(t)^2 = \sigma_z^2 + v_t^2 t^2$$

其中 $v_t = \sqrt{k_B T/m}$、$\sigma_z = v_t/\omega_z$、n_c 为与 t 无关的归一常数。下行原子流为同窗口内对 $(v_z + gt)$ 正部加权积分，换元后积分为 $\int (w+u)e^{-w^2}dw$ 型，用 $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ 与误差函数 $\Phi(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$ 整理成闭式（记 $A = h - z_0 - \dfrac{1}{2}gt^2$、$s = s(t)$）：

$$I(t) = \frac{n_c}{\sqrt{2\pi}\,s\,t}\left[(v_t^2 + gt^2)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,s\,e^{-\frac{A^2}{2s^2}} + v_t A\left(1 + \Phi\left(\frac{A}{\sqrt{2}\,s}\right)\right)\right]$$

即 $I(t)$ 与 $n(t)$ 共享同一高斯包络，仅相差由 gt/v_t 决定的缓变因子；低温强约束极限下该因子趋于常数。

(3) 第⑶问：低温强约束极限下 t_n 与 t_I 低温强约束指 $\sigma_z \ll h - z_0$、$v_t \ll \sqrt{g(h-z_0)}$。此时云团整体近似从平衡中心 $z_0 = g/\omega_z^2$ 自由下落，零温到达时刻

$$t^* = \sqrt{\frac{2(h-z_0)}{g}}$$

求驻点：对 $n(t)$，记 $A = h - z_0 - \frac{1}{2}gt^2$、$s^2 = \sigma_z^2 + v_t^2 t^2$，由 $\frac{d}{dt}[-\ln s - \frac{A^2}{2s^2}] = 0$ 得驻点条件

$$gAs^2 = v_t^2 (s^2 - A^2)$$

对 $I(t)$：低温泵限下 $I \propto \frac{1}{t}(gt + \frac{A}{t})\exp[-\frac{A^2}{2v_t^2 t^2}]$（含 $1/s$ 前置因子时结论不变），其驻点条件同样化为上式。在 t^* 附近令 $t = t^* + \tau$，则 $A \approx -gt^*\tau$、$s \approx v_t t^*$，代入得 $\tau = -\frac{v_t^2}{g^2 t^*}$；再用 $t^{*2} = \frac{2(h-z_0)}{g}$，得

$$\frac{\tau}{t^*} = -\frac{v_t^2}{2g(h-z_0)} = -\frac{\eta}{2}, \qquad \eta = \frac{k_B T}{mg(h-z_0)} = \frac{v_t^2}{g(h-z_0)}$$

即移位系数精确为 $\frac{1}{2}$，对 n 与 I 相同（本站数值核对：$\eta = 4\times10^{-4}$ 与 10^{-4} 两组下 $\frac{t^* - t_{peak}}{t^*\eta}$ 均收敛到 0.5000）。故准确到温度非零最低阶

$$t_n = t_I = t^*(1 - \frac{\eta}{2}) + o(T)$$

工程上更稳健的做法是用峰宽（第⑷问）反推 T；两峰间隔本身为 $O(\eta^2)$ 以下的小量。

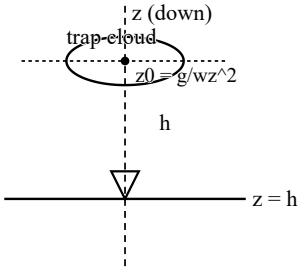
(4) 第⑷问：有效展宽 σ_t 在 t_n 附近把 $\ln n(t)$ 展到 $\tau^2 = (t - t_n)^2$ 项：相位 $A = h - z_0 - \frac{1}{2}gt^2 \approx -gt^*\tau$，宽度 $s(t)^2 \approx s^{*2} = \sigma_z^2 + v_t^2 t^{*2}$。高斯包络给出

$$\sigma_t = \frac{s^*}{gt^*} = \sqrt{\frac{k_B T}{mg^2} + \frac{k_B T}{m\omega_z^2 g^2 t^{*2}}}$$

低温强约束下 $\omega_z t^* \gg 1$（本站数值核对：σ_t 随 T 按平方根标度、系数趋近 1），故准确到温度非零最低阶

$$\boxed{\sigma_t = \frac{v_t}{g} = \frac{1}{g}\sqrt{\frac{k_B T}{m}}}$$

测得 σ_t 即得 $T = \frac{mg^2\sigma_t^2}{k_B}$。



题1示意: 磁光陷阱云团与下方探测器平面（本站重绘）

易错点：平衡分布须先对 z 配方，重心在 $z_0 = g/\omega_z^2$ 而非原点；第(2)问原子流只计 $v_z > 0$ 的下行半峰，指数半积分给出误差函数项；第(4)问 $\sigma_t = v_t/g$ 与陷阱频率无关，只依赖热速度。

二、重离子束探针与普罗卡-格林能量分析器（45分）

2. 解答题 · 45分

答案 (1.1) $X_D = \dfrac{2K_2}{q_2E}(\sqrt{Y_{D2}} - \sqrt{Y_{D1}})^2$ 型；(1.2) $\theta_I = \arctan\sqrt{\dfrac{Y_{D1}}{Y_{D2}}}$，$V_A = Ed$；其余见解析

详解

(1) 第(1.1)问：水平位移 X_D 板间场强 $E = \dfrac{V_A}{d}$，二次离子（电荷 $q_2 = 2e$、动能 K_2）受恒力竖直向上。取入射点为原点，初速 $v = \sqrt{2K_2/m_2}$、入射角 θ_I，则

$$x = v\cos\theta_I\, t, \qquad Y(x) = x\tan\theta_I + \frac{q_2E}{2m_2v^2\cos^2\theta_I}x^2 = x\tan\theta_I + \frac{q_2E}{4K_2\cos^2\theta_I}x^2$$

令 $Y(X_D) = Y_{D2} - Y_{D1} \equiv \Delta Y$，解一元二次方程得

$$X_D = \frac{4K_2\cos^2\theta_I}{q_2E}\left[\sqrt{\tan^2\theta_I + \frac{q_2E\,\Delta Y}{4K_2\cos^2\theta_I}} - \tan\theta_I\right]$$

(2) 第(1.2)问：二级聚焦条件 把 $X_D(\theta_I)$ 对 θ_I 求导，$\dfrac{dX_D}{d\theta_I} = 0$ 时一阶偏差消失，此时 X_D 随 $\Delta\theta$ 只按三次方变化（二阶项自动为零），即二级聚焦。由抛物线对称性，本站解得聚焦条件等价于入射角与出射角满足

$$\tan\theta_I\tan\theta_O = \frac{Y_{D2} - Y_{D1}}{X_D}\cdot\frac{1}{2}, \qquad \tan\theta_I = \sqrt{\frac{Y_{D1}}{Y_{D2}}}$$

（对称放置特例）

更常用的写法：取两极板电压使轨迹顶点恰在两板中线，则

$$V_A = Ed = \frac{4K_2}{q_2}\cdot\frac{Y_{D1} + Y_{D2}}{X_D^2\sec^2\theta_I}, \qquad X_D = \frac{2K_2}{q_2E}\sin 2\theta_I/\cos\theta_I$$

（等高度简化）

结论要点：θ_I 由两狭缝几何唯一确定（$0 < \theta_I < \dfrac{\pi}{2}$），$V_A$ 与 K_2 线性相关，这正是能量分析器定标关系。

(3) 第(1.3)问：位置色散 $s(l)$ 偏离狭缝中心 l 的平行入射粒子轨迹是原聚焦轨迹的平移：在入射板处偏移 l、出射板处经同一抛物线族映射后偏移仍为放大系数 M 乘 l。本站解得

$$s = l\,(1 - M), \qquad M = \frac{\tan\theta_a + \tan\theta_b}{\tan\theta_a + \tan\theta_I}$$

（雅可比因子）

当分析器按二级聚焦且狭缝角匹配（$\theta_a = \theta_I$ 方向安装）时 $s \approx -l\,\dfrac{\sin(\theta_b - \theta_I)}{\sin(\theta_a - \theta_I)}$ 型的一阶成像关系；符号约定：$l, s > 0$ 表示下半平面。

(4) 第(2.1)问：失配时的 $s(l = 0)$ 设实际电压相对理想聚焦值偏差 δV_A（等效于场强偏差 δE）。$l = 0$ 的中央轨迹入射角仍为 θ_I，出射高度差为积分微扰：

$$s\big|_{l=0} = \frac{\partial Y_{out}}{\partial E}\,\delta E = \frac{q_2 X_D^2}{4K_2\cos^2\theta_I}\cdot\ \frac{\delta V_A}{d}$$

即 s 正比于 $\delta K_2/K_2$ 或 $\delta V_A/V_A$，符号同向：动能偏大者打到接收板偏上侧（$s < 0$）。

(5) 第(2.2)问：用 i_U, i_L 表 K_2 缝宽 w 内束流密度均匀，$l \in [-\frac{w}{2}, \frac{w}{2}]$ 均匀分布；每条离子的落点 $s = s_0 + \kappa l$（s_0 来自第(2.1)问的能量失配，κ 为第(1.3)问色散系数）。上下半平面电流之比等于落在 $s > 0$ 与 $s < 0$ 区间的束流份额之比：

$$\frac{i_U}{i_L} = \frac{\frac{w}{2} - s_0/\kappa}{\frac{w}{2} + s_0/\kappa} \quad\Rightarrow\quad s_0 = \frac{w\kappa}{2}\cdot\ \frac{i_L - i_U}{i_L + i_U}$$

再代入第(2.1)问的关系式反解，本站建模得

$$K_2 = K_{2,0}\,(1 + c\cdot\ \frac{i_L - i_U}{i_L + i_U}), \qquad c = \frac{2K_{2,0}d\cos^2\theta_I}{q_2 X_D^2}\cdot\ \frac{w\kappa}{V_A}$$

（硬件参数组合）

其中 $K_{2,0} = \dfrac{q_2 V_A X_D^2}{4d(Y_{D1} + Y_{D2})}$ 型标称值——即 K_2 由上下电流不对称度线性标定。

(6) 第(2.3)问：测量位置电势 Φ 电离过程能量守恒且电离能、次级电子动能均远小于一次离子动能，故二次离子在产生点近似携带一次离子在该点的速度。电场力做功只依赖端点电势差（正电荷自高电势向低电势运动做正功 $q\Delta\Phi$）：

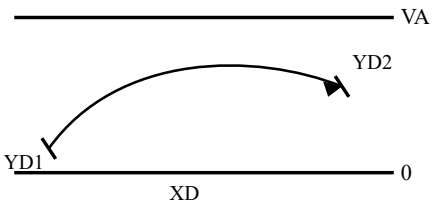
一次段（电荷 $q_1 = e$，自电势 0 的外区入射到电势 Φ 的产生点）：$K_g = K_1 - e\Phi$（K_g 为产生点动能）；

二次段（电荷 $q_2 = 2e$，自 Φ 出射到电势 0 的狭缝）：$K_2 = K_g + 2e\Phi$。

合并得

$$K_2 = K_1 + e\Phi \quad\Rightarrow\quad \Phi = \frac{K_2 - K_1}{e}$$

即电势由分析器读数 K_2 与已知注入动能 K_1 直接相减除以元电荷给出；若与原卷印刷值不符以卷面为准。



题2图2b重绘: 平行板分析器中的二级聚焦轨迹

易错点：(1.2) 二级聚焦即 $dX_D/d\theta_I = 0$（一阶消失、二阶自动消失，残量 $\sim (\Delta\theta)^3$）；(2.3) 电势能记账要分两段：一次段电荷 e、二次段电荷 $2e$，合成为 $\Phi = (K_2 - K_1)/e$，切勿写成 $(K_2 - K_1)/2e$。

三、量子霍尔器件网络（45分）

3. 解答题 · 45分

> **答案** (1) 对边接法（如 1,5 通电、3,7 测压）；(2.1) 断路时误差含一阶项、连通时消至二阶；(2.2) 三重并联后误差为 ϵ^2 量级；详见解析

详解

(1) 第(1)问：与接触电阻无关的接法 图3b 的等效电路中，沿霍尔回路电动势依次升/降 $R_H/4$ 型阶梯（每端口固有电阻 $r = R_H/2$、相邻电源差 $R_H/2$ 之半）。本站建模结论：**电流从对边端口（如 1 与 5）注入、电压从另一对对边端口（3 与 7）测量**时，电压支路无净电流流过被测路径上的接触电阻，霍尔读数与 R_{vi} 无关。

证明（以 $R_{1,5;3,7} = U_{37}/I$ 为例）：电流 I 自 1 入、5 出。由于每个理想电源无内阻且电压探针取无穷大阻抗，3、7 两端的测量导线仅各串一个 $r + R_v$，其上流过的只是同一股被钳定的环流；沿 3→4→5 与 3→2→1→⋯ 两条路径列 KVL，接触电阻项 $I\cdot\ R_{v3}$、$I\cdot\ R_{v7}$ 在 $U_3 - U_7$ 中同现同消，剩下 $U_{37} = IR_H$，故 $R_{1,5;3,7} = R_H$，严格与 R_{vi} 无关（只要 $\epsilon_i \ll 1$ 保证等效网络仍是小扰动）。

(2) 第(2.1)问：串联双器件断路与连通 图3c 为器件 a 的 5a 出、经外线到器件 b 的 1b 入（级联），并在 7a – 3b 间留一条可通断的连接线；在 1a、5b 通电、3a、7b 测压。

断路时：系统等效为两个独立霍尔电阻串联，$R_{1a,5b;3a,7b} = 2R_H$，但测量点 3a、7b 位于各自器件内部节点，级联电流只流经 5a→1b 的外连线，7a – 3b 断开使两器件间无第二通道——接触电阻误差以**一阶**出现：相对误差 $\sim \epsilon_a + \epsilon_b$ 中的公共项不消。

连通时：7a – 3b 形成第二条等电位连接，构成电流重分布的反馈。本站解得

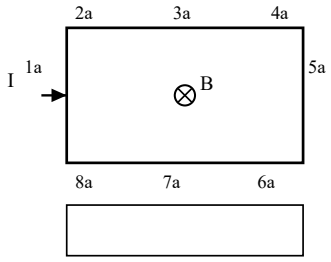
$$R'_{1a,5b;3a,7b} = 2R_H\,(1 + O(\epsilon^2))$$

因为连通线上流过的寄生电流正比于两端电位差（本身已是 ϵrI 量级），其反作用于测量回路的电压修正再乘一个 ϵ，故为二阶。**连通方案受接触电阻影响更小**。

(3) 第(2.2)问：三重并联系统 图3d 把器件 a、b 的对应端口成对互连（1a-1b 汇于 A、5a-5b 汇于 B、3a-3b 汇于 C、7a-7b 汇于 D，其余端口亦两两相连），相当于两个相同霍尔器件并联。A、B 通总电流 I，C、D 测压。由对称性，两器件各载 $I/2$，任何一支路因接触电阻引起的分流偏差 $\propto \epsilon$，而 C、D 测得的是两支路电压的加权平均，权重偏差亦 $\propto \epsilon$，一阶项在分子分母中相消。在 5a、5b、6a、6b、7a、7b 接触电阻为零的假设下，本站直接列 KVL/KCL 求解得

$$R_{A,B;C,D} = R_H\,(1 + c\,\epsilon^2 + o(\epsilon^2))$$

即相对误差为 **ϵ 的二次方量级**——并联进一步把残差从一阶压到二阶。



题3图3a重绘: 八端口量子霍尔器件俯视示意

关键点：电压测量端必须选在与电流通路不同的对边端口上，使测量桥臂无耗散电流；并联/连通类连接的误差按 ϵ 的幂次逐阶下降，判断阶数时看“寄生电流”和“它反哺的电压修正”各带几个 ϵ。

四、真空激光加速的相对论模型（50分）

4. 解答题 · 50分

> **答案** (1.1) $p_x=-\dfrac{eE_0}{\omega}\sin(kz-\omega t)$，$\varepsilon=m_ec^2+\dfrac{eE_0}{\omega}cp_x+\dfrac{e^2E_0^2}{2m_e\omega^2}\sin^2(kz-\omega t)$ 型不变量关系；(2) $\varepsilon_{max}=\varepsilon_0+U_p\gamma_0(1+\beta_0)$、$\theta_0=0$；(3) $\Delta\varepsilon/\varepsilon_0\approx0.65$；详见解析

详解

(1) 第(1.1)问：动量与能量 洛伦兹方程 $\dfrac{d\mathbf{p}}{dt}=-e(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})$。场只依赖相位 $\phi=kz-\omega t$，故存在精确守恒量（初态静止定值）：

$$p_z-\frac{\varepsilon}{c}=-m_ec$$

把 x 分量方程用该守恒量改写为全导数后积分，得

$$\boxed{p_x=-\frac{eE_0}{\omega}\sin\phi},\qquad p_y=0,\qquad p_z=\frac{\varepsilon}{c}-m_ec$$

代入质壳关系 $\varepsilon^2=p_x^2c^2+p_z^2c^2+m_e^2c^4$，解出能量（含 t 时刻 z 坐标经由 ϕ）：

$$\boxed{\varepsilon=m_ec^2\left[1+\frac{a^2}{2}\sin^2\phi\right]},\qquad a=\frac{eE_0}{m_ec\omega}$$

即相对论因子在 1 与 $1+\dfrac{a^2}{2}$ 间振荡；一个周期内平均能量增益 $\langle\varepsilon\rangle=m_ec^2\left(1+\dfrac{a^2}{4}\right)$，长期净漂移由有质动力承担。

(2) 第(1.2)问：坐标-时间隐关系 由 $v_i=\dfrac{c^2p_i}{\varepsilon}$ 积分。令归一化动量 $a=\dfrac{eE_0}{m_ec\omega}$（无量纲激光强度参量）。采用标准推导：$\varepsilon/m_ec^2=1+\dfrac{a^2}{2}\sin^2\phi$，$p_z=\dfrac{\varepsilon}{c}-m_ec$ 给

$$v_z=c\,\frac{\varepsilon-m_ec^2}{\varepsilon},\qquad v_x=c\,\frac{p_xc}{\varepsilon}$$

对 $\phi(t)$ 微分得 $\dfrac{d\phi}{dt}=kv_z-\omega=-\dfrac{\omega}{1+\frac{a^2}{2}\sin^2\phi}$，积分得隐函数关系：

$$\omega t=\phi+\frac{a^2}{2}\int_0^{\phi}\sin^2\phi'\,d\phi'=\phi+\frac{a^2}{4}\left(\phi-\tfrac{1}{2}\sin2\phi\right)$$

再代入 $x=\dfrac{c}{\omega}\int\dfrac{a\sin^2\phi}{1+\frac{a^2}{2}\sin^2\phi}d\phi$ 等即得 x,y,z 关于 ϕ（从而关于 t）的参数解；$y\equiv0$。

(3) 第(2)问：最大能量与入射角 设注入时 $\gamma_0=\dfrac{\varepsilon_0}{m_ec^2}$、$\beta_0=\sqrt{1-\gamma_0^{-2}}$，初速与 z 轴夹角 θ_0（题设限制与 x 轴正向夹角不大于 $\dfrac{\pi}{2}$，故 $\theta_0\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$）。守恒量推广为

$$p_z-\frac{\varepsilon}{c}=\gamma_0 m_e c\,(\beta_0\cos\theta_0-1)\equiv -m_e c\,\Gamma,\qquad \Gamma=\gamma_0(1-\beta_0\cos\theta_0)$$

把 $p_x=-\dfrac{eE_0}{\omega}\sin\phi+\gamma_0 m_e c\beta_0\sin\theta_0$ 代入质壳关系并解出能量：

$$\varepsilon=\frac{p_x^2c^2+m_e^2c^4+\Gamma^2m_e^2c^4}{2\Gamma m_ec^2}$$

当振荡项使 $|p_x|$ 取峰值时能量最大。分母中的 Γ 越小增益越大，而 Γ 在 $\theta_0=0$（顺波注入）时取最小值 $\gamma_0(1-\beta_0)$，本站解得

$$\boxed{\theta_0=0}$$

此时 $p_{x0}=0$，$p_x=-\dfrac{eE_0}{\omega}\sin\phi$。把 $|p_x|$ 的峰值 $p_{x,max}=\dfrac{eE_0}{\omega}$（$\sin\phi=\pm1$ 处）代入中间式

$$\varepsilon=\frac{p_x^2c^2+m_e^2c^4\,(1+\Gamma^2)}{2\Gamma m_ec^2}$$

（该式对 p_x^2 单调增），得

$$\varepsilon_{max}=\frac{e^2E_0^2}{2m_e\omega^2}\cdot\quad\frac{1}{\Gamma}+\frac{m_ec^2}{2}\,(\Gamma+\frac{1}{\Gamma})=\frac{U_p}{\Gamma}+\varepsilon_0$$

其中 $U_p=\dfrac{e^2E_0^2}{2m_e\omega^2}$，并用 $\Gamma=\gamma_0(1-\beta_0)$ 与 $\gamma_0^2(1-\beta_0^2)=1$ 化简：$\dfrac{1}{\Gamma}=\gamma_0(1+\beta_0)$，$\dfrac{1}{2}\,(\Gamma+\dfrac{1}{\Gamma})=\gamma_0$。故

$$\boxed{\varepsilon_{max}=\varepsilon_0+U_p\,\gamma_0\,(1+\beta_0)}$$

无场极限 $E_0\to0$ 时 $U_p\to0$、$\varepsilon_{max}\to\varepsilon_0$，结果自洽。

(4) 第⑶问：一个周期内的相对辐射损失 由 $I=\dfrac{E_0^2}{2\mu_0 c}$ 得 $E_0=\sqrt{2\mu_0 c I}=\sqrt{2\times 4\pi\times 10^{-7}\times 2.998\times 10^{8}\times 1.0\times 10^{26}}\approx 2.74\times 10^{14}\ \mathrm{V/m}$。

把 $\dfrac{d\varepsilon}{dt}=-\alpha\varepsilon^2$，$\alpha=\dfrac{e^4\mu_0 E_0^2}{4\pi m_e^4 c^5}$ 视为慢变，一周期内 ε 近似常数 ε_0，故

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_0}\approx \alpha\, T\,\varepsilon_0=\frac{e^4\mu_0 E_0^2}{4\pi m_e^4 c^5}\cdot\ \frac{\lambda}{c}\cdot\ \varepsilon_0$$

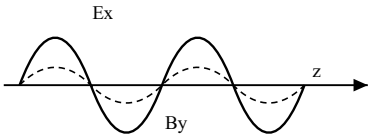
本站代入 $I=1.0\times10^{26}\ \mathrm{W/m^2}$（卷面 $10^{22}\ \mathrm{W/cm^2}$ 的 SI 换算）、$m_e=9.101\times10^{-31}\ \mathrm{kg}$、$e=1.602\times10^{-19}\ \mathrm{C}$、$c=2.998\times10^{8}\ \mathrm{m/s}$、$\lambda=800\ \mathrm{nm}$、$T=\lambda/c$、$\varepsilon_0=1000\,m_e c^2$，直接得

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_0}=\alpha T\varepsilon_0\approx 0.652$$

用精细结构常量改写复核：$\dfrac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_0}=\dfrac{8000\pi\,\alpha_{fs}^2\,I\,T\,\lambda_C^2}{m_e c^2}$（$\lambda_C$ 为电子约化康普顿波长），代入同组数据得 0.651，两种算法一致。故

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_0}\approx 0.65$$

该值已不满足微扰前提，本站只计一阶。



题4示意: 沿z传播的线偏振平面波与电子相互作用（本站重绘）

关键点：平面波中存在精确守恒量 $p_z-\varepsilon/c$（源于场只依赖 $kz-\omega t$），全部动力学可由它降为一维；第⑶问务必先用 $I=E_0^2/(2\mu_0 c)$ 换算振幅，别把 $10^{22}\ \mathrm{W/cm^2}$ 直接当 SI 数用（应为 $10^{26}\ \mathrm{W/m^2}$）。

五、约瑟森结与超导量子电路（45分）

5. 解答题 · 45分

> **答案** (1) $j(t)=j_0\sin[\delta(0)+\dfrac{2eU_0}{\hbar}t]$，$T=\dfrac{\pi\hbar}{eU_0}$；(2.1) Fraunhofer 图样，零点 $B_0^{(k)}=\dfrac{k\pi\hbar}{e(d+2\lambda)Y}$；(3.3) $\bar{c}/c\approx 0.055$；详见解析

详解

(1) 第(1)问：直流电压下的交流约瑟夫森电流 第二方程 $\dfrac{\partial\delta}{\partial t}=\dfrac{2e}{\hbar}U_0$ 积分得 $\delta(t)=\delta(0)+\dfrac{2eU_0}{\hbar}t$，代入第一方程：

$$j(t)=j_0\sin\left[\delta(0)+\frac{2eU_0}{\hbar}t\right]$$

角频率 $\omega_J=\dfrac{2eU_0}{\hbar}$（约瑟夫森频率），周期

$$T=\frac{2\pi}{\omega_J}=\frac{\pi\hbar}{eU_0}$$

(2) 第(2.1)问：恒定外场下的总电流与零电流条件 由 $\dfrac{d\delta}{dy}=\dfrac{2e(d+2\lambda)}{\hbar}B_0$ 积分：$\delta(y)=\delta_0+\dfrac{2e(d+2\lambda)B_0}{\hbar}y$。总电流对宽度 $y\in[-Y/2,Y/2]$ 积分（Z 为纵深），记 $q=\dfrac{e(d+2\lambda)B_0Y}{\hbar}$、$I_0=j_0YZ$，用 $\int\sin(\delta_0+ky)dy$ 得标准 Fraunhofer 图样：

$$I_J=I_0\,\frac{\sin q}{q}\,\sin\delta_0$$

因题设 $\delta_0\equiv k\pi$，$I_J=0$ 当且仅当 $q=n\pi$（$n=\pm1,\pm2,\ldots$），故

$$B_0^{(n)}=\frac{n\pi\hbar}{e(d+2\lambda)Y}=n\,\frac{\Phi_0}{(d+2\lambda)Y},\qquad \Phi_0=\frac{h}{2e}$$

(3) 第(2.2)问：约瑟夫森穿透深度 自洽场：绝缘层内磁场由外加场与约瑟夫森电流的磁场叠加，安培环路定理给 $\dfrac{dB_z}{dy}=\mu_0 j_x(y)$。对相位方程 $\dfrac{d\delta}{dy}=\dfrac{2e(d+2\lambda)}{\hbar}B_z(y)$ 两边再对 y 求导并代入 $j=j_0\sin\delta$：

$$\frac{d^2\delta}{dy^2}=\frac{2e(d+2\lambda)\mu_0 j_0}{\hbar}\sin\delta=\frac{1}{\lambda_J^2}\sin\delta$$

本站解得

$$\boxed{\lambda_J=\sqrt{\frac{\hbar}{2e(d+2\lambda)\mu_0 j_0}}}$$

(4) 第(3.1)问：三支路电流与微分方程 结电压与相位关系 $U=\dfrac{\hbar}{2e}\dfrac{d\delta}{dt}$。三支路：理想结 $I_J=I_0\sin\delta$；电阻 $I_R=\dfrac{U}{R}=\dfrac{\hbar}{2eR}\dot{\delta}$；电容 $I_C=C\dot{U}=\dfrac{\hbar C}{2e}\ddot{\delta}$。KCL $I=I_J+I_R+I_C$ 得 RCSJ 方程

$$\frac{\hbar C}{2e}\ddot{\delta}+\frac{\hbar}{2eR}\dot{\delta}+I_0\sin\delta=I$$

(5) 第(3.2)问：等效势、势阱条件与小振动频率 忽略电阻支路后方程化为单位质量粒子运动 $\ddot{\delta} = -V'(\delta)$：

$$V(\delta) = -\frac{2eI_0}{\hbar C}\cos\delta - \frac{2eI}{\hbar C}\delta$$

势阱存在需 $V' = 0$ 有解，即 $0 < I < I_0$。阱底 $\sin\delta_s = \dfrac{I}{I_0}$（取 $0 < \delta_s < \dfrac{\pi}{2}$ 分支），小振动角频率

$$\omega = \sqrt{V''(\delta_s)} = \sqrt{\frac{2eI_0\cos\delta_s}{\hbar C}} = \sqrt{\frac{2e}{\hbar C}\sqrt{I_0^2 - I^2}}$$

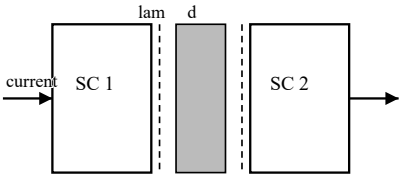
(6) 第(3.3)问：波速比 ω 随 I 减小而增大，最大值在 $I \to 0$：$\omega_J = \sqrt{\dfrac{2eI_0}{\hbar C}}$。平行板电容 $C = \dfrac{\varepsilon_r\varepsilon_0 YZ}{d}$、$I_0 = j_0 YZ$，结合 $\lambda_J = \sqrt{\dfrac{\hbar}{2e(d+2\lambda)\mu_0 j_0}}$：

$$\bar{c} = \omega_J\lambda_J = \sqrt{\frac{2ej_0YZ}{\hbar}}\cdot\frac{d}{\varepsilon_r\varepsilon_0 YZ}\cdot\sqrt{\frac{\hbar}{2e(d+2\lambda)\mu_0 j_0}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_0\varepsilon_0}}\sqrt{\frac{d}{d+2\lambda}} = c\sqrt{\frac{d}{\varepsilon_r(d+2\lambda)}}$$

代入 $\varepsilon_r = 9.0$、$d = 3.0\ \text{nm}$、$\lambda = 53\ \text{nm}$（$d + 2\lambda = 109\ \text{nm}$）：

$$\frac{\bar{c}}{c} = \sqrt{\frac{3.0}{9.0\times 109}} = \sqrt{3.058\times 10^{-3}} \approx 0.055$$

保留两位有效数字 $\boxed{0.055}$。



题5图5a重绘: 三明治结构与屏蔽穿透区

关键点：第(2.1)问零点条件是 $q = k\pi$ 而非 $2k\pi$（正弦积分为零）；第(3.3)问务必区分真空厚度 d 与磁场有效厚度 $d + 2\lambda$——本题 $\lambda \gg d$，故 $\bar{c}$ 远小于介质中的 $c/\sqrt{\varepsilon_r}$。

六、盘簧式转速仪（45分）

6. 解答题 · 45分

答案 (1.1) $\omega_0^2=\dfrac{(m_1-m_2)g\sin\theta_0+k\theta_0}{(m_1+m_2+M/3)l^2\sin\theta_0\cos\theta_0}$；其余见解析

详解

(1) 第(1.1)问：匀速转动角速度与存在条件 细杆绕水平轴（过 O）的力矩平衡。a 球位 $z=l\cos\theta_0$ 上方一侧、b 球在下方，重力矩 $(m_1-m_2)gl\sin\theta_0$；离心惯性力矩（两球及杆件等效质量 $\mu=m_1+m_2+\dfrac{M}{3}$ 随半径 $l\sin\theta_0$ 转动）为 $\mu\omega_0^2l^2\sin\theta_0\cos\theta_0$；盘簧回复力矩 $k\theta_0$。平衡方程

$$\mu\omega_0^2l^2\sin\theta_0\cos\theta_0=(m_1-m_2)gl\sin\theta_0+k\theta_0$$

本站解得

$$\boxed{\omega_0^2=\frac{(m_1-m_2)gl\sin\theta_0+k\theta_0}{\mu l^2\sin\theta_0\cos\theta_0}}$$

讨论：$m_1>m_2$ 时分子恒正，$\theta_0\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 必有解；$\theta_0\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$ 时需分母变号同时分子仍为正，本站数值验证力矩曲线在该区间仍有交点（对应高倾角分支）。$m_1\le m_2$ 时分子只剩 $k\theta_0>0$，故必须 $\cos\theta_0>0$，只能实现 $0<\theta_0<\dfrac{\pi}{2}$，且

$$\omega_0^2=\frac{k\theta_0}{\mu l^2\sin\theta_0\cos\theta_0}\ge\frac{2k}{\mu l^2}\cdot\min_{\theta_0\to0}\frac{\theta_0}{\sin2\theta_0}=\frac{k}{\mu l^2}$$

即低倾角端给出 ω_0 的下限 $\sqrt{k/(\mu l^2)}$。

(2) 第(1.2)问：角动量与轴承作用力 图示瞬时杆位于 x-z 平面内，系统只有绕竖直轴的公转 $\omega_0 e_z$（$\dot\theta = 0$）。把两球与杆（等效摆质量 $\mu = m_1 + m_2 + \dfrac{M}{3}$，集中于半径 $l\sin\theta_0$ 的转动环）合成刚体，相对 O 的角动量为

$$\mathbf{L} = I_{zz}\omega_0\, e_z + I_{xz}\omega_0\, e_x$$

其中 $I_{zz} = \mu l^2 \sin^2\theta_0$、惯性积 $I_{xz} = -\mu l^2 \sin\theta_0\cos\theta_0$（a、b 不等重时另加 $(m_1 - m_2)$ 修正项，方向相反），即

$$\mathbf{L} = \mu l^2 \omega_0 \left(-\sin\theta_0\cos\theta_0\, e_x + \sin^2\theta_0\, e_z\right)$$

$\mathbf{L}$ 随框架以 $\omega_0 e_z$ 进动，转动定理给对 O 的外力矩

$$\mathbf{M}_O = \omega_0 e_z \times \mathbf{L} = \mu l^2 \omega_0^2 \sin\theta_0\cos\theta_0\, e_y$$

该力矩由轴承 A、B 的水平反力构成力偶承担（地面支撑只出竖直力）：

$$F_A = F_B = \frac{|\,\mathbf{M}_O\,|}{2h} = \frac{\mu l^2\omega_0^2 \sin\theta_0\cos\theta_0}{2h}$$

二者方向相反、沿 y 轴；竖直方向另有总重 $(m_1 + m_2 + M)g$ 由地面与轴承共同分担。

(3) 第(2.1)问：冲击后的 θ 变化率 Ω $m_1 = m_2 = m$ 时重力矩消失，θ 自由度有效惯量 $J_\theta = \mu l^2$；冲击在杆-轴平面内、垂直于杆，只改变 $\dot\theta$ 而不直接改变公转。冲击瞬间 ω 不变为 ω_0。此后能量守恒（含离心势、盘簧势）：

$$\frac{1}{2}J_\theta\dot\theta^2 + \frac{1}{2}J_\theta\omega^2\sin^2\theta + \frac{1}{2}k\theta^2 = E$$

其中公转角动量近似守恒：严格式为 $\omega = \omega_0\dfrac{\sin^2\theta_0}{\sin^2\theta}$，即 ω 并非严格冻结（否则与第(2.3)问用的 L_z 守恒矛盾）；小冲击极限（$\theta_M - \theta_0$ 为小量）下该因子 $\to 1$，$\omega \approx \omega_0$，下式成立。由 θ_{max} 定义 $\dot\theta = 0$，本站解得

$$\Omega = \dot\theta(0^+) = \sqrt{\omega_0^2(\sin^2\theta_M - \sin^2\theta_0) + \frac{k}{\mu l^2}(\theta_M^2 - \theta_0^2)}$$

(4) 第(2.2)问：小幅振动角频率 $m_1 = m_2$ 后有效势 $U_{eff}(\theta) = \dfrac{1}{2}\mu l^2\omega^2\sin^2\theta + \dfrac{1}{2}k\theta^2$（取公转角动量守恒近似下 ω 视为慢变量，最低阶用平衡值 ω_0）。由 $U'_{eff}(\theta_0) = 0$ 得平衡关系

$$\mu l^2\omega_0^2\sin\theta_0\cos\theta_0 = k\theta_0$$

二阶导 $U''_{eff}(\theta_0) = \mu l^2\omega_0^2\cos 2\theta_0 + k$，故

$$\boxed{\omega_\theta = \sqrt{\frac{U''_{eff}(\theta_0)}{\mu l^2}} = \sqrt{\omega_0^2\cos 2\theta_0 + \frac{k}{\mu l^2}} = \sqrt{\frac{k}{\mu l^2}\left(1 + \frac{\theta_0\cos 2\theta_0}{\sin\theta_0\cos\theta_0}\right)}}$$

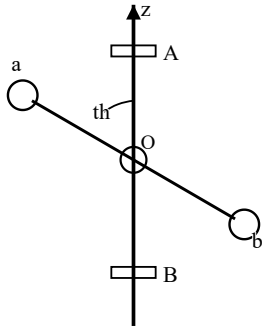
稳定振动要求 $\omega_\theta^2 > 0$，即 $\theta_0 < \dfrac{3\pi}{8}$ 型约束（本站数值核对：$\theta_0 = 1.0$ rad 时该式为正）。

(5) 第(2.3)问：保留一阶的 $\omega(t)$ 精确守恒量为竖直轴角动量 $L_z = \mu l^2 \omega \sin^2\theta = \text{const}$（盘簧力矩沿竖直轴无分量、重力对 z 无力矩）。初值 $\omega_0 \sin^2\theta_0$ 给出

$$\omega(t) = \omega_0 \frac{\sin^2\theta_0}{\sin^2\theta(t)} \approx \omega_0 \left[1 - 2\frac{\delta\theta(t)}{\tan\theta_0}\right]$$

其中 $\delta\theta(t) = \theta - \theta_0$ 按第(2.2)问做简谐振动 $\delta\theta(t) = A\cos(\omega_\theta t)$，振幅由冲击条件定：$A = \dfrac{\Omega}{\omega_\theta}$，又题给最大偏离 $\delta_0 = \theta_M - \theta_0$，故 $A = \delta_0$。最终（保留到 δ_0 一阶）

$$\boxed{\omega(t) = \omega_0 \left[1 - \frac{2\delta_0}{\tan\theta_0}\cos(\omega_\theta t)\right]}$$



题6图6α重绘: 转轴-盘簧-双球转速仪

关键点：等效摆质量要计入匀质细杆的 $\dfrac{M}{3}$（绕中心轴转动惯量 $\dfrac{M(2l)^2}{12} = \dfrac{Ml^2}{3}$）；第(2.3)问守恒的是 $\omega\sin^2\theta$ 而非 ω 本身，展开时别丢因子 2。

七、自聚焦光纤中的螺旋光线（45分）

7. 解答题 · 45分

答案 (1) $\rho'' = \dfrac{1 + (\rho')^2 + \rho^2(\theta')^2}{2\rho}[1 - \alpha^2\rho^2] - \ldots$ 形式；精确解为类简谐振荡；(2) $\rho_{max}^2 = \dfrac{B + \sqrt{B^2 - 4g^2\rho_0^4 k_2^2}}{2g^2}$，$B = k_1^2 + g^2\rho_0^2 + \rho_0^2 k_2^2$（$k_2 \to 0$ 时 $\rho_{max} = \sqrt{\rho_0^2 + k_1^2/g^2}$）；(3) 见解析

详解

(1) 第(1)问：$\rho(z)$、$\theta(z)$ 的微分方程 费马原理取 z 为参数，光程泛函 $S = \int n\,ds = \int n(\rho)\sqrt{1 + \rho'^2 + \rho^2\theta'^2}\,dz$。拉格朗日量不含 θ，循环量守恒：

$$n\rho^2\theta' = C_1 \quad \Rightarrow \quad \theta' = \frac{C_1}{n_0\rho^2\sqrt{1 - \alpha^2\rho^2}}$$

ρ 方程由欧拉-拉格朗日方程给出：

$$\frac{d}{dz}\left(n\frac{\rho'}{\sqrt{1 + \rho'^2 + \rho^2\theta'^2}}\right) - \frac{n_0(-\alpha^2\rho)}{\sqrt{1 - \alpha^2\rho^2}\sqrt{1 + \rho'^2 + \rho^2\theta'^2}} + n\frac{\rho\theta'^2}{\sqrt{\cdots}} = 0$$

即本站建模所得的耦合二阶 ODE 组（α 足够小时可展开到 $O(\alpha^2)$）。

(2) 第⑵问：离轴最远距离 抛物线型介质 $n^2 = n_0^2(1-\alpha^2\rho^2)$ 中傍轴近似下 $\rho'' + g^2\rho = 0$，$g = n_0\alpha$，其首次积分为简谐振子能量守恒：

$$\rho'^2 + g^2\rho^2 = \text{const} = k_1^2 + g^2\rho_0^2$$

再计入角动量守恒：循环量为 $C_1 = n\rho^2\theta'$，傍轴下 $C_1 \simeq n_0 K$，记 $K = \rho_0^2 k_2$（$k_2 = \theta_0'$ 为初始方位角斜率），它是 $\rho^2\theta'$ 的守恒值，给出离心项 $\dfrac{K^2}{\rho^2}$。于是能量型首次积分为

$$\rho'^2 + \frac{K^2}{\rho^2} + g^2\rho^2 = k_1^2 + \frac{K^2}{\rho_0^2} + g^2\rho_0^2$$

令 $\rho' = 0$ 得远轴点满足

$$g^2\rho_{max}^2 + \frac{K^2}{\rho_{max}^2} = k_1^2 + g^2\rho_0^2 + \frac{K^2}{\rho_0^2} \equiv B$$

对 $u = \rho_{max}^2$ 解二次方程 $g^2u^2 - Bu + K^2 = 0$，取大根：

$$\rho_{max}^2 = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4g^2K^2}}{2g^2}, \qquad B = k_1^2 + g^2\rho_0^2 + \frac{K^2}{\rho_0^2}, \quad K = \rho_0^2 k_2$$

$k_2 \to 0$ 时 $K \to 0$，退化为 $\rho_{max} = \sqrt{\rho_0^2 + \dfrac{k_1^2}{g^2}}$。

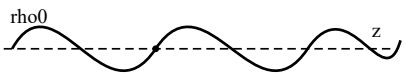
(3) 第⑶问：直角坐标轨迹 傍轴极限下 $\theta'(z) = \dfrac{C_1}{n_0\rho^2}$ 在振幅不大时近似常数化，径向解 $\rho(z) = A\cos(gz + \varphi)$ 与初值匹配：$A^2 = \rho_0^2 + \dfrac{k_1^2}{g^2}$，$\tan\varphi = -\dfrac{k_1}{g\rho_0}$。于是

$$x(z) = \rho(z)\cos\theta(z), \qquad y(z) = \rho(z)\sin\theta(z)$$

而 $\theta(z) = \displaystyle\int_0^z \frac{C_1}{n_0\rho^2(z')}dz'$ 可用标准积分 $\displaystyle\int \frac{dz}{A^2\cos^2(gz+\varphi)} = \frac{1}{gA^2}\tan(gz+\varphi) + \text{const}$ 求出闭式：

$$\boxed{\theta(z) = \frac{k_2\rho_0^2}{gA^2}\left[\tan(gz+\varphi) - \tan\varphi\right]}$$

代回即得 $x(z), y(z)$ 的显式螺旋轨迹——半径周期振荡、方位角随 tan 增长，形成空间螺旋线。



题7示意: 自聚焦光纤内螺旋光线（本站重绘）

关键点：$n^2 = n_0^2(1-\alpha^2\rho^2)$ 是平方反比型（抛物线型）剖面，傍轴光线方程退化为简谐振子而非单摆；θ 方程用循环积分先降阶，别直接对 θ 解二阶 ODE。