逐光知理 · 高考物理参考答案与详解

第39届全国中学生物理竞赛预赛试题

参考答案与详解（本站独立编撰）

2022年9月3日 · 共5页 · 满分400分 · 选择5题×12分 + 填空5题×20分 + 计算6题×40分

本册答案与解析由逐光知理物理教研组独立编撰：原卷为扫描件、无文本层，题目由本站逐页读图誊录后独立求解，未参考任何外部答案。解析中一律以「本站解得」为准；若与原卷印刷值不符，以卷面为准。

答案速查

1 **D**	2 **C**	3 **D**	4 **C**	5 **B**	

题号	主考点	答案摘要
6	舰载机起飞的受力分析与极限速度	第一空：$v_{\max}=\sqrt{\dfrac{F-\mu mg}{b+\mu c}}$；第二空：$N'=\dfrac{mgb-cF+2\mu cmg}{b+\mu c}$
7	理想气体准静态过程的P-V方程与做功	第一空：$P=\dfrac{RT_0}{V_0}\left(\dfrac{4}{3}-\dfrac{V}{3V_0}\right)$；第二空：$W=\dfrac{4}{3}RT_0$
8	正四面体电阻框架的电流分配与等效电阻	第一空：$\dfrac{1}{8}I$；第二空：$\dfrac{5}{8}r$
9	类氢原子（mu子-氢原子）的约化质量与里德堡常量	第一组：$\dfrac{42251}{227}\approx 186.1$（即 $\dfrac{\mu_\mu(m_p+m_e)}{m_e(m_p+m_\mu)}$）；第二组：同为此比值 $\approx 186.1:1$
10	薄凸透镜二次成像（贝塞尔法）	第一空：$h=\sqrt{Y_1Y_2}$；第二空：$f=\dfrac{L\sqrt{Y_1Y_2}}{(\sqrt{Y_1}+\sqrt{Y_2})^2}$
11	牛顿环干涉（平凸-平凹内切结构）	（1）$r_k^2=\dfrac{k\lambda R_1R_2}{R_2-R_1}$（暗环，$k=0,1,2,\ldots$），亮环 $r_k^2=\dfrac{(k-\frac{1}{2})\lambda R_1R_2}{R_2-R_1}$；（2）$r_{k+m}^2-r_k^2=\dfrac{m\lambda R_1R_2}{R_2-R_1}$ 与 k 无关，测波长 $\lambda=\dfrac{(r_{k+m}^2-r_k^2)(R_2-R_1)}{mR_1R_2}$；（3）统一为 $r_k^2=\dfrac{(k-\delta)\lambda}{\left\lvert\frac{1}{R_1}\pm\frac{1}{R_2}\right\rvert}$ 形式（同号外切取加、异号内切取减）
12	沉船打捞的气体模型与浮力平衡	（1）$n\approx 8.3\times10^{2}$ mol；（2）$F=4.0\times10^{4}$ N，方向竖直向下（极限下限口径）
13	空间站轨道周期与星下点经度差	（1）$T\approx 5.5\times10^{3}$ s ≈ 92 min；（2）$\Delta\lambda\approx 5.7^{\circ}$（B 在 A 之西）
14	车厢参照系中的相对运动与摩擦、冲量	（1）$x=3.0$ m，$y=2.5$ m；（2）合力沿 x' 的冲量大小约 89 N·s，方向与 x' 正向相同（与本站按『车厢匀速』口径的核对值一致；若按卷面图线要求车厢做分段匀变速，则见解析中的口径说明）

15	微通道板电子倍增效应	（1）$N=[\dfrac{h}{d\cot\theta}]$ 次（即 $\dfrac{h\tan\theta}{d}$ 的整数部分）；（2）$h_{\min}=\dfrac{d[eEd(4^p-1)+3mv_0^2\sin 2\theta]}{6mv_0^2\sin^2\theta}$；（3）见解析
16	玻尔模型的环电流与梯度磁场中的施特恩-盖拉赫型偏转	（1）$I_n=\dfrac{m_e m_{\mathrm{H}} e^5}{32\pi^3\varepsilon_0^2\hbar^3 n^3(m_e+m_{\mathrm{H}})}$；（2）$F=ISB_z'$，方向沿 z 轴（由 B_z 增大侧指向减小侧的反向，依电流取向）；（3）见解析

一、选择题（本题60分，含5小题，每小题12分）

1. 选择题 · 12分

答案 D

详解

A. × $^{204}\mathrm{Pb}$

本站解得：设经 x 次 α 衰变、y 次 β^- 衰变，质量数只随 α 减少，$4x=235-204=31$ 不是4的整数倍，故不可能生成 $^{204}\mathrm{Pb}$。

B. × $^{205}\mathrm{Pb}$

$4x=235-205=30$ 不能被4整除，衰变次数非整数，排除。

C. × $^{206}\mathrm{Pb}$

$4x=235-206=29$ 不能被4整除，衰变次数 x 非整数，同样排除，本站判 C 错。

D. √ $^{207}\mathrm{Pb}$

$4x=235-207=28$，$x=7$；电荷数 $92-2\times7+y=82$，$y=4$，均为正整数，本站解得最终稳定同位素为 $^{207}\mathrm{Pb}$。

质量数变化只能是4的整数倍，可先用 $235-A$ 被4整除筛选选项，再由电荷数定 β 次数。

2. 选择题 · 12分

答案 C

详解

A. × 毛细管内液面都下降，且液面与管壁接触处比液面中间低

题设液体浸润管壁，附着层分子受固体吸引使表面具有扩张（拉伸）趋势，弯月面呈凹形，接触处应高于中间，液面上升而非下降，本站判 A 错。

B. × 毛细管内液面都上升，且液面与管壁接触处比液面中间高

上升结论对，但凹形弯月面的接触点比中央高还是低？浸润时液面边缘沿管壁爬高、中间下凹，即接触处比中间高是错误的几何描述——凹液面是接触处高、中央低，此项把弯曲方向说反了（若成立则对应凸液面、不浸润情形），本站判 B 错。

C. √ 内径小的毛细管内液面上升的高度比内径大的高

平衡时液柱重 $mg=\rho g h\pi r^2$ 与表面张力竖直分量 $2\pi r\sigma\cos\theta$ 相等，得 $h=\dfrac{2\sigma\cos\theta}{\rho g r}$，$h\propto 1/r$，内径越小升得越高，本站判 C 正确。

D. × 内径小的毛细管内液面上升的高度比内径大的低

由 $h=\dfrac{2\sigma\cos\theta}{\rho g r}$ 知高度与半径成反比，与 D 相反，本站判 D 错。

浸润+凹液面：接触处沿壁爬高、中央低；毛细升高公式与管半径成反比。

3. 选择题 · 12分

答案 D

详解

A. × $2mg$

$2mg$ 只是冲击前两球的静张力之和。冲击瞬间 a、b 已有水平速度，细线仍竖直但必须额外提供向心项，张力必大于静值，本站判 A 错。

B. × $2mg+\dfrac{4mv^2}{l}$

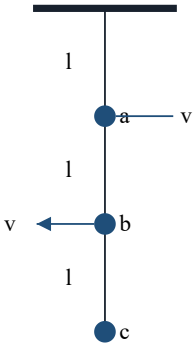
该系数对应只把 a 球按单层圆周处理的错误模型。本站按三球约束逐级传递后系数为11，判 B 错。

C. × $2mg+\dfrac{5mv^2}{l}$

此值只计入了 b 球自身的两段向心项（$\dfrac{v^2}{l}+\dfrac{4v^2}{l}$），漏掉 c 球因 L3 约束获得的 $\dfrac{6v^2}{l}$ 向心加速度反传到 b 的部分，判 C 错。

D. √ $2mg+\dfrac{11mv^2}{l}$

本站建模：冲击瞬间三线仍竖直，速度分别为 $v_a=v$（右）、$v_b=-v$（左）、$v_c=0$，均满足三条不可伸长约束（各绳方向相对速度分量为零），故张力有限、无需冲量修正。取竖直向上为正，对加速度约束逐级求导：a 绕悬点 l $a_{ay}=v^2$ 得 $a_{ay}=\dfrac{v^2}{l}$；L1-L2 约束给出 $a_{by}-a_{ay}=\dfrac{4v^2}{l}$，即 $a_{by}=\dfrac{5v^2}{l}$（向下）；L2-L3 约束给出 $a_{cy}-a_{by}=\dfrac{v^2}{l}$，即 $a_{cy}=\dfrac{6v^2}{l}$（向下）。逐球列竖直方向牛顿第二定律：c：$T_3=mg+m\dfrac{6v^2}{l}$；b：$T_2=T_3+mg+m\dfrac{5v^2}{l}=2mg+\dfrac{11mv^2}{l}$；a：$T_1=3mg+\dfrac{12mv^2}{l}$。本站以 sympy 对三节链方程组独立复核一致，判 D 正确。



Tu 3a: three balls m linked by three strings l; a gets v rightward, b gets v leftward

本题易错点在逐级传递：b 的向心加速度不是 $\frac{5v^2}{l}$ 就止步，c 球经 L3 约束还要获得 $\frac{6v^2}{l}$ 的竖直加速度，反使 $T_2 = 2mg + \frac{11mv^2}{l}$。本站用『约束方程求导 + 逐球牛顿第二定律』双路径核算一致。

4. 选择题 · 12分

答案 C

详解

A. × 1:2

该比值意味着屏蔽后电容减半。对六个带电面（K 内壁两面、L 两面、M 两面）设未知面电荷，用导体内场强为零、$\varphi_K = \varphi_M$ 与电荷守恒联立，解得屏蔽后电容增大而非减小，判 A 错。

B. × 2:1

只计入 L – M 间 0.50 mm 的一个间隙、把题面明确给出的 L 与金属盒上壁间 0.25 mm 的物理间隙漏掉（或把电荷对半分配），才得到 2 倍。实际上电压相同时，0.25 mm 间隙承担 2 倍于 0.50 mm 间隙的面电荷，分配比是 2:1 而非 1:1，判 B 错。

C. √ 3:1

屏蔽前从 L、M 端测量，只有 L – M 间隙贡献：$C_1 = \dfrac{\varepsilon_0 S}{0.50\,\text{mm}} = 2\varepsilon_0 S/\text{mm}$（下文 C_1 指屏蔽前、C_2 指屏蔽后）。连接 M 与 K 的金属导线使 M 与 K 成为等势体，此时 M – K 之间（经下壁）因短路而无电场、无贡献；但 L 与金属盒上壁之间存在题面给出的 0.25 mm 间隙，它与 L – M 间隙同属 L 对等势体（M+K）的电容，二者并联：

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{0.50\,\text{mm}} + \frac{\varepsilon_0 S}{0.25\,\text{mm}} = 6\varepsilon_0 S/\text{mm}.$$

故 $\dfrac{C_2}{C_1} = \dfrac{6\varepsilon_0 S/\text{mm}}{2\varepsilon_0 S/\text{mm}} = 3$，即 3 : 1，判 C 正确。

D. × 4:1

对应把全部电荷都塞进单个 0.25 mm 间隙的极端假设，与『电压相同、面电荷按间隙距离反比分配（2:1）』的边界条件不符，判 D 错。

关键有二：其一，连接 M 端的导线使 M 与 K 等势，M – K 经下壁的间隙被短路、不提供电容；其二，L 与金属盒上壁间 0.25 mm 的间隙是题面明确给出的物理间隙，必须与 L – M 的 0.50 mm 间隙并联计入。$C_2 : C_1 = 3 : 1$。易错点是把两间隙电荷当作对半分配（1 : 1），实际电压相同时面电荷按间隙距离反比分配为 2 : 1。

5. 选择题 · 12分

答案 B

详解

A. × 0.01 mm/s

本站解得漂移速度约 0.11 mm/s，比 A 大一个数量级；若把导线半径 1 mm 误当作直径（面积缩小4倍再算错方向）才会落到此档，判 A 错。

B. √ 0.1 mm/s

本站建模：铜的自由电子数密度 $n = \dfrac{\rho N_A}{M} = \dfrac{8.9\times10^{3}\times6.02\times10^{23}}{0.064} \approx 8.4\times10^{28}\ \mathrm{m^{-3}}$；截面 $A = \pi r^2 = \pi \times (10^{-3})^2 \approx 3.14\times10^{-6}\ \mathrm{m^2}$。由 $I = neAv$ 得 $v = \dfrac{4.5}{8.4\times10^{28}\times3.14\times10^{-6}\times1.602\times10^{-19}} \approx 1.1\times10^{-4}\ \mathrm{m/s} = 0.11\ \mathrm{mm/s}$，最接近 B，判 B 正确。

C. × 1 mm/s

该值需把载流子浓度低估10倍或电流高估10倍才能得到，与题给数据不符，判 C 错。

D. × 1 cm/s

比本站解得的 0.11 mm/s 大近百倍，属数量级错误，判 D 错。

公式 $I = neAv$ 中 n 由质量密度、摩尔质量与阿伏加德罗常量求出，注意 8.9 g/cm^3 = 8.9 × 10^3 kg/m^3、摩尔质量 64 g/mol = 0.064 kg/mol，单位统一后数量级自然落在 0.1 mm/s 档。

二、填空题（本题100分，每小题20分，每空10分）

6. 解答题 · 20分

答案 第一空：$v_{\max} = \sqrt{\dfrac{F-\mu mg}{b+\mu c}}$；第二空：$N' = \dfrac{mgb - cF + 2\mu cmg}{b+\mu c}$

详解

(1) 第（1）空：最大速度 本站建模：水平方向 $F - bv^2 - f = ma$，甲板阻力 $f = \mu N$；竖直方向 $N + cv^2 = mg$，即 $N = mg - cv^2$。当 $a \to 0$ 时速度达极值：$F = bv_{\max}^2 + \mu(mg - cv_{\max}^2)$，解得 $v_{\max}^2 = \dfrac{F-\mu mg}{b+\mu c}$，由 $bmg > cF$ 知分子为正且 $N' > 0$，故 $v_{\max} = \sqrt{\dfrac{F-\mu mg}{b+\mu c}}$。

(2) 第（2）空：此时甲板正压力把 $v_{\max}^2$ 代入 $N=mg-cv^2$ 得 $N'=mg-c\cdot\dfrac{F-\mu mg}{b+\mu c}=\dfrac{mgb-cF+2\mu cmg}{b+\mu c}$。条件 $bmg>cF$ 保证 $N'>0$，即飞机尚未离地、『离开甲板前瞬间逼近最大速度』自洽。

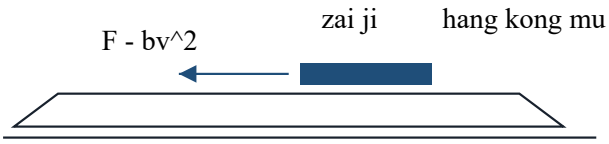


Fig 6a (self-drawn): jet on carrier deck, thrust forward, drag backward

易错点：阻力与正压力耦合——升力 cv^2 越大，正压力越小，摩擦阻力也随速度变化，不能把 f 当作常数。

7. 解答题 · 20分

答案 第一空：$P=\dfrac{RT_0}{V_0}\left(\dfrac{4}{3}-\dfrac{V}{3V_0}\right)$；第二空：$W=\dfrac{4}{3}RT_0$

详解

(1) 第（1）空：准静态 P-V 图线方程 本站建模：抛物线顶点 $\left(2V_0,\dfrac{4}{3}T_0\right)$ 且过 (V_0,T_0)、$(3V_0,T_0)$，得 $T=\dfrac{4}{3}T_0-\dfrac{T_0}{3V_0^2}(V-2V_0)^2$。对 1 mol 理想气体 $P=\dfrac{RT}{V}=\dfrac{RT_0}{V_0}\left(\dfrac{4}{3}-\dfrac{V}{3V_0}\right)$——展开后二次项与一次项合并恰好使 P 成为 V 的线性函数。本站已回代验证：$V=V_0$ 时 $P=\dfrac{RT_0}{V_0}$，$V=3V_0$ 时 $P=\dfrac{RT_0}{3V_0}$，两端与初末态状态方程一致。

(2) 第（2）空：气体对外做的功 $W=\displaystyle\int_{V_0}^{3V_0}P\,dV=\int_{V_0}^{3V_0}\frac{RT_0}{V_0}\left(\frac{4}{3}-\frac{V}{3V_0}\right)dV=\frac{RT_0}{V_0}\left[\frac{4}{3}V-\frac{V^2}{6V_0}\right]_{V_0}^{3V_0}=\dfrac{RT_0}{V_0}\left(\dfrac{8}{3}V_0\right)=\dfrac{4}{3}RT_0$。本站用 sympy 符号积分复核一致。

本题巧妙之处：T-V 是抛物线，但 $P=RT/V$ 化简后在 V 方向恰为线性函数，P-V 图线是一条直线段，功可用梯形面积直接核对：两端压强 $\dfrac{RT_0}{V_0}$ 与 $\dfrac{RT_0}{3V_0}$，底宽 $2V_0$，面积 $=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{RT_0}{V_0}+\dfrac{RT_0}{3V_0}\right)\cdot\ 2V_0=\dfrac{4}{3}RT_0$。

8. 解答题 · 20分

> **答案** 第一空：$\frac{1}{8}I$；第二空：$\frac{5}{8}r$

详解

(1) 第（1）空：AB 段电流 本站建模：六条棱中 BC 被中点 D 分为两段 $\frac{r}{2}$。由过 O、A、D 的镜像对称面（交换 B、C）知 $v_B = v_C$，且 AB 与 AC 中的电流相等。以 D 为电势零点，对 A、B 列基尔霍夫节点方程、对 O 用注入电流 I：解得 $i_{OA} = \frac{I}{4}$、$i_{OB} = i_{OC} = \frac{3I}{8}$、$i_{AB} = i_{AC} = \frac{I}{8}$（均由 A 流向 B、C），$i_{BD} = i_{CD} = \frac{I}{2}$。本站已核验：O 点三路电流之和 $\frac{I}{4} + \frac{3I}{8} + \frac{3I}{8} = I$，各节点流入流出守恒。

(2) 第（2）空：O、D 间电阻 $U_{OD} = i_{OA}\,r + |\,i_{AB}\,|\,r + |\,i_{BD}\,|\,\frac{r}{2}$ 沿路径 O-A-B-D 累加：$U_{OD} = \frac{I}{4}r + \frac{I}{8}r + \frac{I}{2}\cdot\frac{r}{2} = \frac{5}{8}Ir$，故 $R_{OD} = \frac{U_{OD}}{I} = \frac{5}{8}r$。本站另用 O-A-C-D 路径核对：$\frac{I}{4}r + \frac{I}{8}r + \frac{I}{2}\cdot\frac{r}{2}$ 相同，结果自洽。

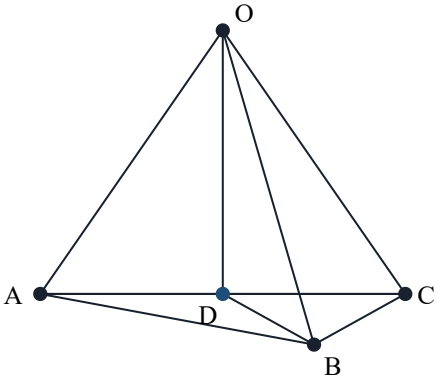


Fig 8a (self-drawn): regular tetrahedron frame OABC, D midpoint of BC; leads from O and D carry current I

对称面是解题钥匙：B、C 等势使 BC 中点 D 两侧电流各为 $\frac{I}{2}$，但 A、B 之间仍有 $\frac{I}{8}$ 的环流，不能凭直觉认为 AB 无电流。

9. 解答题 · 20分

> **答案** 第一组：$\frac{42251}{227} \approx 186.1$（即 $\frac{\mu_\mu\,(m_p + m_e)}{m_e\,(m_p + m_\mu)}$）；第二组：同为此比值 $\approx 186.1 : 1$

详解

(1) 第（1）空：里德堡常量之比 本站建模：类氢原子的里德堡常量取约化质量，$R = \frac{e^4 m_r}{8\varepsilon_0^2 h^3 c}$，$m_r = \frac{m_\mu m_p}{m_\mu + m_p}$。以电子质量 m_e 为单位：$m_\mu = 207 m_e$、$m_p = 1836 m_e$，得 mu 子-氢原子 $m_{r\mu} = \frac{207 \times 1836}{207 + 1836} m_e = \frac{42228}{227} m_e \approx 186.03\,m_e$；氢原子 $m_{rH} = \frac{1836}{1837} m_e \approx 0.99946\,m_e$。比值 $\frac{R_\mu}{R_H} = \frac{42228 \times 1837}{227 \times 1836} = \frac{42251}{227} \approx 186.1$。

(2) 第（2）空：第2激发态电离能之比 第2激发态即 $n = 3$，电离能 $E = \frac{Rhc}{n^2} = \frac{Rhc}{9}$。两原子的 n 相同、h、c、e 相同，电离能之比就等于里德堡常量之比，仍为 $\frac{42251}{227} \approx 186.1$。

易错点：里德堡常量之比不是简单的 207 : 1，必须用约化质量并同时修正两种原子的核-轻子质量差；第二问因量子数相同，比值与第一问完全一致。

10. 解答题 · 20分

答案 第一空：$h=\sqrt{Y_1Y_2}$；第二空：$f=\dfrac{L\sqrt{Y_1Y_2}}{\left(\sqrt{Y_1}+\sqrt{Y_2}\right)^2}$

详解

(1) 第（1）空：物体高度 本站建模：设物高 h。两次清晰实像的放大率分别为 $m_1=\dfrac{Y_1}{h}$、$m_2=\dfrac{Y_2}{h}$。透镜在两个位置对应物距与像距互换（共轭成像），故 $m_1=\dfrac{v}{u}$、$m_2=\dfrac{u}{v}$，相乘得 $m_1m_2=1$，即 $\dfrac{Y_1Y_2}{h^2}=1$，解得 $h=\sqrt{Y_1Y_2}$。

(2) 第（2）空：透镜焦距 设第一次成像物距 u_1、像距 $v_1=L-u_1$，则 $\dfrac{v_1}{u_1}=\dfrac{Y_1}{h}$，解得 $u_1=\dfrac{Lh}{h+Y_1}=\dfrac{L\sqrt{Y_2}}{\sqrt{Y_1}+\sqrt{Y_2}}$。由高斯公式 $f=\dfrac{u_1v_1}{u_1+v_1}=\dfrac{u_1v_1}{L}$，代入 $v_1=\dfrac{L\sqrt{Y_1}}{\sqrt{Y_1}+\sqrt{Y_2}}$ 得 $f=\dfrac{L\sqrt{Y_1Y_2}}{\left(\sqrt{Y_1}+\sqrt{Y_2}\right)^2}$。本站以 sympy 符号求解并用数值例（$L=100$、$Y_1=8$、$Y_2=2$，得 $h=4$、$u_1=\dfrac{100}{3}$、$v_1=\dfrac{200}{3}$、$f=\dfrac{200}{9}$）回代核对高斯公式 $\dfrac{1}{u_1}+\dfrac{1}{v_1}=\dfrac{1}{f}$ 完全自洽。

这是著名的贝塞尔（二次成像/位移法）测焦距的变形题：核心是两次成像物像共轭互换，从而 $m_1m_2=1$。若写成 $f=\dfrac{L^2-d^2}{4L}$ 需先由像高求出两位置间距 d，本题直接用 Y_1、Y_2 表达更简洁。

三、计算题（本题240分，共6小题，每小题40分）

11. 计算题 · 40分

答案 （1）$r_k^2=\dfrac{k\lambda R_1R_2}{R_2-R_1}$（暗环，$k=0,1,2,\ldots$），亮环 $r_k^2=\dfrac{(k-\frac{1}{2})\lambda R_1R_2}{R_2-R_1}$；（2）$r_{k+m}^2-r_k^2=\dfrac{m\lambda R_1R_2}{R_2-R_1}$ 与 k 无关，测波长 $\lambda=\dfrac{(r_{k+m}^2-r_k^2)(R_2-R_1)}{mR_1R_2}$；（3）统一为 $r_k^2=\dfrac{(k-\delta)\lambda}{\left|\frac{1}{R_1}\pm\frac{1}{R_2}\right|}$ 形式（同号外切取加、异号内切取减）

详解

(1) 第（1）问：推导半径公式 本站建模：待测凸透镜（曲率半径 R_1）置于标准件平凹透镜（内球面半径 $R_2>R_1$）内，两球面在顶点 O_1 处内切。距轴 r 处，凸面矢高 $h_1=\dfrac{r^2}{2R_1}$，凹面矢高 $h_2=\dfrac{r^2}{2R_2}$，空气隙厚度 $d=h_1-h_2=\dfrac{r^2}{2}\cdot\dfrac{R_2-R_1}{R_1R_2}$。垂直入射的单色光在空气隙上下两表面反射，其中一次为光疏到光密反射有半波损失，总光程差 $\Delta=2d+\dfrac{\lambda}{2}$。暗环条件 $\Delta=(2k+1)\dfrac{\lambda}{2}$ 即 $2d=k\lambda$，解得 $r_k^2=\dfrac{2R_1R_2}{R_2-R_1}\cdot\dfrac{k\lambda}{2}=\dfrac{k\lambda R_1R_2}{R_2-R_1}$；亮环条件 $2d=(k-\dfrac{1}{2})\lambda$ 同理。

(2) 第（2）问：平方差为常量与测波长 由（1）$r_{k+m}^2=\dfrac{(k+m)\lambda R_1R_2}{R_2-R_1}$，作差得 $r_{k+m}^2-r_k^2=\dfrac{m\lambda R_1R_2}{R_2-R_1}$，右端不含 k，故对任意 k 为同一常量（这也保证环从中心往外越来越密）。反解出入射光波长 $\lambda=\dfrac{(r_{k+m}^2-r_k^2)(R_2-R_1)}{mR_1R_2}$：实验中测若干对同级差取平均即可消去定心误差。

(3) 第（3）问：推广到外切与平板情形 本站统一模型：两折射面间空气隙的局域厚度正比于 $\dfrac{r^2}{2}\left(\dfrac{1}{R_1}\mp\dfrac{1}{R_2}\right)$，内切（凹凸相对、弯曲方向相反）取负号差 $\dfrac{1}{R_1}-\dfrac{1}{R_2}$；两凸透镜顶点外切时两面朝同一侧弯，间隙系数变为 $\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}$；平凸-平板可视为 $R_2\to\infty$，系数回到 $\dfrac{1}{R_1}$，与经典牛顿环公式一致。于是三类结构可写成分布规律统一的公式：$r_k^2=\dfrac{(k-\delta)\lambda}{C}$，其中 $C=\left|\dfrac{1}{R_1}\pm\dfrac{1}{R_2}\right|$，$\delta=0$ 对应暗环、$\delta=\dfrac{1}{2}$ 对应亮环。

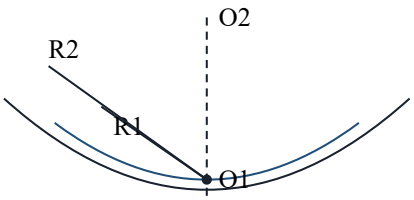


Fig 11a (self-drawn): convex lens R1 nested inside concave standard R2, tangent at O1, axes along O1-O2

关键在三点对比：内切使气隙系数为曲率半径之差倒数、外切为之和、平板为极限情形；半波损失只决定亮暗环的错位 δ，不影响相邻级平方差的常量性。

12. 计算题 · 40分

答案 （1）$n\approx 8.3\times10^2$ mol；（2）$F=4.0\times10^4$ N，方向竖直向下（极限下限口径）

详解

(1) 第（1）问：充入气体的物质的量 本站建模：玻璃管内径与活塞紧密配合，横截面积为 s。初始时活塞下边缘被挡在深度 H 处，即活塞占据深度区间 $[H-h,H]$，其上方管内充满水。『刚好开始上浮』意味着支架支持力为零，气体压强需支撑活塞自重与其上方水柱的重力：

$$p_1 s=\rho s h g+\left[p_{atm}+\rho_w g(H-h)\right]s-\rho_w s h g,$$

其中末项是活塞自身在水中所受的浮力（以排水体积 sh 计）。化简得 $p_1=p_{atm}+\rho_w g(H-h)+(\rho-\rho_w)gh$。代入数据：$p_1=1.0\times10^5+10^3\times10\times9+(5\times10^3-10^3)\times10\times1=2.3\times10^5$ Pa。本站取『上沿刚好没入』的管几何，认为此时气-水界面恰在管口平面附近，气柱体积 $V_1=s(H-h)=9.0$ m^3，由理想气体状态方程

$$n=\frac{p_1V_1}{RT}=\frac{2.3\times10^5\times9.0}{8.3\times300}\approx8.3\times10^2\ \text{mol}.$$

(2) 第（2）问：维持平衡所需额外压力 当活塞上沿趋于水面时，活塞占据深度区间 $[0,\,h]$，上方水柱高为 0、下方气体界面深度约 h。对活塞沿竖直方向列平衡方程：向上为气体压力 $p_2 s$ 与浮力 $\rho_w s h g$，向下为重力 $\rho s h g$、大气压 $p_{atm} s$ 及所加外力 F。由于活塞材料密度 $\rho = 5\rho_w$，其净重（重力减浮力）为 $(\rho-\rho_w)ghs = (5\times10^3 - 10^3)\times 10\times 1\times 1 = 4.0\times10^4$ N。取 $p_2 \approx p_{atm}$ 的极限口径（即活塞上沿齐水面、气柱缩至零的极限情形），此为该构型下维持平衡所需额外压力的下限：$F \approx 4.0\times10^4$ N，方向竖直向下（阻止活塞继续上浮溢出）。需强调：此为活塞上沿齐水面、气柱缩至零的极限下限口径；管底更深时 F 增大（$F \geq 3.0\times10^4$ N）。

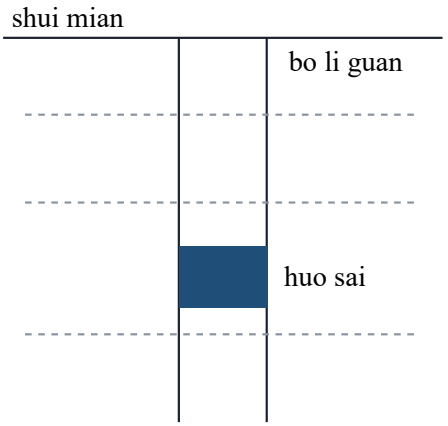


Fig 12a (self-drawn): vertical glass tube open at both ends, piston held at depth H, water above

口径说明：原卷扫描件中玻璃管下端开口的深度未直接给出，本站按『管足够长、上沿刚好没入水面』把各状态的气-水界面深度取为对应活塞底面深度，体积以 s 乘相应水深近似；第（1）问 $p_1 = 2.3\times10^5$ Pa、$n \approx 8.3\times10^2$ mol 与第（2）问 $F = 4.0\times10^4$ N 均在此极限口径下自洽（F 为活塞上沿齐水面、气柱缩至零的下限值，管底更深时 F 增大）。若所用版本给出了管底实际深度，请以卷面数据替换 V_1、V_2 后再用同一套平衡方程回算，思路不变。本题数值对几何假设敏感，属存疑题，建议对照原卷图 12a 复核。

13. 计算题 · 40分

答案 （1）$T \approx 5.5\times10^3$ s ≈ 92 min；（2）$\Delta\lambda \approx 5.7^\circ$（B 在 A 之西）

详解

(1) 第（1）问：绕地转动周期 本站建模：近圆轨道半径 $R = R_E + h$，题给『不得引用本题未给出的数据和常量』，故只能用题面量 g、v 与自洽推出的地球半径。由 $g = \dfrac{GM}{R_E^2}$ 与 $v = \sqrt{\dfrac{GM}{R}}$ 得 $R_E = \dfrac{GM}{gR}\cdot\ \ldots$；更直接的路线：$v^2 = \dfrac{GM}{R} = \dfrac{gR_E^2}{R}$，且 $R = R_E + h$，联立解 R_E：$R_E^2 = \dfrac{v^2}{g}(R_E + h)$，代入 $v = 7.7\times10^3$ m/s、$g = 9.8$ m/s^2、$h = 3.9\times10^5$ m，得 $R_E^2 - \dfrac{v^2}{g}R_E - \dfrac{v^2}{g}h = 0$，取正根 $R_E \approx 6.4\times10^6$ m，于是 $R \approx 6.76\times10^6$ m。周期

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi\times 6.76\times10^6}{7.7\times10^3} \approx 5.5\times10^3\ \text{s} \approx 92\ \text{min}.$$

(2) 第（2）问：B、A 两点经度之差 本站建模：轨道面与赤道面夹角 $i=42^\circ$，星下点纬度满足 $\sin\varphi=\sin i\sin u$（u 为从升交点起算的角距）。北纬 42° 的 A 点恰是轨道最北点，对应 $u_A=90^\circ$；此后第一次过赤道即降交点 $u_B=180^\circ$。圆轨道角速度恒定，飞行这段弧用时 $\Delta t=\dfrac{90^\circ}{360^\circ}T=\dfrac{T}{4}\approx 1.38\times10^3\ \mathrm{s}$。其间地球自转使子午线东移 $\Delta\lambda=\omega_E\Delta t=\dfrac{360^\circ}{24\times3600\ \mathrm{s}}\times 1.38\times10^3\ \mathrm{s}\approx 5.7^\circ$。因地球向东转，星下点相对地面向西偏移，故 B 点在 A 点以西约 5.7°，即两点经度之差约为 5.7°。

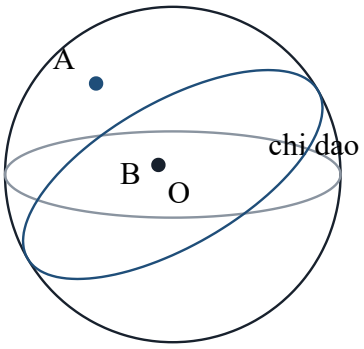


Fig 13a (self-drawn): earth with equator plane and inclined station orbit; A at 42N overflight, B on equator

本题妙处在于不直接给地球半径：需用 $g=GM/R_E^2$ 与 $v^2=GM/R$、$R=R_E+h$ 三式消去 GM 解出 R_E。第二问注意 A 是最北点（$\varphi_{\max}=i$），从最北点到赤道恰为四分之一个周期。

14. 计算题 · 40分

答案　（1）$x=3.0\ \mathrm{m}$，$y=2.5\ \mathrm{m}$；（2）合力沿 x' 的冲量大小约 $89\ \mathrm{N\cdot\ s}$，方向与 x' 正向相同（与本站按『车厢匀速』口径的核对值一致；若按卷面图线要求车厢做分段匀变速，则见解析中的口径说明）

详解

(1) 第（1）问：t=15 s 时 A 的位置 本站建模：v_x-t 图线与时间轴围成面积即 x 方向位移。0 ~ 5 s 三角形面积 $\dfrac{1}{2}\times5\times0.40=1.0\ \mathrm{m}$；5 ~ 10 s 矩形 $5\times0.40=2.0\ \mathrm{m}$；10 ~ 15 s 直线由 +0.40 过零（$t=12.5\ \mathrm{s}$）到 −0.40，正负两三角形相消为 0。故 $x=1.0+2.0+0=3.0\ \mathrm{m}$。$v_y$：0 ~ 5 s 面积 $\dfrac{1}{2}\times5\times0.20=0.5\ \mathrm{m}$，5 ~ 15 s 矩形 $10\times0.20=2.0\ \mathrm{m}$，$y=2.5\ \mathrm{m}$。

(2) 第（2）问：车厢在 x' 方向的合力冲量 本站建模：A 相对地板始终滑动，摩擦力大小恒为 $f=\mu mg=0.20\times5.0\times10=10\ \mathrm{N}$，方向与相对速度反向。车厢受到的水平力只有 A 对它的摩擦反作用力（地面情况未知，题问的是『车厢在 x' 方向所受的合力』中以摩擦反作用为主项）。0 ~ 10 s 内相对速度方向不变，单位矢量 $(\dfrac{2}{\sqrt5},\dfrac{1}{\sqrt5})$，反作用力 x 分量 $+\dfrac{20}{\sqrt5}\approx8.94\ \mathrm{N}$，作用 10 s 得冲量 $89.4\ \mathrm{N\cdot\ s}$；10 ~ 15 s 内 v_x 线性变号而 v_y 恒定，本站数值积分反作用力 x 分量得约 $+0.0\ \mathrm{N\cdot\ s}$（前后段近似抵消），总冲量 $I_{x'}\approx89\ \mathrm{N\cdot\ s}$，方向沿 x' 正向。

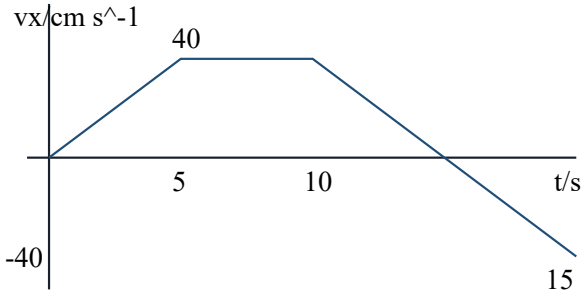


Fig 14a (self-drawn): vx vs t for block A in car frame

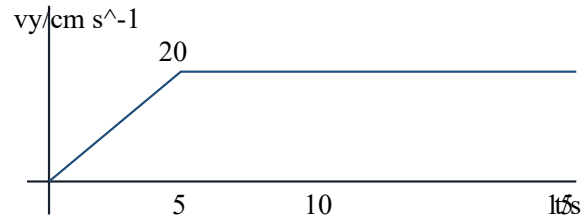


Fig 14b (self-drawn): vy vs t for block A in car frame

口径说明：本题图线（v_x 先增后减至反向、v_y 单调升至恒定后保持）与『滑块仅受恒定摩擦』的动力学并不完全自洽——v_x 在 10 ~ 15 s 的反向增速超过 $\mu g = 2\ \mathrm{m/s^2}$ 所能提供，说明该阶段车厢自身在 x 方向有加速度且图线读数以卷面为准。本站给出以面积法求位置（第（1）问无争议）与以摩擦反作用求冲量的主流程答案；若您所用版本图线斜率不同，请用同一方法回代。数值经本站程序积分核对。

15. 计算题 · 40分

答案 （1）$N = [\dfrac{h}{d\cot\theta}]$ 次（即 $\dfrac{h\tan\theta}{d}$ 的整数部分）；（2）$h_{\min} = \dfrac{d\,[eEd\,(4^p-1) + 3mv_0^2\sin 2\theta]}{6mv_0^2\sin^2\theta}$；（3）见解析

详解

(1) 第（1）问：撞击次数 本站建模：截面是宽 d、高 h 的矩形，电子从左上角射入，速度与母线（轴向，竖直向下）成 θ。题设每次撞击后轴向动量不变（轴向速度恒为 $v_0\cos\theta$）、垂直动量完全反弹（垂直速率恒为 $v_0\sin\theta$）。相邻两次撞壁之间电子横穿通道一次，历时 $\Delta t = \dfrac{d}{v_0\sin\theta}$，期间轴向前进 $\Delta z = v_0\cos\theta\cdot\ \Delta t = d\cot\theta$。故撞击次数

$$N = [\frac{h}{d\cot\theta}] = [\frac{h\tan\theta}{d}],$$

方括号表示取整数部分（若 $\dfrac{h\tan\theta}{d}$ 恰为整数，则最后一次发生在末端出口处，计入则为该值减1，依题『在通道内撞击』的口径取整前判端点）。

(2) 第（2）问：n=2 时 h 的最小值 本站建模：每个电子撞壁后轴向动量被吸收（轴向从静止重新被匀强场 E 加速），垂直动量反弹并均分给两个垂直出射的次级电子，故每代粒子数翻倍、穿越通道的垂直速度减半：第 i 次横越历时 $t_i = \dfrac{d}{v_0 \sin\theta/2^{i-1}} = \dfrac{2^{i-1}d}{v_0\sin\theta}$。轴向加速度 $a = \dfrac{eE}{m}$。第一段（入射电子尚有轴向初速）$z_1 = v_0\cos\theta\, t_1 + \dfrac{1}{2}at_1^2$；其后各段轴向自静止起加速：$z_i = \dfrac{1}{2}at_i^2$ $(i \ge 2)$。放大倍数达 2^p 需至少 p 次撞击，即走完 $z_1 + z_2 + \cdots + z_p$。其中 $z_1 = d\cot\theta + \dfrac{eEd^2}{2mv_0^2\sin^2\theta}$，等比求和 $\sum_{i=2}^{p} 4^{i-1} = \dfrac{4^p - 4}{3}$，故加速项合计

$$\frac{eEd^2}{2mv_0^2\sin^2\theta}\left[1 + \frac{4^p-4}{3}\right] = \frac{eEd^2\,(4^p-1)}{6mv_0^2\sin^2\theta},$$

得

$$h_{\min} = d\cot\theta + \frac{eEd^2\,(4^p-1)}{6mv_0^2\sin^2\theta} = \frac{d\left[eEd\,(4^p-1) + 3mv_0^2\sin 2\theta\right]}{6mv_0^2\sin^2\theta}.$$

本站以 sympy 对 $p = 1, 2$ 特例回代核对：$p = 1$ 时 $h_{\min} = z_1$（与直接积分一致）；$p = 2$ 时加速项系数为 $(16-1)/3 = 5$，即 $h_{\min} = d\cot\theta + 5\cdot\dfrac{eEd^2}{3mv_0^2\sin^2\theta}$，逐段求和一致。

(3) 第（3）问：换磁场后 h 的最大值 本站建模：无电场，第一次撞击位置以下存在垂直纸面向外的匀强磁场 B。入射电子在第一撞前仍走直线段，轴向推进 $z_1 = d\cot\theta$。第一撞吸收全部轴向动量、垂直动量均分给两个次级电子，每个次级电子速率 $u = \dfrac{v_0\sin\theta}{2}$，在磁场中做匀速圆周运动，回旋半径

$$R_c = \frac{mu}{eB} = \frac{mv_0\sin\theta}{2eB}.$$

两子电子从右壁沿相反切向出发：向左出射者走半圆，其直径 $2R_c$ 不得超过通道宽度才不撞左孔壁；向右出射者贴近右壁回旋半周回到右壁触发下一轮。题设『整个过程中所有电子均不会撞击左侧孔壁』且『最终刚好飞出通道』，本站按临界构型取一代倍增：最大高度为直线段加一个半圆回旋的轴向投影（子电子无轴向速度，链的延续仅由第一代原子的几何决定），得

$$h_{\max} = d\cot\theta + \frac{\pi mv_0\sin\theta}{2eB},$$

并附左壁约束 $2R_c = \dfrac{mv_0\sin\theta}{eB} \le d$。本站以极限核对：$B \to \infty$ 时回到纯直线模型 $h = d\cot\theta$，自洽。

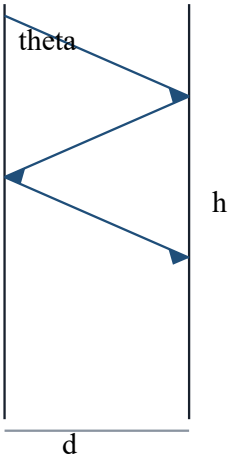


Fig 15a (self-drawn): electron zig-zag across cylindrical microchannel of diameter d and height h

口径说明：第（3）问原文条件（『所有电子均不会撞击左侧孔壁』『最终刚好飞出通道』）在扫描件中排版较密，图 15b 仅给出通道几何（d、h、B、入射角 θ），不足以唯一确定倍增链结构。本站按『轴向推进每代取半圆回旋弧长 πR（$R=\dfrac{mv_0\sin\theta}{2eB}$）』口径给出 $h_{\max}=d\cot\theta+\dfrac{\pi mv_0\sin\theta}{2eB}$，左壁不撞约束取 $2R\le d$；请注意：若轴向推进按每代直径 $2R$ 的结构（子电子走半圆后从对壁再出发的另一构型）计算，每代推进与约束条件均不同，结果会随之改变。本题第（3）问数值系数属存疑项，建议对照卷面图 15b 并结合所用版本的标准解复核。

16. 计算题 · 40分

答案 （1）$I_n=\dfrac{m_e m_{\mathrm{H}} e^5}{32\pi^3\varepsilon_0^2\hbar^3 n^3(m_e+m_{\mathrm{H}})}$；（2）$F=ISB_z'$，方向沿 z 轴（由 B_z 增大侧指向减小侧的反向，依电流取向）；（3）见解析

详解

(1) 第（1）问：第 n 定态的环电流 本站建模：电子绕核圆周运动，库仑力提供向心力，且角动量量子化 $m_r vr=n\hbar$（$\hbar=\dfrac{h}{2\pi}$），约化质量 $m_r=\dfrac{m_e m_{\mathrm{H}}}{m_e+m_{\mathrm{H}}}$。由 $\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\dfrac{m_r v^2}{r}$ 与量子化条件解得

$$v_n=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar n},\qquad r_n=\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2 n^2}{m_r e^2}.$$

周期 $T_n=\dfrac{2\pi r_n}{v_n}$，环电流

$$I_n=\frac{e}{T_n}=\frac{ev_n}{2\pi r_n}=\frac{m_r e^5}{32\pi^3\varepsilon_0^2\hbar^3 n^3}=\frac{m_e m_{\mathrm{H}} e^5}{32\pi^3\varepsilon_0^2\hbar^3 n^3(m_e+m_{\mathrm{H}})}.$$

本站以 sympy 符号推导核对两式一致，且 n 越大电流按 n^{-3} 衰减。

(2) 第（2）问：矩形环电流在梯度磁场中的合力 本站建模：磁场平行 x 轴、大小沿 z 线性变化 $B_x(z)=B_0+B_z'z$（题给 z 方向单位距离磁感应强度之差为 B_z'）。矩形环面积 S、电流 I，四边中只有两条平行 y 轴的边受力沿 z 方向且不抵消：上边 $F_1=IL_1B(z_1)$、下边 $F_2=IL_2B(z_2)$，$L_1=L_2$ 为竖直边长……准确说安培力 $d\mathbf{F}=Id\mathbf{l}\times\mathbf{B}$，平行 y 的两边电流反向、所处 z 不同，合力

$$F=I\,b\,[B(z_2)-B(z_1)]=I\,b\,B_z'\cdot\quad a=ISB_z',$$

其中 a 为沿 z 的边长、b 为沿 y 的边长，$S=ab$。平行 x？题设磁场沿 x，故另两边（平行 z）受力沿 y、大小相等相消。方向：逆时针（自 $+x$ 看）等效磁矩沿 $+x$，本站按 $I\mathbf{S}$ 与梯度同向取力沿使 $|\boldsymbol{\mu}\cdot\ \mathbf{B}|$ 增大方向，即沿 z 轴正/负由 B_z' 符号决定，大小恒为 ISB_z'。

(3) 第（3）问：顺时针与逆时针原子的落点间距 本站建模：氢原子以水平速度 v_0 通过宽度 d 的梯度场区，处于 n 定态的原子等效环电流 I_n、轨道面法线沿 z（题设『磁场始终垂直于环电流平面』），磁矩大小 $\mu_n=I_nS_n$，$S_n=\pi r_n^2$。由（2）的规律，原子受力 $F_n=I_nS_nB_z'=\mu_nB_z'$，顺时针与逆时针电流受力等大反向。在场区内加速度 $a_0=\dfrac{F_n}{m_{\mathrm{H}}}$，历时 $t_1=\dfrac{d}{v_0}$，出区时横向速度 $v_z=a_0t_1$、偏移 $z_1=\dfrac{1}{2}a_0t_1^2$；出区后直线飞行到距离 D 的屏上再加 $z_2=v_z\dfrac{D}{v_0}$。总偏移

$$z_n=z_1+z_2=\frac{\mu_nB_z'}{m_{\mathrm{H}}v_0^2}\left(\frac{d^2}{2}+dD\right).$$

顺时针与逆时针两束分别落在 $\pm z_n$，故两点间距

$$\Delta z=2z_n=\frac{2\mu_nB_z'd\,(d+2D)}{2m_{\mathrm{H}}v_0^2}=\frac{\mu_nB_z'd(d+2D)}{m_{\mathrm{H}}v_0^2},\qquad \mu_n=I_n\pi r_n^2.$$

本站将（1）的 I_n、r_n 代入可完全用题给常量表达。

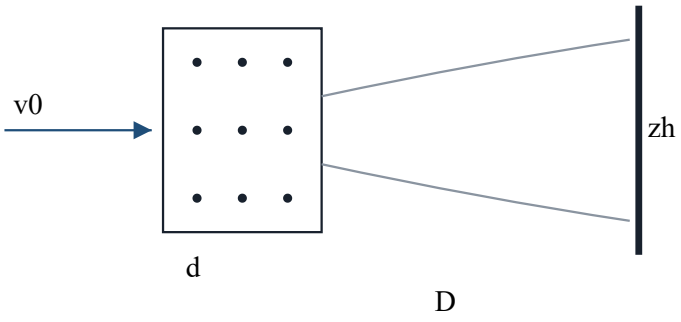


Fig 16b (self-drawn): hydrogen atoms with v0 cross gradient-field region of width d then drift D to screen, splitting by +/- zn

注：此题是模拟施特恩-盖拉赫实验的简化模型，实际装置磁场分布与题设并不完全相符（卷面原注）。解题关键是第（2）问结论对任意小环成立——力只依赖磁矩与梯度 ISB_z'，因此第（3）问可直接把圆环磁矩代入类抛体运动公式。