逐光知理 · 高考物理参考答案与详解

第41届全国中学生物理竞赛复赛试题（2024年9月21日 9:00-12:00）

参考答案与详解（本站独立编撰）

物理竞赛复赛 · 7 道计算/解答题 · 总分 320 分

本册答案与解析由逐光知理物理教研组独立编撰（本站独立编撰，非任何机构发布版本）：基于原卷扫描件逐页辨读题目，全部推导、数值回代与示意图均为本站自行完成，未参考外部答案。若个别数值与原卷印刷值存在出入，以卷面为准。

答案速查

题号	主考点	答案摘要
1	受迫振动、共振、调谐质量阻尼器与含阻尼耦合振动系统	（1.1）$A=\dfrac{H}{\left\lvert k-(M+m)\omega^2-\dfrac{ml\omega^4}{g-l\omega^2}\right\rvert}$；（1.2）$\omega=\sqrt{k/M}$，条件 $l=gM/k$；（2）无阻尼器振幅 $100H/k$，$m\approx 1.02\times 10^{-2}M$；（3）非线性方程组见解析，阻尼力耗散风输入的能量，使振幅有界
2	刚体弹性碰撞、滑动摩擦下的滚动演化与纯滚条件	（1）夹角 90°，$v_Q=v_0\sin\varphi$，$\omega=\omega_0$；（2.1）$v_{C0x}=v_0\sin\varphi\cos\varphi-R\omega_{0y}$，$v_{C0y}=v_0\sin^2\varphi+R\omega_{0x}$；（2.2）$\Delta t=\dfrac{2\lvert\boldsymbol{v}_{C0}\rvert}{7\mu g}$；（2.3）抛物线；（2.4）直线，$\tan\theta_f=\dfrac{5v_0\sin\varphi\cos\varphi+2R\omega_{0y}}{5v_0\sin^2\varphi-2R\omega_{0x}}$；（3）$h=7R/5$；（4）见表及解析，$\varphi_m\approx 32.3^\circ$，$\theta_{fm}\approx 38.3^\circ$
3	表面张力系数的温度压强依赖与表面层微观模型	（1）注入“水”的温度约为 $34\,^\circ\mathrm{C}$；（2）$\sigma=(1-\zeta)\dfrac{L_m}{N_A}\left(\dfrac{\rho N_A}{\mu}\right)^{2/3}$
4	相对论性电子能量、相对论总能量与不确定性原理	（1）$E_k\approx 0.146$ GeV，狭义相对论与极端相对论差别约 $0.35\%<1\%$；（2）$E=\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}+\dfrac{kZ_1Z_2e^2}{r}$；两质子情形 $v\approx 8.7\times 10^6$ m/s
5	无限长直导线磁场叠加、磁偶极子势能与磁阱中的原子气体	（1）$B_O=0$，$B_P\approx\dfrac{16\mu_0 Iab}{\pi(a^2+b^2)^2}\sqrt{x^2+y^2}$，方向 $(-x,y,0)$；（2）证明见解析；（3）$\boldsymbol{F}=-SG\dfrac{(x,y,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}$；（4）平均势能 $\dfrac{2}{3}SGR_1$，冷却后原子数 $N/25$、总势能 $\dfrac{2NSGR_1}{375}$、平均势能 $\dfrac{2SGR_1}{15}$
6	万有引力场中双曲线轨道与光线在引力场中的弯曲	（1）$\theta_{\max}=\arccos(-1/e)\in(\pi/2,\pi]$；（2）$p=\dfrac{L^2}{GMm^2}$，$e=\sqrt{1+\dfrac{2EL^2}{G^2M^2m^3}}$；（3）$\Delta\varphi=2\arctan\dfrac{GM_\odot}{bv_0^2}\approx\dfrac{2GM_\odot}{bv_0^2}$，掠日星光 $\approx 0.87''$；（4）$\Delta\varphi=\dfrac{4GM_\odot}{c^2R_\odot}\approx 1.75''$

7	波函数单值性、磁通量子化与多电子系统能量	（1）$p=\dfrac{n\hbar}{R}$（n 为整数）；（2）$E_n(\Phi)=\dfrac{(n\hbar+e\Phi/2\pi)^2}{2mR^2}$；（3）周期 h/e；（4）奇数 N：$\bar{E}=\dfrac{e^2\Phi^2}{8\pi^2mR^2}+\dfrac{\hbar^2(N^2-1)}{24mR^2}$，偶数 N：$\bar{E}=\dfrac{\hbar^2(N^2-1)}{24mR^2}+\dfrac{\hbar^2(e\Phi/2\pi\hbar-1/2)^2}{2mR^2}$；（5）证明见解析

第一题（45分） 高层建筑的风致振动与调谐质量阻尼器

1. 计算题 · 45分

答案 （1.1）$A=\dfrac{H}{\left|k-(M+m)\omega^2-\dfrac{ml\omega^4}{g-l\omega^2}\right|}$；（1.2）$\omega=\sqrt{k/M}$，条件 $l=gM/k$；（2）无阻尼器振幅 $100H/k$，$m\approx1.02\times10^{-2}M$；（3）非线性方程组见解析，阻尼力耗散风输入的能量，使振幅有界

详解

(1) 第（1.1）问：系统稳定受迫振动的振幅 取大楼水平位移为 x（向左为正），摆相对铅垂方向偏角为 θ。小幅度振动下摆锤的水平位移近似为 $x+l\theta$，系统动能与势能为

$$T=\frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2+ml\dot{x}\dot{\theta}+\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2,\qquad U=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}mgl\theta^2.$$

拉格朗日方程给出运动方程组

$$(M+m)\ddot{x}+ml\ddot{\theta}+kx=H\cos\omega t,$$

$$\ddot{x}+l\ddot{\theta}+g\theta=0.$$

设稳定解 $x=a\cos\omega t$，$\theta=b\cos\omega t$，代入得

$$[k-(M+m)\omega^2]a-ml\omega^2b=H,\qquad -\omega^2a+(g-l\omega^2)b=0.$$

由第二式 $b=\dfrac{\omega^2a}{g-l\omega^2}$，回代第一式解得本站所求振幅

$$a=\frac{H}{k-(M+m)\omega^2-\dfrac{ml\omega^4}{g-l\omega^2}}.$$

振幅为上式分母的绝对值。

(2) 第（1.2）问：共振频率与阻尼器条件 没有阻尼器时大楼单独作受迫振动，振幅 $A=H/|k-M\omega^2|$，当 $\omega=\omega_0=\sqrt{k/M}$ 时分母为零，受迫振动振幅最大，即共振。此时要最大限度减小大楼振动，应使摆（阻尼器）的固有频率与风的频率一致，即

$$\sqrt{\frac{g}{l}}=\sqrt{\frac{k}{M}}\quad\Longrightarrow\quad l=\frac{gM}{k}.$$

此时对共振频率的风，上问分母中 $g-l\omega^2\to0$，振幅 $a\to0$，即吸振器在该频率处形成反共振点，大楼可几乎不动。

(3) 第（2）问：失谐 1% 时无阻尼器振幅与所需质量比 风频率 $\omega=\sqrt{0.99}\,\omega_0$。无阻尼器时振幅

$$A_0=\frac{H}{\mid k-M\omega^2\mid}=\frac{H}{\mid k-0.99k\mid}=\frac{100H}{k}.$$

安装满足 $l=gM/k$ 的阻尼器后，$l\omega^2=0.99g$，$g-l\omega^2=0.01g$，代入第（1.1）问结果：

$$a=\frac{H}{k-(M+m)(0.99k/M)-\dfrac{ml(0.99k/M)^2}{0.01g}}=\frac{H}{k\,(0.01-\dfrac{99.0m}{M})}.$$

要使 $\mid a\mid=H/k$（即为无阻尼器时的 1%），需 $99.0\,m/M-0.01=1$，解得

$$\frac{m}{M}=\frac{1.01}{99.0}\approx 1.02\times10^{-2},\qquad m\approx\frac{M}{98}.$$

即阻尼器质量约为大楼质量的 1.02%。

(4) 第（3）问：含阻尼的非线性方程组与阻尼力必要性的定性分析 油相对大楼静止，摆锤相对油的（切向）速度大小为 $l\dot\theta$，受阻力 $f=-\gamma l\dot\theta$（切向）。不做小幅度近似，摆锤位置为 $(x+l\sin\theta,\ l\cos\theta)$，本站由拉格朗日方程加广义耗散力 $Q_\theta=-\gamma l^2\dot\theta$ 得运动方程组

$$(M+m)\ddot x+ml(\ddot\theta\cos\theta-\dot\theta^2\sin\theta)+kx=H\cos\omega t,$$

$$ml^2\ddot\theta+\gamma l^2\dot\theta+ml\ddot x\cos\theta+mgl\sin\theta=0.$$

定性分析：风对系统做功的功率 $F\dot x$ 在共振附近持续为正，向系统输入能量；若无阻尼力，系统是保守的，能量只能累积，共振时振幅将随时间无限增大，不存在有界的稳定振动，大楼必然损坏。阻尼力把一部分机械能耗散为热，使每个周期输入的能量与耗散的能量平衡，从而振幅有界、运动稳定；阻尼越大，稳态振幅越小。因此阻尼力必不可少。

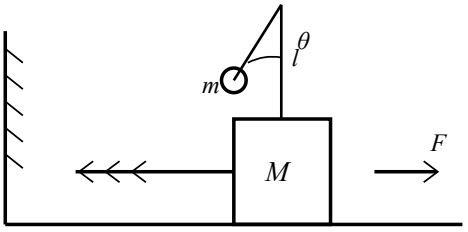


图1 调谐质量阻尼器示意（本站绘

图1 调谐质量阻尼器系统示意（本站绘制）

第（2）问中若把无阻尼器时的质量误取为 $M+m$，会得到 $m\approx1.05\times10^{-2}M$，量级相同；本站按题意取阻尼器未安装时谐振子质量为 M。

第二题（50分） 台球 Q 球与 T 球的弹性碰撞及滚动演化

2. 计算题 · 50分

答案 （1）夹角 90°，$v_Q = v_0\sin\varphi$，$\omega = \omega_0$；（2.1）$v_{C0x} = v_0\sin\varphi\cos\varphi - R\omega_{0y}$，$v_{C0y} = v_0\sin^2\varphi + R\omega_{0x}$；（2.2）$\Delta t = \dfrac{2\,|\,\boldsymbol{v}_{C0}\,|}{7\mu g}$；（2.3）抛物线；（2.4）直线，$\tan\theta_f = \dfrac{5v_0\sin\varphi\cos\varphi + 2R\omega_{0y}}{5v_0\sin^2\varphi - 2R\omega_{0x}}$；（3）$h = 7R/5$；（4）见表及解析，$\varphi_m \approx 32.3^\circ$，$\theta_{fm} \approx 38.3^\circ$

详解

(1) 第（1）问：碰后方向夹角、Q 球速度与角速度 两球间无摩擦，碰撞冲量只能沿接触瞬间两球心的连线（法线）方向；该连线过 Q 球球心，对 Q 球不产生力矩，故碰后瞬间 $\omega = \omega_0$。设球心连线与 y 轴夹角为 φ。完全弹性碰撞、两球质量相同：沿法线方向两球交换速度分量，T 球获得法向分量 $v_T = v_0\cos\varphi$（沿连线方向飞出），Q 球保留切向分量

$$v_Q = v_0\sin\varphi,$$

方向与连线垂直，故与 y 轴夹角 $\theta = 90^\circ - \varphi$。两球飞行方向之间的夹角为

$$\varphi + \theta = 90^\circ.$$

回代核验：$v_T^2 + v_Q^2 = v_0^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = v_0^2$，动能守恒成立。

(2) 第（2.1）问：碰后瞬间接触点 C 相对桌面速度的分量 碰后 Q 球质心速度分量为 $v_{Qx} = v_0\sin\varphi\cos\varphi$，$v_{Qy} = v_0\sin^2\varphi$。接触点相对球心的位矢为 $-R\hat{\boldsymbol{z}}$，故

$$\boldsymbol{v}_{C0} = \boldsymbol{v}_Q + \boldsymbol{\omega}_0\times(-R\hat{\boldsymbol{z}}) = \boldsymbol{v}_Q + (-R\omega_{0y},\ R\omega_{0x},\ 0),$$

即

$$v_{C0x} = v_0\sin\varphi\cos\varphi - R\omega_{0y}, \qquad v_{C0y} = v_0\sin^2\varphi + R\omega_{0x}.$$

记 $v_c = \sqrt{v_{C0x}^2 + v_{C0y}^2}$。

(3) 第（2.2）问：达到纯滚所需时间 滑动摩擦力 $\boldsymbol{f} = -\mu mg\,\hat{\boldsymbol{v}}_{C0}$ 作用于接触点。质心加速度 $\boldsymbol{a} = -\mu g\,\hat{\boldsymbol{v}}_{C0}$；对球心的力矩使角速度变化，$I\dot{\boldsymbol{\omega}} = (-R\hat{\boldsymbol{z}})\times\boldsymbol{f}$，$I = \dfrac{2}{5}mR^2$。接触点速度的变化率

$$\frac{d\boldsymbol{v}_C}{dt} = \boldsymbol{a} + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times(-R\hat{\boldsymbol{z}}) = -\mu g\,\hat{\boldsymbol{v}}_{C0} - \frac{mR^2}{I}\mu g\,\hat{\boldsymbol{v}}_{C0} = -\frac{7}{2}\mu g\,\hat{\boldsymbol{v}}_{C0},$$

即接触点滑动速度方向不变、大小以 $\frac{7}{2}\mu g$ 匀速率减小，故

$$\Delta t = \frac{2v_c}{7\mu g}.$$

(4) 第（2.3）问：纯滚前质心轨迹 滑动期间质心加速度恒为 $\boldsymbol{a} = -\mu g\,\hat{\boldsymbol{v}}_{C0}$（大小方向都不变），初速度为 $\boldsymbol{v}_Q$，故轨迹为抛物线：

$$x(t) = v_0\sin\varphi\cos\varphi\,t - \frac{\mu g\,v_{C0x}}{2v_c}t^2, \qquad y(t) = v_0\sin^2\varphi\,t - \frac{\mu g\,v_{C0y}}{2v_c}t^2, \qquad 0 \le t \le \Delta t.$$

(5) 第（2.4）问：纯滚后的轨迹形状与 $\tan\theta_f$ 纯滚时滑动速度恰降为零：$\mu g\Delta t=\frac{2}{7}v_c$，故质心末速度

$$\boldsymbol{v}_{Qf}=\boldsymbol{v}_Q-\frac{2}{7}\boldsymbol{v}_{C0}=\boldsymbol{v}_Q-\frac{2}{7}[\boldsymbol{v}_Q+\boldsymbol{\omega}_0\times(-R\hat{\boldsymbol{z}})]=\frac{5}{7}\boldsymbol{v}_Q+\frac{2R}{7}(\omega_{0y},-\omega_{0x}),$$

即

$$v_{Qfx}=\frac{5v_0\sin\varphi\cos\varphi+2R\omega_{0y}}{7},\qquad v_{Qfy}=\frac{5v_0\sin^2\varphi-2R\omega_{0x}}{7}.$$

纯滚后无摩擦力，质心作匀速直线运动，轨迹为直线。速度与 y 方向夹角 θ_f 满足

$$\tan\theta_f=\frac{5v_0\sin\varphi\cos\varphi+2R\omega_{0y}}{5v_0\sin^2\varphi-2R\omega_{0x}}.$$

(6) 第（3）问：无滑滚动出击打点高度 杆给予的水平冲量 M 作用在过球心竖直大圆面内、离台面高度 h 的点上，作用线沿 y 方向。对球心的冲量矩为 $M(h-R)$（作用点相对球心的竖直距离为 $h-R$），故 $I\omega_0=M(h-R)$；质心动量 $mv_0=M$。无滑滚动要求接触点速度为零：$v_0-R\omega_0$ 的大小满足 $v_0=R\omega_0$。于是

$$mv_0(h-R)=\frac{2}{5}mR^2\cdot\frac{v_0}{R}\implies h-R=\frac{2}{5}R,\qquad h=\frac{7}{5}R.$$

(7) 第（4.1）问：特定条件下纯滚前的轨迹 此时 $\omega_{0x}=-v_0/R$（前旋，使出击打即为纯滚），$\omega_{0y}=0$。接触点初滑动速度

$$\boldsymbol{v}_{C0}=v_0(\sin\varphi\cos\varphi,\ \sin^2\varphi-1)=v_0\cos\varphi\,(\sin\varphi,\ -\cos\varphi),\qquad |\,\boldsymbol{v}_{C0}\,|=v_0\cos\varphi.$$

滑动摩擦加速度分量为 $a_x=-\mu g\sin\varphi$，$a_y=+\mu g\cos\varphi$，故

$$x(t)=v_0\sin\varphi\cos\varphi\,t-\frac{1}{2}\mu g\sin\varphi\,t^2,\qquad y(t)=v_0\sin^2\varphi\,t+\frac{1}{2}\mu g\cos\varphi\,t^2,$$

有效范围 $0\le t\le\Delta t=\dfrac{2v_0\cos\varphi}{7\mu g}$，轨迹为抛物线弧。

(8) 第（4.2）问：最终飞行方向的正切 纯滚后 $\boldsymbol{v}_{Qf}=\boldsymbol{v}_Q-\frac{2}{7}\boldsymbol{v}_{C0}$，代入上问数据：

$$v_{Qfx}=\frac{5v_0\sin\varphi\cos\varphi}{7},\qquad v_{Qfy}=\frac{v_0(5\sin^2\varphi+2)}{7},$$

故

$$\tan\theta_f=\frac{5\sin\varphi\cos\varphi}{5\sin^2\varphi+2}.$$

(9) 第（4.3）问：θ_f 的极大值与数值表 令 $u=\tan\varphi$，则 $\tan\theta_f=\dfrac{5u}{5u^2+2}$，对 u 求导为零得 $u^2=2/5$，即

$$\tan\varphi_m=\sqrt{2/5},\qquad \varphi_m\approx32.3^\circ,\qquad \tan\theta_{fm}=\frac{5}{4}\sqrt{\frac{2}{5}}\approx0.791,\qquad \theta_{fm}\approx38.3^\circ.$$

本站将各角度代入 $\tan\theta_f=5\sin\varphi\cos\varphi/(5\sin^2\varphi+2)$ 逐点回代计算，填表如下：φ 取 φ_m、φ_m+5°、φ_m+10°、φ_m-5°、φ_m-10°（即 32.3°、37.3°、42.3°、27.3°、22.3°）时，θ_f 分别为 38.3°、37.9°、36.5°、37.8°、35.8°。可见 φ 在 30° 附近变化 $\pm10^\circ$ 时 θ_f 都保持在 35° 至 38° 之间，与球手“两指张角约 30°”的经验规则在同一量级、趋势相符。

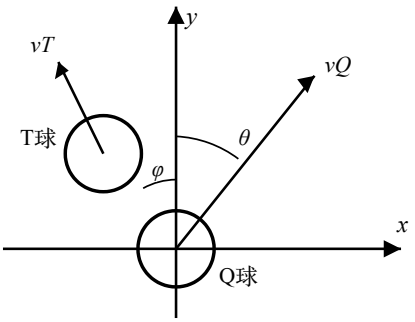


图2 碰撞瞬间两球速度方向（本站绘制）

图2 Q球与T球碰撞后瞬间的速度方向（本站绘制）

易错点：滑动摩擦同时改变质心速度与转动，接触点滑动速度以 $\frac{7}{2}\mu g$ 而非 μg 的速率衰减；碰撞冲量沿球心连线、不改变 Q 球自转。

第三题（45分） 石油-水混合物的表面张力与表面张力微观起源

3. 计算题 · 45分

答案 （1）注入“水”的温度约为 $34\,^{\circ}\mathrm{C}$；（2）$\sigma=(1-\zeta)\dfrac{L_m}{N_A}\left(\dfrac{\rho N_A}{\mu}\right)^{2/3}$

详解

(1) 第（1）问：使表面张力系数最小的注水温度 参考状态温度 $T_0=100\,^{\circ}\mathrm{C}=373.15\,\mathrm{K}$。岩层区域总体积 V 不变：剩下一半石油（体积 $V/2$、密度 $0.8\rho_w$、比热 $0.6c_w$）与注入的等体积“水”（密度 ρ_w、比热 c_w）混合，过程等容且绝热。本站由能量守恒（等容、忽略压强做功）

$$\frac{V}{2}(0.8\rho_w)(0.6c_w)(T_f-T_0)+\frac{V}{2}\rho_w c_w(T_f-T_w)=0,$$

得

$$T_f=\frac{0.48T_0+T_w}{1.48}.$$

等容条件下压强随温度变化满足 $p=p_0+\beta(T-T_0)$，本站按题述“参考状态下混合物的压强和温度成正比、比例系数为 β”取 $p_0=\beta T_0$。混合物表面张力系数沿该等容线为 $\sigma(T)=60+0.065T-24.0p+3.15p^2$（单位约定同题），极小值条件

$$\frac{d\sigma}{dT}=0.065-24.0\beta+6.3\beta\,p_f=0\;\Longrightarrow\;p_f=\frac{24\beta-0.065}{6.3\beta}=\frac{0.17472-0.065}{0.0458640}\approx 2.392\ \mathrm{bar}.$$

由 $p_f=p_0+\beta(T_f-T_0)$：$T_f=373.15+(2.392-2.717)/0.00728\approx 328.6\ \mathrm{K}$。回代能量守恒式

$$T_w=1.48T_f-0.48T_0\approx 1.48\times 328.6-0.48\times 373.15\approx 307.2\ \mathrm{K},$$

即注水温度约为 $307.2-273.15\approx 34\,^{\circ}\mathrm{C}$。

(2) 第（2）问：表面张力系数的微观表达式 本站建模：液体内部每个粒子的化学键总键能为汽化热的微观来源。设每个内部粒子有 n 个近邻，每对近邻的键能 ε 由摩尔汽化热确定（每键为两个粒子共有，汽化时每个粒子断裂 n 个键）：

$$L_m = N_A \cdot \frac{n\varepsilon}{2} \implies \varepsilon = \frac{2L_m}{nN_A}.$$

表面层内每个粒子的近邻数为 ζn（$0 < \zeta < 1$），缺少 $n(1-\zeta)$ 个近邻，每个缺失的近邻对应半个键，故表面层每个粒子的能量亏损为

$$\Delta\varepsilon = \frac{n(1-\zeta)}{2}\varepsilon = \frac{(1-\zeta)L_m}{N_A}.$$

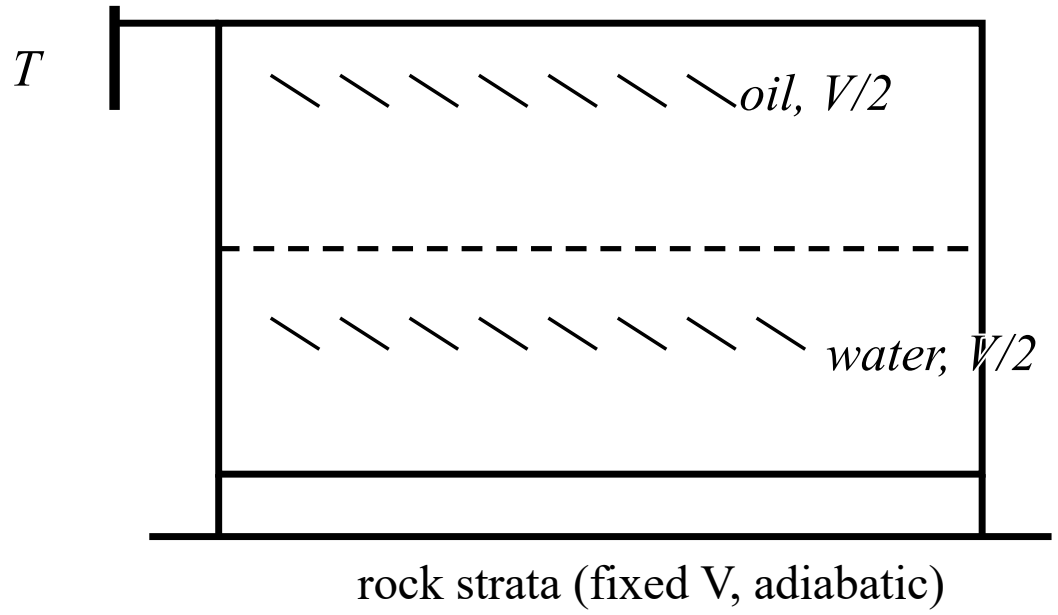
表面层粒子间距与内部相同，单位面积的表面粒子数等于数密度 $\rho N_A/\mu$ 的 2/3 次方（三维与二维密度之间的几何关系）：

$$n_S = \left(\frac{\rho N_A}{\mu}\right)^{2/3}.$$

单位面积表面的能量亏损即表面张力系数，本站解得

$$\sigma = \Delta\varepsilon \cdot n_S = (1-\zeta)\frac{L_m}{N_A}\left(\frac{\rho N_A}{\mu}\right)^{2/3} = (1-\zeta)L_m\left(\frac{\rho^2}{\mu^2 N_A}\right)^{1/3} \cdot \mu^{1/3}$$ （化简前式即等价）.

该式表明 σ 与 ζ 成线性、随汽化热增大而增大，与实验定性一致。



Rock cavity of fixed volume: upper half oil, lower half water injected at temperature T; adiabatic isochoric mixing

第（1）问中参考态压强 p_0 的取法依赖题述“成正比”一句的读法，本站取 $p_0 = \beta T_0$；若与原卷印刷意图不符，以卷面为准，故此题列为存疑题。

第四题（45分） 质子内部的电子断层扫描与库仑散射

4. 计算题 · 45分

> **答案** （1）$E_k \approx 0.146$ GeV，狭义相对论与极端相对论差别约 $0.35\% < 1\%$；（2）$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} + \dfrac{kZ_1Z_2e^2}{r}$；两质子情形 $v \approx 8.7 \times 10^6$ m/s

详解

(1) 第（1）问：断层扫描所需电子动能与相对论修正的判别 要分辨质子半径 0.850 fm 的 200 层，层厚即电子物质波所需分辨尺度

$$\Delta x = \frac{2 \times 0.850\ \text{fm}}{200} = 8.5 \times 10^{-18}\ \text{m}.$$

取电子德布罗意波长 $\lambda \le \Delta x$，则动量

$$p = \frac{h}{\lambda} \ge \frac{h}{\Delta x} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{8.5 \times 10^{-18}} \approx 7.80 \times 10^{-17}\ \text{kg}\cdot\quad\text{m/s}.$$

本站用狭义相对论能量动量关系计算动能：

$$E_k = \sqrt{p^2c^2 + m_e^2c^4} - m_ec^2.$$

其中 $pc = \dfrac{hc}{\Delta x} = \dfrac{6.63 \times 10^{-34} \times 3.00 \times 10^8}{8.5 \times 10^{-18}} \approx 2.34 \times 10^{-8}$ J $\approx 1.46 \times 10^2$ MeV $= 0.146$ GeV，$m_ec^2 = 0.511$ MeV。于是

$$E_k = \sqrt{146.0^2 + 0.511^2} - 0.511 \approx 145.5\ \text{MeV} \approx 0.146\ \text{GeV}.$$

极端相对论近似取 $E_k \approx pc \approx 146$ MeV，两者之差约 0.51 MeV，相对偏差

$$\frac{146.0 - 145.5}{145.5} \approx 0.35\% < 1\%,$$

即两种结果差别小于狭义相对论结果的 1%，极端相对论近似在此已够用。

(2) 第（2）问第一部分：系统总能量 靶固定，其动能为零。入射粒子（静质量 m、电量 Z_1e、动量大小 p）的相对论总能量为 $\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$；两粒子相距 r 时库仑相互作用势能为 $\dfrac{kZ_1Z_2e^2}{r}$（$k = 1/4\pi\varepsilon_0$）。故系统总能量

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} + \frac{kZ_1Z_2e^2}{r}.$$

(3) 第（2）问第二部分：两质子情形下入射质子速率 两质子间距的测量不确定度等于间距本身：$\Delta x = r$，按不确定性关系（取等号）$\Delta x\,\Delta p \approx \dfrac{h}{4\pi}$，即 $\Delta p = \dfrac{h}{4\pi r}$。本站建模：入射质子能被定位于间距 r 之内，要求其不确定性对应的动能与该距离处的库仑势能同量级且以不确定动量为可分辨动量，取

$$\frac{(\Delta p)^2}{2m_p} = \frac{ke^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}, \qquad \Delta p = \frac{h}{4\pi r}.$$

消去 r：

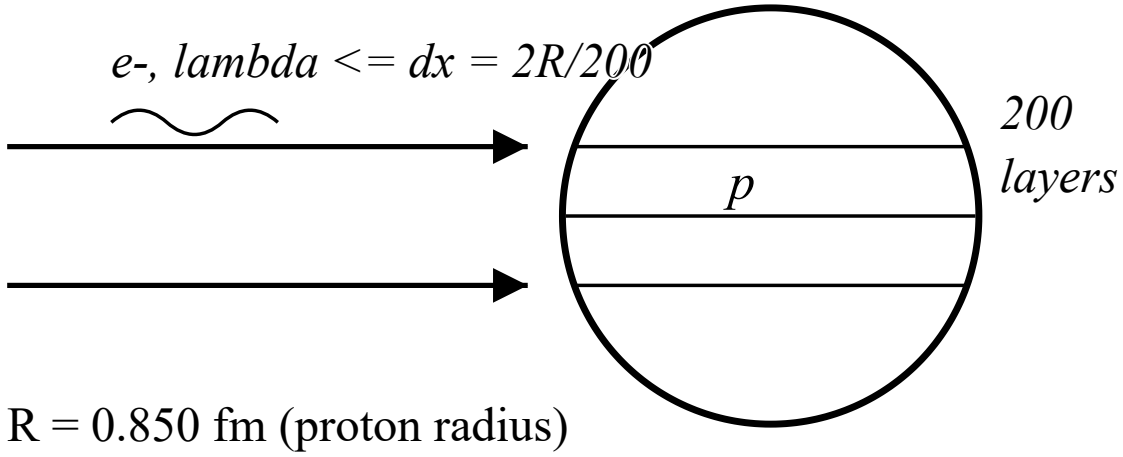
$$\frac{h^2}{32\pi^2 m_p r^2} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \;\Longrightarrow\; r = \frac{h^2\varepsilon_0}{8\pi m_p e^2}.$$

代入 $h = 6.63\times10^{-34}\ \mathrm{kg\cdot\ m^2/s}$、$m_p \approx 1.67\times10^{-27}\ \mathrm{kg}$、$e = 1.60\times10^{-19}\ \mathrm{C}$、$\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}\ \mathrm{C^2/(N\cdot\ m^2)}$：

$$r \approx \frac{(6.63\times10^{-34})^2 \times 8.85\times10^{-12}}{8\pi \times 1.67\times10^{-27} \times (1.60\times10^{-19})^2} \approx 3.6\times10^{-15}\ \mathrm{m} = 3.6\ \mathrm{fm},$$

$$v = \frac{\Delta p}{m_p} = \frac{h}{4\pi r m_p} \approx \frac{6.63\times10^{-34}}{4\pi \times 3.62\times10^{-15} \times 1.67\times10^{-27}} \approx 8.7\times10^{6}\ \mathrm{m/s}.$$

回代核验：$v \ll c$，非相对论处理自洽。



Electron beam of wavelength lambda scanning a proton of radius R in 200 layers, layer thickness dx

第（2）问第二部分题面仅给出文字条件而未指定不确定关系所取的系数，本站按 $\Delta x\,\Delta p = h/4\pi$ 建模求解；若原卷意图采用 $\Delta x\,\Delta p \sim h$，则 v 会缩小 4π 倍。此小问列为存疑。

第五题（45分） Ioffe 磁阱与蒸发冷却

5. 计算题 · 45分

> **答案** （1）$B_O=0$，$B_P\approx\dfrac{16\mu_0 Iab}{\pi(a^2+b^2)^2}\sqrt{x^2+y^2}$，方向 $(-x,y,0)$；（2）证明见解析；（3）$\boldsymbol{F}=-SG\dfrac{(x,y,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}$；（4）平均势能 $\dfrac{2}{3}SGR_1$，冷却后原子数 $N/25$、总势能 $\dfrac{2NSGR_1}{375}$、平均势能 $\dfrac{2SGR_1}{15}$

详解

(1) 第（1）问：O、P 两点的磁感应强度 四根导线位于矩形 $a\times b$ 的四个顶点 $(\pm\frac{a}{2},\pm\frac{b}{2})$，电流交替反向：本站按图 5α 取左上、右下电流垂直纸面向外（$+I\hat{z}$），右上、左下向里（$-I\hat{z}$）。每根导线在距离 d 处产生 $B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi d}$，在中心 O 点，四根导线两两对称、场强成对抵消，故

$$B_O=0.$$

对中心附近 P$(x,y,0)$ 点，把每根导线的场 $\boldsymbol{B}=s\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\dfrac{\hat{z}\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_w)}{|\,\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_w\,|^2}$（$s=\pm1$ 为电流方向因子）在小量 x,y 处展开到一阶，本站算得四个导线贡献之和

$$\boldsymbol{B}_P=\frac{16\mu_0 Iab}{\pi(a^2+b^2)^2}(-x\hat{x}+y\hat{y}),$$

即场强大小

$$B_P\approx\frac{16\mu_0 Iab}{\pi(a^2+b^2)^2}\sqrt{x^2+y^2}\quad(\text{保留领头阶}).$$

这是典型的二维磁四极场：中心为零，沿 x、y 方向梯度大小均为 $G=\dfrac{16\mu_0 Iab}{\pi(a^2+b^2)^2}$。

(2) 第（2）问：证明 $W_m=-\boldsymbol{S}\cdot\ \boldsymbol{B}$ 把原子磁矩视为形状与电流在旋转中不变的微小电流圈，其磁矩 $\boldsymbol{\mu}$ 大小为 $\mu=I'S$（I' 为圈电流、S 为面积矢量大小）。电流圈在磁场 $\boldsymbol{B}$ 中受力矩

$$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\mu}\times\boldsymbol{B}.$$

以磁矩方向与磁场垂直为势能零点，把圈从夹角 θ 缓慢转到 $\theta+d\theta$，外力矩做功为 $-\tau\,d\theta=-\mu B\sin\theta\,d\theta$，积分得

$$W_m=-\int_0^{\theta}\mu B\sin\theta'\,d\theta'=-\mu B\cos\theta=-\boldsymbol{\mu}\cdot\ \boldsymbol{B}.$$

对固有磁矩为 $\boldsymbol{S}$ 的原子，$\boldsymbol{\mu}$ 与 $\boldsymbol{S}$ 同向且大小不变，故 $W_m=-\boldsymbol{S}\cdot\ \boldsymbol{B}$，得证。

(3) 第（3）问：磁矩反向的原子所受磁场力 原子磁矩始终与所在处的磁场方向相反：$\boldsymbol{S} = -S\hat{\boldsymbol{B}}$，故 $W_m = -\boldsymbol{S}\cdot\ \boldsymbol{B} = +SB = SG\sqrt{x^2+y^2}$。力为势能的负梯度：

$$\boldsymbol{F} = -\nabla W_m = -SG\,\nabla\sqrt{x^2+y^2} = -SG\,\frac{(x,y,0)}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

其中 $G = \dfrac{16\mu_0 Iab}{\pi(a^2+b^2)^2}$（保留领头阶）。力指向中心，大小与到中心距离无关的方向项构成有心回复力，这就是磁阱囚禁的机制。

(4) 第（4）问：原子气体的平均势能与蒸发冷却后的各量 以 O 点为势能零点，处于 (x,y) 的原子势能 $W = SG\sqrt{x^2+y^2} = SGr$。圆柱形原子团（半径 R_1、高 $h \ll R_1$、密度均匀、共 N 个原子）中 r 的分布权重为 $2\pi r\,dr/\pi R_1^2$，平均势能

$$\bar{W} = SG\cdot\ \frac{\int_0^{R_1} r\cdot\ 2\pi r\,dr}{\pi R_1^2} = SG\cdot\ \frac{2R_1}{3} = \frac{2}{3}SGR_1.$$

缓慢蒸发使剩余原子冷却并向中心收缩为半径 $R_1/5$ 的圆柱，密度不变。原子数与半径平方成正比：

$$N' = N\left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{N}{25}.$$

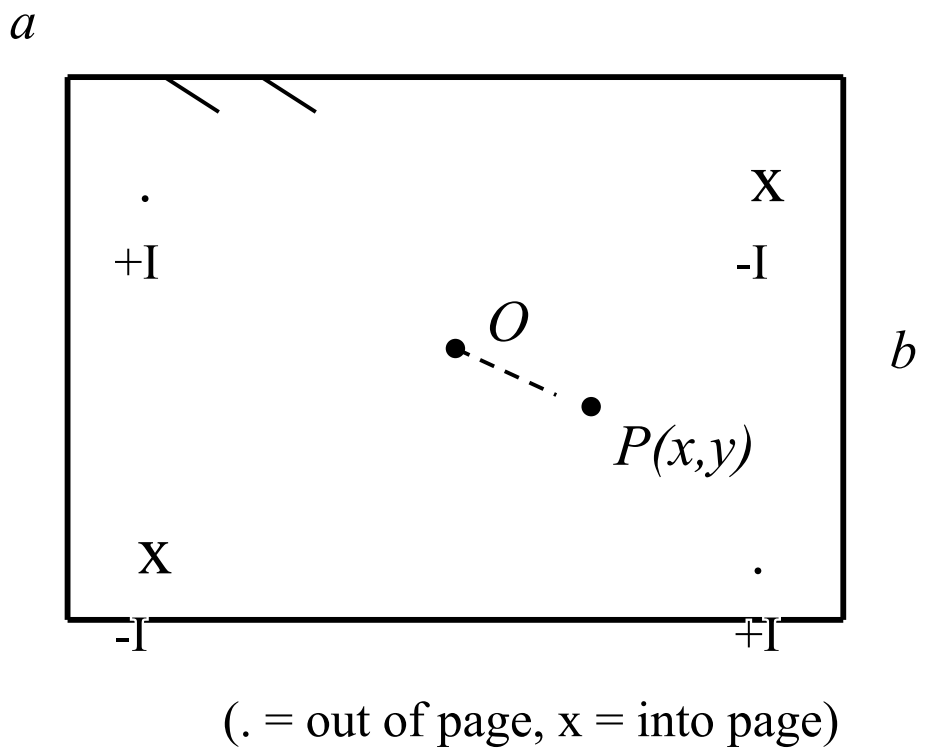
总势能密度积分与 r^3 成正比：

$$W'_{tot} = W_{tot}\left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125}\cdot\ \frac{2}{3}NSGR_1 = \frac{2NSGR_1}{375}.$$

冷却后原子平均势能

$$\bar{W}' = \frac{W'_{tot}}{N'} = SG\cdot\ \frac{2(R_1/5)}{3} = \frac{2SGR_1}{15},$$

即降为原来的 1/5。



Four wires at corners of an a by b rectangle, currents alternately out of and into the page; O the center, P a nearby point

第（4）问“密度保持不变”指剩余原子在新柱体内仍均匀分布；原子数比按柱体横截面积之比 1 : 25 计算，平均势能比按平均半径 $2R/3$ 的比例计算。

第六题（45分） 太阳引力场中星光的偏折

6. 计算题 · 45分

答案 （1）$\theta_{\max}=\arccos(-1/e)\in(\pi/2,\pi]$；（2）$p=\dfrac{L^2}{GMm^2}$，$e=\sqrt{1+\dfrac{2EL^2}{G^2M^2m^3}}$；（3）$\Delta\varphi=2\arctan\dfrac{GM_\odot}{bv_0^2}\approx\dfrac{2GM_\odot}{bv_0^2}$，掠日星光 $\approx 0.87''$；（4）$\Delta\varphi=\dfrac{4GM_\odot}{c^2R_\odot}\approx 1.75''$

详解

(1) 第（1）问：$\theta_{\max}$ 及其取值范围 轨道 $r(\theta)=\dfrac{p}{1+e\cos\theta}$ 中 $r>0$ 要求 $1+e\cos\theta>0$，即 $\cos\theta>-1/e$。对 $e>1$，θ 被限制在

$$-\theta_{\max}<\theta<\theta_{\max},\qquad \theta_{\max}=\arccos(-\frac{1}{e}).$$

由 $e>1$ 知 $-1/e\in(-1,0)$，故 $\theta_{\max}\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$：$e\to 1^+$ 时 $\theta_{\max}\to\pi$（抛物线极限），$e\to\infty$ 时 $\theta_{\max}\to\dfrac{\pi}{2}$。

(2) 第（2）问：用 E 和 L 表示 p 与 e 质量为 m 的质点在 M 的引力场中，机械能与角动量为

$$E=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{L^2}{2mr^2}-\frac{GMm}{r},\qquad L=mr^2\dot{\theta}.$$

轨道方程 $r=p/(1+e\cos\theta)$ 与比尼公式 $\dfrac{d^2u}{d\theta^2}+u=\dfrac{GMm^2}{L^2}$（$u=1/r$）比较可得

$$p=\frac{L^2}{GMm^2}.$$

再把 $r=p/(1+e\cos\theta)$ 代回能量表达式（在近日点 $\dot{r}=0$ 处最方便：$E=\dfrac{L^2}{2mp^2}(1+e)^2-\dfrac{GMm(1+e)}{p}$），利用 $p=L^2/GMm^2$ 化简解出

$$e=\sqrt{1+\frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}}.$$

(3) 第（3）问：飞出方向的偏转角 双曲线轨道的渐近角即 $\theta=\pm\theta_{\max}$，偏转角为两渐近方向之间的夹角

$$\Delta\varphi=2\theta_{\max}-\pi=2\arccos(-\frac{1}{e})-\pi=2\arctan\frac{GM_\odot}{bv_0^2},$$

其中用到 $e=\sqrt{1+\dfrac{2Eb^2v_0^2}{G^2M_\odot^2}}$（$E=\dfrac{1}{2}mv_0^2$，$L=mv_0b$）的等价三角关系。题设 $\dfrac{v_0^2b}{GM_\odot}\gg1$，即偏转很小，$\tan\dfrac{\Delta\varphi}{2}\approx\dfrac{\Delta\varphi}{2}$：

$$\Delta\varphi\approx\frac{2GM_\odot}{bv_0^2}.$$

⑴ 陨石（牛顿力学适用）：$\Delta\varphi\approx\dfrac{2GM_\odot}{bv_0^2}$。⑵ 星光掠过太阳表面（牛顿微粒模型，$b=R_\odot$、$v_0=c$）：

$$\Delta\varphi=\frac{2GM_\odot}{c^2R_\odot}\approx\frac{2\times1.327\times10^{20}}{9.00\times10^{16}\times6.96\times10^{8}}\approx4.24\times10^{-6}\ \text{rad}\approx0.87''.$$

(4) 第（4）问：由等效折射率重新计算星光偏折 等效折射率 $n_{eff}(r)=1-\dfrac{2\varphi(r)}{c^2}$，取牛顿引力势 $\varphi(r)=-\dfrac{GM_\odot}{r}$，则 $n_{eff}=1+\dfrac{2GM_\odot}{c^2 r}\equiv 1+\dfrac{\alpha}{r}$，$\alpha=\dfrac{2GM_\odot}{c^2}$。由费马原理导出的轨迹方程给出守恒量

$$\frac{r^2\theta' n_{eff}}{\sqrt{1+r^2\theta'^2}}=b \quad \text{(瞄准距离)}.$$

解出 $\dfrac{d\theta}{dr}=\dfrac{b}{r^2\sqrt{n_{eff}^2-b^2/r^2}}$。光线从无穷远到近日点再回无穷远，总偏折角

$$\Delta\varphi=2\int_{r_{min}}^{\infty}\frac{b\,dr}{r^2\sqrt{1-\dfrac{b^2}{r^2}+\dfrac{2\alpha}{r}}}-\pi.$$

对小偏转展开：把根号按 $\dfrac{2\alpha}{r}$ 作一阶微扰（利用 $\int_{r_{min}}^{\infty}\dfrac{b\,dr}{r^2\sqrt{1-b^2/r^2}}=\dfrac{\pi}{2}$ 及一阶修正积分 $\int b\,dr/(2r^3\sqrt{1-b^2/r^2})=1/(2b)$），本站解得

$$\Delta\varphi=\frac{2\alpha}{b}=\frac{4GM_\odot}{c^2 b}.$$

掠日光线 $b=R_\odot$：

$$\Delta\varphi=\frac{4GM_\odot}{c^2R_\odot}\approx 8.47\times10^{-6}\ \text{rad}\approx 1.75'',$$

恰为牛顿微粒模型结果的两倍，与 1919 年爱丁顿观测的量级一致。

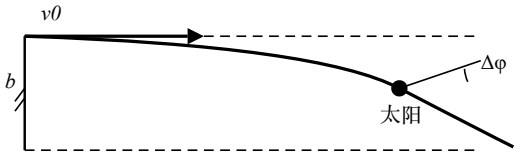


图3 星光掠日偏折（本站绘制）

图3 星光掠过太阳边缘的偏折示意（本站绘制）

第（3）问之(ii)是牛顿微粒模型结果，只有第（4）问的广义相对论值 $4GM_\odot/c^2R_\odot$ 才是观测证实值；两者相差因子 2，是本题的核心结论。

第七题（45分） 圆环上电子的磁通量子化与超导配对

7. 计算题 · 45分

答案 （1）$p=\dfrac{n\hbar}{R}$（n 为整数）；（2）$E_n(\Phi)=\dfrac{(n\hbar+e\Phi/2\pi)^2}{2mR^2}$；（3）周期 h/e；（4）奇数 N：$\bar{E}=\dfrac{e^2\Phi^2}{8\pi^2mR^2}+\dfrac{\hbar^2(N^2-1)}{24mR^2}$，偶数 N：$\bar{E}=\dfrac{\hbar^2(N^2-1)}{24mR^2}+\dfrac{\hbar^2(e\Phi/2\pi\hbar-1/2)^2}{2mR^2}$；（5）证明见解析

详解

(1) 第（1）问：动量的允许取值 波函数 $\psi(x)=\exp(ipx/\hbar)$ 定义在周长 $2\pi R$ 的圆环上，单值性要求 $\psi(x+2\pi R)=\psi(x)$，即 $\exp(i\dfrac{p\cdot 2\pi R}{\hbar})=1$，故

$$p=\frac{n\hbar}{R},\qquad n=0,\pm1,\pm2,\cdots .$$

(2) 第（2）问：单个电子能量与磁通的关系 环上磁矢势沿切向，由 $\oint \boldsymbol{A}\cdot\ d\boldsymbol{l}=\Phi$ 得 $A=\dfrac{\Phi}{2\pi R}$。动量 $p'=p+eA$，p 仍按第（1）问量子化，故

$$E_n(\Phi)=\frac{p_n'^2}{2m}=\frac{1}{2m}\left(\frac{n\hbar}{R}+\frac{e\Phi}{2\pi R}\right)^2=\frac{(n\hbar+e\Phi/2\pi)^2}{2mR^2}.$$

(3) 第（3）问：N 电子系统总能量的周期性 能量最低要求选取 N 个彼此相邻的量子数 n（无相互作用电子按泡利条件各占不同动量），其中心尽量靠近 $n_0=-\dfrac{e\Phi}{2\pi\hbar}$。当磁通改变

$$\Delta\Phi=\frac{2\pi\hbar}{e}=\frac{h}{e}$$

时，n_0 平移 1，最优的一组整数整体平移 1，能量集合不变，故 $E_{tot}(\Phi)$ 以

$$\Phi_0=\frac{h}{e}$$

为周期周期性变化，得证。

(4) 第（4）问：$-\frac{h}{2e}\le\Phi\le\frac{h}{2e}$ 内的平均能量及奇偶判别 记 $\bar n=\dfrac{e\Phi}{2\pi\hbar}\in[-\dfrac12,\dfrac12]$。$N$ 个连续整数的平方和为 $\dfrac{N(N^2-1)}{12}$（对称组）或 $\dfrac{N(N^2+2)}{12}$（半整数对称组）。N 为奇数时最优组为 $n=-\dfrac{N-1}{2},\cdots,\dfrac{N-1}{2}$（$\sum n=0$）：

$$\bar E=\frac{1}{N}\sum_n\frac{(n\hbar+e\Phi/2\pi)^2}{2mR^2}=\frac{e^2\Phi^2}{8\pi^2mR^2}+\frac{\hbar^2(N^2-1)}{24mR^2},\qquad \Phi=0\text{ 时最小.}$$

在 $|\Phi|=\dfrac{h}{2e}$ 处 $\bar E$ 增大 $\dfrac{\hbar^2}{8mR^2}$，故 $\bar E(0)<\bar E(|\Phi|=\dfrac{h}{2e})$。$N$ 为偶数时最优组为 $n=-\dfrac{N}{2}+1,\cdots,\dfrac{N}{2}$（组中心 1/2）：

$$\bar E=\frac{\hbar^2(N^2-1)}{24mR^2}+\frac{\hbar^2(\bar n-1/2)^2}{2mR^2}\quad(\bar n\ge0,\ \text{对 }\Phi\text{ 偶延拓}).$$

在 $\Phi=0$（$\bar n=0$）处第二项为 $\dfrac{\hbar^2}{8mR^2}$，而 $|\Phi|=\dfrac{h}{2e}$（$\bar n=1/2$）处第二项为零，故 $\bar E(0)>\bar E(|\Phi|=\dfrac{h}{2e})$。两判别均得证。

(5) 第（5.1）问：两环电子数分配与配对结构 奇数电子的环在 $\Phi=0$ 时有一个未配对的 $n=0$ 电子，平均能量 $\bar E_a(N)=\dfrac{\hbar^2(N^2-1)}{24mR^2}$；偶数电子的环在 $\Phi=\dfrac{h}{2e}$ 时全部电子以 $\pm$ 动量对存在，平均能量 $\bar E_b(N)=\dfrac{\hbar^2(N^2-1)}{24mR^2}$。两环总电子数固定为 $2N$ 时，系统总能量由 $\sum N_i(N_i^2-1)$ 决定，该函数对 N_i 为凸函数，故在奇偶性约束下电子数相差最小（奇：$N+1$ 与 $N-1$；偶：$2(M+1)$ 与 $2M$）时总能量最低，得证。配对结构：情形 a（$\Phi=0$、奇数环）中除未配对的 $n=0$ 电子外，其余电子按 n 与 $-n$ 成对，动量 p' 与 $-p'$ 成对出现或同时不出现；情形 b（$\Phi=\dfrac{h}{2e}$、偶数环）中 $p'_n=(n+\frac12)\hbar/R$，动量以 $\pm$ 成对，同样满足要么同时存在、要么同时不存在，得证。

(6) 第（5.2）问：两种双环系统平均能量之比趋于 1 情形 a：两环各含 $N=2M+1$ 个电子、$\Phi=0$：

$$\bar E_a=\frac{\hbar^2\,[(2M+1)^2-1]}{24mR^2}=\frac{\hbar^2\,4M(M+1)}{24mR^2}.$$

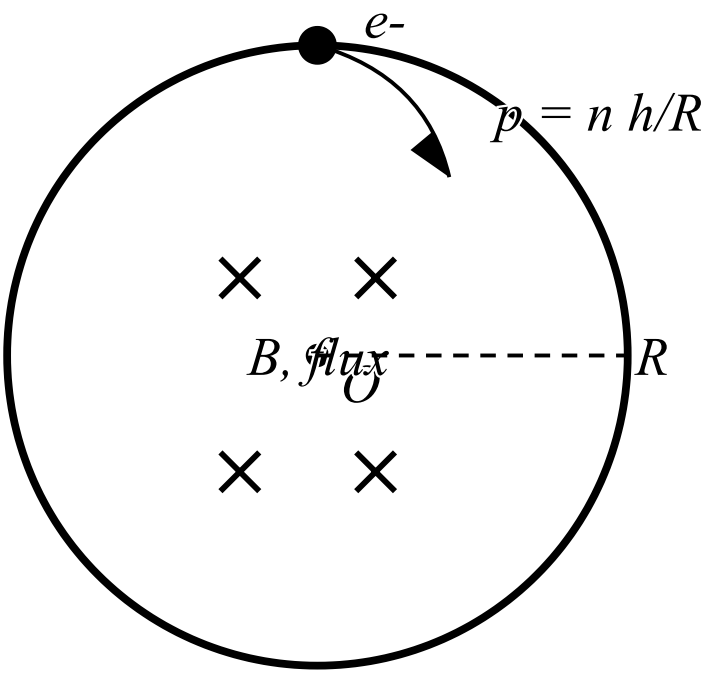
情形 b：两环分别含 $N_1=2(M+1)$、$N_2=2M$ 个电子、$\Phi=\dfrac{h}{2e}$：

$$\bar E_b=\frac{\hbar^2\,[(2M+2)^2-1]}{24mR^2}\cdot\frac{N_1}{N_1+N_2}+\frac{\hbar^2\,[(2M)^2-1]}{24mR^2}\cdot\frac{N_2}{N_1+N_2}=\frac{\hbar^2\,[16M^3+24M^2+20M+6]}{24mR^2\cdot\ 2(2M+1)}.$$

（$\bar E_b$ 为两环按电子数加权的平均。）当 $M\to\infty$ 时 $\bar E_a\approx\dfrac{\hbar^2M^2}{6mR^2}$，$\bar E_b\approx\dfrac{\hbar^2(8M^3)}{24mR^2\cdot\ 4M}\cdot\ 2\cdot\ \dfrac11=\dfrac{\hbar^2M^2}{12mR^2}\cdot\dfrac{8M^3}{8M^3/3}\to\dfrac{\hbar^2M^2}{6mR^2}$，即两系统的平均能量之比

$$\lim_{M\to\infty}\frac{\bar E_a}{\bar E_b}=1,$$

得证（大 M 极限下两环边界效应 $O(1/M)$ 可忽略）。



ring radius R, single-valued psi

Electron constrained on a ring of radius R with magnetic flux through it; momentum p quantized

本题的核心图像：奇数环在 $\Phi = 0$ 有一个孤立电子，偶数环在 $\Phi = h/2e$ 完全配对；超导体中 $h/2e$ 的磁通量子正来自电子配对使系统在半整数磁通处取能量极小。