第 41 届全国中学生物理竞赛决赛理论考试试题

物 理

2024 年 10 月 26 日 9:00-12:00 ｜ 共 6 题 ｜ 满分 320 分

考生须知

1. 考生考试前务必认真阅读本须知。☐
2. 本试题共 5 页，总分为 320 分。☐
3. 需要阅卷老师评阅的内容一定要写在答题纸相应题号后面的空白处；写在试题纸和草稿纸上的解答不能给分。

一、（50 分）

1．实验研究发现，某些原子核会释放出一个电子而转变为另一种原子核，释放出的电子的动能呈连续谱分布，这种现象被称为原子核的 β^- 衰变。例如原子核 $^{210}_{83}\mathrm{Bi}$ 发生 β^- 衰变释放出的电子的动能分布谱（在 $^{210}_{83}\mathrm{Bi}$ 静止的参考系中测得）如图1a 所示。已知电子的静止质量 $m_\mathrm{e} = 0.511\ \mathrm{MeV}/c^2$ 。忽略电子在原子中的结合能。☐

（1）记发生 β^- 衰变的母原子的静止质量、发生 β^- 衰变后的子原子的静止质量分别为 $M_\mathrm{P}(Z, A)$ 、$M_\mathrm{D}(Z+1, A)$ ，其中 Z 、 A 分别是母原子的原子序数、核子数。由于将原子的电子都电离掉而研究原子核的 β^- 衰变非常困难，因此通常在原子层次上考察原子核的 β^- 衰变。试给出原子发生 β^- 衰变的条件。☐

（2）已知 $^{210}_{83}\mathrm{Bi}$ 的原子质量为 $M_\mathrm{P} = 209.984130$ amu （其中 amu 为原子质量单位，1 amu $= 931.494\ \mathrm{MeV}/c^2$ ），在 β^- 衰变后生成的原子质量为 $M_\mathrm{D} = 209.982883$ amu 。假如在 β^- 衰变过程中除去释放出 β^- 电子之外没有生成另外的新粒子，那么 β^- 电子的动能（以 MeV 为单位）是多大？设 $^{210}_{83}\mathrm{Bi}$ 原子在初始时是静止的。☐

（3）第（2）问得到的 β^- 电子的动能是完全确定的，这显然不符合实验观察到的连续谱的结果；所以在 β^- 衰变的过程中必然有其他粒子生成。若只生成了一个其他粒子，试根据图1a 所示的实验结果估算该粒子的静止质量的范围。☐

（4）研究表明，原子核发生 β^- 衰变的元过程是其中的一个中子n 转变成了一个电子 e^- 、一个质子 p 和一个其他粒子X。已知中子、电子和质子自身都具有固有的角动量，称为粒子的自旋；进一步的研究表明，中子、电子和质子的自旋的取值都是量子化的，它们各自在任意给定方向上的投影的大小都为 $\frac{1}{2}\hbar$ （$\hbar = \frac{h}{2\pi}$ ， h 是普朗克常量）。设微观粒子1 的角动量为 $\boldsymbol{L}_1$ （它在任意给定方向上的最大投影为 $l_1\hbar$ ）、微观粒子2 的角动量为 $\boldsymbol{L}_2$ （它在任意给定方向上的最大投影为 $l_2\hbar$ ），这两个粒子的总角动量 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2$ 在任意给定方向上的最大投影的可能值为 $(l_1 + l_2)\hbar$ 、$(l_1 + l_2 - 1)\hbar$ 、…、$|l_1 - l_2|\hbar$ 。求粒子X 的带电量和自旋。

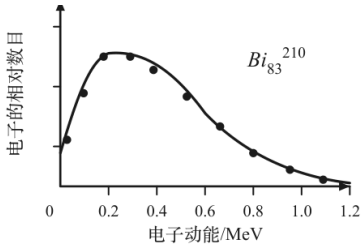


图 1a

第 1 题图（图1a）

二、（50 分）

2．晶格的热振动问题常可简化成耦合的弹簧振子问题。考虑一个一维耦合弹簧振子系统模型。设有 N（$N \gg 1$）个质量为 M 的大珠子，编号为1、3、5、···、$2N-1$；N 个质量为 m 的小珠子，编号为2、4、6、···、$2N$。这 $2N$ 个珠子按编号从小到大的次序套在一个光滑、水平、闭合、刚性的固定大圆环上。所有编号相邻的珠子之间（包括1 号和 $2N$ 号）都由相同的、劲度系数为 k 的轻弹簧相连，并达到静力平衡状态。☐

现研究上述一维耦合弹簧振子系统S 在平衡状态附近的微振动。由于圆环半径远大于相邻珠子的间距，可近似认为每个珠子是各自在相应的直线上振动的质点。☐

（1）试写出第 i（$i = 1, 2, \cdots, 2N$）个珠子满足的运动方程，设其偏离平衡位置的位移为 x_i，x_i 的正方向均与环的逆时针方向一致。☐

（2）S 有各种振动形式。其中有一类特别的振动模式，在此振动模式中所有珠子都以相同的频率作稳定的微振动。这称为S 的本征模式，其频率称为本征频率。试求出S 的所有可能的本征频率 ω。提示：可尝试用波（行波）的形式（相邻珠子振动的相位差为 α）求解。☐

（3）对于频率为 ω 的本征模式，设所有大珠子的振幅都为 A，小珠子的振幅都为 B。求☐

（3.1）A 和 B 之间的关系；☐

（3.2）所有珠子在一个振荡周期内的平均动能 $\langle E_k \rangle$ 和S 的总能量 E，结果中均不能出现 B。（设静力平衡状态的能量为0。）☐

（4）假设1 号珠子被锁定不动，但其余所有珠子仍可无摩擦滑动。试求出这种情况下S 的所有微振动的本征频率 ω；并对频率为 ω 的本征模式，导出其 $x_i = x_i(t)$（$i = 1, 2, \cdots, 2N$）的表达式（结果中均不能出现 B）。☐

（5）如1 号珠子的锁定被解除，且其质量变为 μ。即使在这种情况下，该系统也有一些本征频率 ω 完全不依赖于 μ。试求出这种情况下S 的所有不依赖于 μ 的微振动的本征频率 ω；对于频率为 ω 的本征模式，试导出 $x_i = x_i(t)$（$i = 1, 2, \cdots, 2N$）的表达式（结果中均不能出现 B）。

三、（50 分）

3．本题中的一些物理量用复数表示。例如，电场强度的某分量随传播距离 l 和时间 t 变化的关系式的复数表示为 $\tilde{E}(t) = E_0 e^{i(kl - \omega t + \phi_0)}$，其中 ω 和 k 分别为角频率和波矢的大小，ϕ_0 为初相位；$\tilde{E}$ 是复数，而相应 E 是 $\tilde{E}$ 的模 $|\tilde{E}|$，余类推。

第一部分：光学器件的矩阵表示。

4．（1.1）马赫-曾德尔（Mach-Zenhder，简称MZ）干涉仪示意图如图3a 所示。入射光经过半透半反分束器，再经过上下两处全反镜（全反射镜），分为上路（射向M1）和下路（射向M2）；再经过第二个相同的半透半反分束器后发生干涉。可调节光路，使第二个分束器下方的探测器探测的光强为零。这时入射光的能量去了哪里？作图并简明描述。

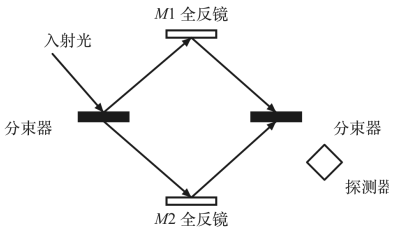


图 3a

第 4 题图（图3a：马赫-曾德尔干涉仪示意图（部分））

5．（1.2）利用图3a 所示的装置可研究分束器的透射系数和反射系数之间的关系。这里分束器是一个 50/50 半透半反（对所有偏振）分光器件，即反射系数 $\tilde{r}$ 和透射系数 $\tilde{t}$ 的大小满足□

$r=|\tilde{r}|=t=|\tilde{t}|=\frac{\sqrt{2}}{2}$ □

反射、透射都会引入相位差，即□

$\tilde{r}=re^{i\delta_r},\quad \tilde{t}=te^{i\delta_t},\quad \frac{\tilde{t}}{\tilde{r}}=e^{i(\delta_t-\delta_r)}=e^{i\phi}$ □

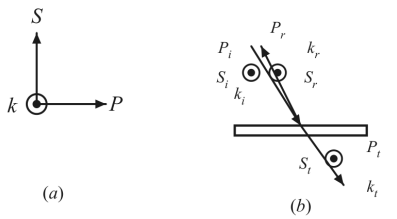
试求 ϕ 为多少？

6．（2）图3b 给出了光的P、S 偏振正方向的定义：在图3b(a)中，$\boldsymbol{k}$ 为光的传播方向，P-S-$\boldsymbol{k}$ 构成右手正交系，P 方向又称为水平方向H，S 方向又称为垂直方向V；图3b(b)画出了分束器涉及的入射、反射和透射光中的P、S、$\boldsymbol{k}$ 方向，以反射为例，$\boldsymbol{k}_r$ 、 P_r 、 S_r 分别代表反射光的传播方向、反射光中P、S 偏振的正方向。经分束器后，反射光的 P_r 、 S_r 偏振分量均可用入射光的 P_i 、 S_i 分量表示□

$\tilde{E}_{r\mathrm{P}}=\tilde{a}\tilde{E}_{i\mathrm{P}}+\tilde{b}\tilde{E}_{i\mathrm{S}},\quad \tilde{E}_{r\mathrm{S}}=\tilde{c}\tilde{E}_{i\mathrm{P}}+\tilde{d}\tilde{E}_{i\mathrm{S}}$ □

它们可由一个矩阵表示（原卷此式为 2×2 矩阵竖排写法，本站公式内核不支持矩阵环境，此处未转录，见下方说明）。□

上式中的2×2矩阵称为分束器的反射矩阵，余类推。已知分束器对P 和S 分量的反射系数分别为 $\tilde{r}_{\mathrm{P}}=r_{\mathrm{P}}e^{i\delta_{r\mathrm{P}}}$ 和 $\tilde{r}_{\mathrm{S}}=r_{\mathrm{S}}e^{i\delta_{r\mathrm{S}}}$ ，试写出分束器的反射矩阵 $\tilde{\boldsymbol{R}}$ 和透射矩阵 $\tilde{\boldsymbol{T}}$ 的具体形式（用本问中给的已知量和常数表示）。



第 6 题图（图3b）

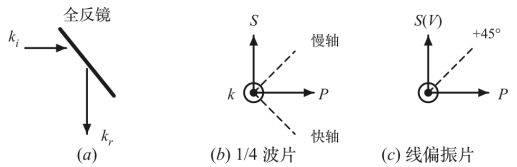
（第 6 题「它们可由一个矩阵表示」一式原卷为 2×2 矩阵竖排写法，本站公式内核不支持矩阵环境，此处未转录，待人工核）

7．（3）图3c(a)为全反镜示意图，试写出它的反射矩阵 $\tilde{M}$ 。

8．（4）对于1/4 波片，偏振沿其快轴的光经过波片后会比偏振沿其慢轴的光的相位领先 $\frac{\pi}{2}$ 。图3c(b)为快轴沿 -45° 方向的1/4 波片的示意图，$\boldsymbol{k}$ 垂直于此波片。写出该波片的矩阵 $\tilde{Q}$ ，并将其表示成标准形式（原卷此式为 2×2 矩阵竖排写法，见下方说明）。

（第 8 题标准形式一式原卷为 2×2 矩阵竖排写法，本站公式内核不支持矩阵环境，此处未转录，待人工核）

9．（5）线偏振片的透光方向沿水平（H）、垂直（V）和 $+45^\circ$ 方向的示意图如图3c(c)所示，分别写出它们的矩阵 $\tilde{L}_{\mathrm{H}}$ 、 $\tilde{L}_{\mathrm{V}}$ 、 $\tilde{L}_{+45^\circ}$ 。



第 7～9 题图（图3c：(a) 全反镜 (b) 1/4 波片(快轴 −45°) (c) 线偏振片）

第二部分：四象限干涉。

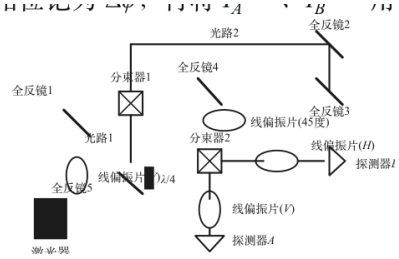
10．干涉仪是通过光强的变化测量相位变化的一种仪器。一般的干涉仪（如迈克尔逊干涉仪）仅测量光强并可据其定出相位 $\Delta\phi$ 的大小，但无法确定其正负，还需要通过观察条纹的吞吐变化才能判断 $\Delta\phi$ 的正负。这在某些应用中并不方便。图3d 给出了四象限干涉仪的示意图，它可以通过仅测量 A、B 处探测器的干涉光强，便可得到 $\Delta\phi$ 的确定值（ $-\pi<\Delta\phi\le\pi$ ）。□

激光经过一个垂直透光方向（垂直于纸面）的线偏振片(V)被全反镜1 反射后射入半透半反分束器1，分成光路1 和光路2。光路1 的光被全反镜5 反射，再经过快轴沿 -45° 的1/4 波片进入半透半反分束器2，再次被分成两路后分别通过线偏振片(V)到达探测器A 和线偏振片(H)到达探测器B。光路2 的光被全反镜2、3 和4 反射后，通过一个透光方向沿 $+45^\circ$ 的线偏振片，再由分束器2 分成两路，分别射向探测器A、B。□

（6）已知激光器发出的激光到达分束器1 前的振幅为 E_0 ， l_1 、 l_2 、 k 分别表示光从分束器1 沿光路1、2 到达分束器2 的光程和激光的真空波矢的大小，分别写出探测器A 的光强和探测器B 的光强中的干涉项 $I_{\mathrm{A}}^{\mathrm{I}}$ 、 $I_{\mathrm{B}}^{\mathrm{I}}$ （干涉项是指光强中因干涉所引起的贡献，即两路光同时存在的光强减去两路光单独存在时的光强）。进而将 $I_{\mathrm{A}}^{\mathrm{I}}$ 的计算结果中的总相位记为 $\Delta\phi$ ，再将 $I_{\mathrm{A}}^{\mathrm{I}}$ 、 $I_{\mathrm{B}}^{\mathrm{I}}$ 用 $\Delta\phi$ 表示出来。□

（7）简述如何通过 $I_{\mathrm{A}}^{\mathrm{I}}$ 、 $I_{\mathrm{B}}^{\mathrm{I}}$ 的数值求得 $\Delta\phi$ 的方法。不计光在传播过程中的所有损耗。

（第 10 题原卷符号 $I_{\mathrm{A}}^{\text{-I}}$ 、 $I_{\mathrm{B}}^{\text{-I}}$ 的上标是汉字「干涉」，本站公式内核不能排汉字上标，暂以西文「-I」代记，待人工核）



第 10 题图（图3d：四象限干涉仪示意图）

四、（70 分）

11．考虑在刚性、粗糙的水平地面上的一个载人的两轮平衡车简化模型，如图4a 所示。该模型包含两个相同的刚性圆形车轮（厚度忽略不计），每个车轮的半径为 r ，质量为 m 且均匀分布在车轮边缘；两车轮的圆心用长度为 d 、质量可忽略的细直刚性轮轴相连，两车轮各自所在平面始终与轮轴垂直。将平衡车除两轮、轮轴以外的其它车体部分和车上站立的人简化为质量为 M 、长度为 L 的匀质刚性细杆，细杆底端和轮轴中心位置C 相连，细杆可绕C 做无摩擦转动；此外，细杆与轮轴之间可以有沿轮轴方向的力偶矩（即扭矩，由杆上的发动机提供）。假设车轮在地面上始终做纯滚动。忽略平衡车系统内部所有摩擦阻力、空气阻力和形变导致的能量损失。取 z 轴正向为竖直向上， x 轴与轮轴平行， y 轴与车行进的方向平行。已知重力加速度大小为 g 。□

（1）本问中发动机不输出扭矩，细杆与轮轴之间的接触可视为点接触；设两个车轮与轮轴不是刚性连接（可以各自独立转动），且车轮质量可以忽略。□

考虑平衡车的转弯过程，C 点在水平面上做角速度为 Ω 的匀速圆周运动。细杆始终保持在轮轴所在的竖直平面内，且向内侧的倾角 ϕ 保持不变，其后视图如图4b 所示。求□

（1.1）C 点运动轨迹的半径 $R(\phi)$ ；□

（1.2）地面对左、右两个车轮的正压力的大小 N_1 、 N_2 （最后表达式中不得含 R ）。

（第 11 题原卷正压力记号为汉字下标「左」「右」，本站公式内核不能排汉字下标，暂以 N_1、N_2 代记，待人工核）

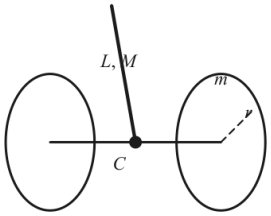
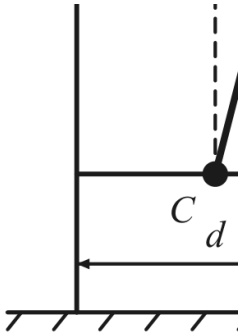


图 4a

第 11 题图（图4a）

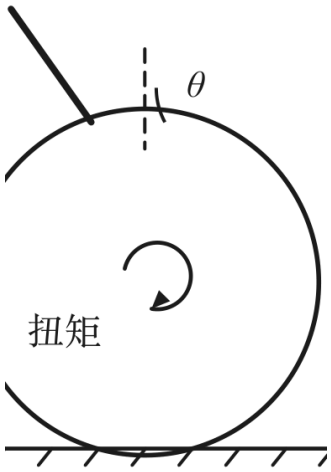


第 11 题图（图4b）

12．在下面第（2）（3）问中，细杆在垂直于轮轴的平面内运动；两个车轮与轮轴刚性连接，车轮质量不可忽略。□

（2）考虑平衡车沿直线向前加速的过程，平衡车的侧视图如图4c 所示。设细杆处在向前倾角为 θ 的位置，为使 θ 保持不变，发动机需要对轮轴施加合适的扭矩 $\tau(\theta)$ 。求 $\tau(\theta)$ 和平衡车质心的加速度 $a(\theta)$ 。设 y 轴正向指向平衡车前进的方向，扭矩的正向为图4c 中的逆时针方向。□

（3）考虑平衡车的小振动。假设发动机输出的扭矩 $\tau(\theta)$ 满足第（2）问求出的函数关系式，关系式中的各参量仍为第（2）问中的值。但是，本问中细杆的质量变为 M' 。对于合适的 M' 值，细杆倾角 θ （在 $\theta=0$ 附近）和C 可以做频率相同的小振动。求 M' 需满足的条件，以及此小振动的角频率 ω 。



第 12 题图（图4c）

五、（50 分）

13．考虑一个球对称的恒星，其物质分布在半径为 R 的球体中，总质量为 M ，球心为O．假设恒星物质只含有两种成分：一是中性或电离的原子，称为原子物质；二是辐射，称为光子气体。已知万有引力常量为 G 。□

假设恒星的总能量主要来自原子物质，在以下第（1）（2）（3）（4）问中可忽略辐射。□

（1）首先研究恒星的静力平衡，此时可将恒星物质视为流体。设 r 为恒星内的任一点到其中心O 的距离，该点处流体的压强为 $p(r)$ ，质量密度为 $\rho(r)$ ，半径为 r 的球体内的总质量为 $m(r)$ 。试写出平衡状态下 $m(r)$ 与 $p(r)$ 满足的微分方程。□

（2）利用第（1）问的结果，证明 $m(r)$ 与 $p(r)$ 满足不等式□

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[p(r)+\frac{Gm^2(r)}{8\pi r^4}\right]<0$ □

并据此估算恒星中心O 处压强的下界，结果用 M 、 R 、 G 表示。□

（3）试计算恒星自身的引力势能，用 $p(r)$ 的积分式表示。设所有恒星物质被球对称地拉到无穷远处为势能的零点。□

（4）考虑恒星物质的热力学。假设恒星物质的内能密度 $u(r)$ 与压强 $p(r)$ 满足关系□

$(\gamma-1)u(r)=p(r)$ □

其中 γ 为绝热指数。只考虑 $\gamma>1$ 且 γ 不依赖于 r 的情形。如果恒星不会解体，γ 应满足什么条件

？ □

以下各问考虑辐射的效应。假设恒星内部的光子仍然以真空中的光速 c 传播。□

（5）假设恒星内光子气体处处达到局域热平衡，光子气体的内能来自光子的能量，压强来自光子的光压。试计算这种光子气体的绝热指数 γ 。□

（6）原子物质能吸收光子。当辐射通过厚度为 $\mathrm{d}r$ 、密度为 ρ 的物质薄层时，有部分光子被吸收。被吸收的光子所占的比例为 $\kappa(r)\rho(r)\mathrm{d}r$ ，其余光子穿过该物质薄层，其中 $\kappa(r)$ 称为不透明度。假设 $\kappa(r)$ 不依赖光的频率。原子物质吸收光子而受到光压，由此导致了光子气体的压强差。设恒星在以 O 为中心、半径为 r 的整个球面向外辐射的功率（光度）为 $L(r)$ ，试给出温度 $T(r)$ 满足的微分方程 ，结果可包含 $L(r)$ 、 $m(r)$ 、 $\kappa(r)$ 、 r 及相关常量和常数。□

（7）假设恒星内原子物质的分压随半径 r 的增大而减小。试估算恒星表面处光度 $L(R)$ 的上界，结果用 M 、 $\kappa(R)$ 与相关常量和常数表示。□

提示：可利用Planck 黑体辐射能谱为□

$$B(\nu,T)=\frac{8\pi\nu^2}{c^3}\frac{h\nu}{\mathrm{e}^{h\nu/(kT)}-1}$$ □

和积分公式□

$$\int_0^\infty \frac{z^3\mathrm{d}z}{\mathrm{e}^z-1}=\frac{\pi^4}{15}$$ 。

六．（50 分）

14．根据量子力学不确定性关系 $\Delta x\Delta p\geq\frac{\hbar}{2}$（这里，$\Delta x$、$\Delta p$ 分别是粒子的位移 x、动量 p 的不确定度，$\hbar=\frac{h}{2\pi}$ 是约化普朗克常量，h 是普朗克常量），一个简谐振子的位移 x 和动量 p 不可能都为零，因此其基态能量不可能为零。基于类似的理由，真空中的量子电磁场最低态（即没有光子的态）的能量也不能为零。这导致了一个有趣的现象：将两块相距一定距离的不带电的导体板平行放置在真空中，它们之间存在非零的电磁相互作用力。☐

现用一个简单模型来考察这个力的起源，该模型只考虑一维空间中电磁波的传播，并假设电磁波只有一种偏振模式。将三块相同的不带电的理想导体薄板A、B、C 相互平行放置，A、B 之间距离为 a，A、C 之间距离为 L（$L\gg a$），如图6a 所示。已知真空中的光速为 c。☐

（1）真空电磁波在A、B 之间形成驻波，导体板表面的位置为波节。试求出A、B 之间所允许的电磁波的角频率。类似地，求出B、C 之间所允许的电磁波的角频率。☐

（2）由于量子效应，一个振动角频率为 ω 的简谐振子的基态能量为 $\frac{1}{2}\hbar\omega$。类似的，真空中角频率为 ω 的电磁波的一个模式所贡献的真空电磁场能量（零点能）为 $\frac{1}{2}\hbar\omega$。试写出A、C 之间真空电磁场总能量的表达式。（提示：表达式可能是发散的，即不是有限的。）☐

（3）推导出导体板B 所受到的电磁相互作用力的表达式。☐

（4）自然界真实力的大小总是有限的。我们导出的结果之所以发散，是因为采用了过于简化的假设。例如，实际的导体板不是理想导体，频率足够高的电磁波总能够穿过导体薄板，因而不受驻波条件的约束。所以这些高频电磁波模式几乎不受导体板位置的影响，也不会对我们想要计算的电磁力产生贡献。为了将这一效应考虑在内，可以采取如下方法：我们仍然保留第（1）问中求得的驻波条件，但假设每一个电磁波模式对电磁场总能量的有效贡献是 $\frac{1}{2}\hbar\omega e^{-\frac{\pi\omega}{\Lambda}}$。这里 Λ 与 ω 的量纲相同，且满足 $\frac{\Lambda a}{c}\gg 1$。试计算在 $L\to\infty$、$\Lambda\to\infty$ 的极限下导体板B 受到的电磁力。☐

（5）第（4）问中，用一个特定的指数函数来控制高频电磁波的贡献，得到了一个有限的电磁力；但是，这个电磁力的大小不依赖于具体函数形式的选取。因此，考虑一个更一般的函数 $f(x)$，它只需要满足两个条件：☐

A. $f(0)=1$，☐

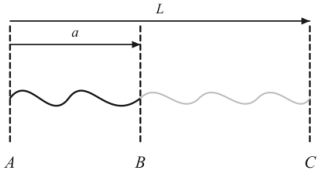
B. 当 $x\to\infty$ 时，$|f(x)|$ 以比 $\frac{1}{x}$ 更快的速度趋于零；☐

每一个电磁波模式对电磁场总能量的贡献为 $\frac{1}{2}\hbar\omega f\left(\frac{\omega}{\pi\Lambda}\right)$。试计算在 $L\to\infty$、$\Lambda\to\infty$ 的极限下导体板B 受到的电磁力，并说明结果不依赖于函数 $f(x)$ 的具体形式。☐

（提示：欧拉-麦克劳林公式如下☐

$$\sum_{n=1}^{N}F(n)-\int_0^N F(n)dn=\frac{F(N)-F(0)}{2}+\frac{F'(N)-F'(0)}{12}+\cdots+B_j\frac{F^{(j-1)}(N)-F^{(j-1)}(0)}{j!}+\cdots$$ ☐

这里 $F^{(j)}$ 是 F 的 j 阶导数，B_j 是伯努利数。如需用到该公式，可只取前两项。）



第 14 题图（图6a）