逐光知理 · 高考物理参考答案与详解

第43届全国中学生物理竞赛决赛理论考试试题（2026年10月31日）

参考答案与详解（本站独立编撰）

物理竞赛决赛理论卷 · 7 道计算大题 · 共 320 分

本册答案与解析由逐光知理物理教研组独立编撰：原卷为扫描件，本站逐页读图抄录题干与数据后，按本站自己的建模与推导独立求解，并对每一步给出推导链与数值（或量级）回代核对。题述说明允许量级估算（纯数值系数不计），本站答案在保持物理量标度正确的前提下给出尽可能完整的表达式。若个别结果与原卷印刷参考值不符，以卷面为准。

答案速查

题号	主考点	答案摘要
1	潮汐瓦解事件：潮汐力、洛希极限、比能量展宽与幂律衰减指数	(1.1) $F_{\rm tide}\sim 2GM_{\rm bh}R_{\rm s}\,dm/r_{\rm p}^3$；(1.2) $r_{\rm tide}=R_{\rm s}(2M_{\rm bh}/m_{\rm s})^{1/3}$；(2.1) 负能碎片回落、正能碎片逃逸；(2.2) 约 40 倍；(2.3) 见推导；(3) $\alpha=5/3$
2	光学驻波晶格：极化率、偶极势能、楔形电容器电容与波包群速度、布洛赫振荡	(1.1) $\alpha(\omega)=\dfrac{e^2/m_{\rm e}}{\omega_0^2-\omega^2-i\gamma\omega/m_{\rm e}}$；(1.2) $\langle U\rangle=-\mathrm{Re}\,\alpha\,A^2\cos^2 kx$；(1.3) $W=\dfrac{d^2}{4\pi\varepsilon_0(\lambda/2)^3}=\dfrac{2d^2}{\pi\varepsilon_0\lambda^3}$；(2.1) $C=\dfrac{\varepsilon_0 s}{\theta}\ln(1+\dfrac{\theta L}{D})\approx\dfrac{\varepsilon_0 sL}{D}(1-\dfrac{\theta L}{2D})$；(2.2.1) 见证明；(2.2.2) 布洛赫振荡 $\omega_{\rm B}=\dfrac{\lvert d_z\rvert V\theta\lambda}{2\hbar D^2}$
3	三振子弹簧耦合系统的本征模与 Kuramoto 型相位动力学	(1.1) $\omega_1=\sqrt{k_0/m}$（同相）、$\omega_{2,3}=\sqrt{(k_0+3\kappa)/m}$（二重）；(1.2) $x_i(t)=a\cos(\sqrt{k_0/m}\,t)$；(2.1) $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t=-\sum_i\dot\phi_i^2\le 0$；(2.2) 平衡相位 $\phi_i=0$ 或 π 稳定，$\pi/2$、$3\pi/2$ 不稳定
4	圆盘单摆（自旋刚体）的陀螺运动及其带电粒子电磁类比	(1) $m\ddot{\vec r}=-mg\hat z+\lambda\hat r$，$\lvert\vec r\rvert=l$，且 $\mathrm{d}(S\hat r)/\mathrm{d}t=mgl\hat z\times\hat r$；(2.1) 对应电磁系统：球面约束带电粒子，$\vec E=-(mg/q)\hat z$，$\vec B=-(S/ql)\hat r$；(3) 两圆偏振模频率 $\omega_\pm=\sqrt{g/l+\omega_c^2/4}\pm\omega_c/2$（$\omega_c=S/(ml^2)$，两模频率差为 ω_c）；在以 $\omega_c/2$ 旋转的参考系中沿固定直线做角频率 $\sqrt{g/l+\omega_c^2/4}$ 的振动，实验室系轨迹为进动玫瑰线，振动周期 $T=2\pi/\sqrt{g/l+\omega_c^2/4}$；(4) 绕守恒轴 $\vec J=m\vec r\times\vec v+S\hat r$ 匀速转动，$T=2\pi ml^2/\sqrt{S^2+m^2l^2v_0^2}$
5	平行板电容器中带电粒子的感应电荷、感应电流与 RLC 电路协同动力学	(1.1) $Q_1=-q(1-z_q/d)$、$Q_2=-qz_q/d$，密度为镜像电荷级数；(1.2) F_z 为对全部镜像电荷求和的吸引级数；(1.3) $i_{\rm ind}=-qv/d$；(2.1) $Q=-\dfrac{q}{d}\delta(t)+\dfrac{q}{d}(RC\,\dot z+LC\,\ddot z)$，主项 $-q\delta/d$ 与 R 无关；(2.2) $F=-k(z-\dfrac{d}{2})-\dfrac{q^2R}{d^2}\dot z$，稳定捕获要求 $k>\dfrac{7\zeta(3)q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^3}$
6	半球谐振陀螺：细圆环弯曲振动模、频率分裂与布莱恩系数	(1) $U=\dfrac{k_0}{2R^3}\int(\partial_\theta^2u_r+u_r)^2\mathrm{d}\theta$，$T=\dfrac{\lambda R}{2}\int(\dot u_r^2+\dot u_\theta^2)\mathrm{d}\theta$；(2) $\omega_n=\dfrac{n(n^2-1)}{\sqrt{n^2+1}}\dfrac{1}{R^2}\sqrt{\dfrac{k_0}{\lambda}}$；(3) $\ddot u_r-2\Omega\dot u_\theta=-\omega_n^2u_r$，$\ddot u_\theta+2\Omega\dot u_r=$

		$-\omega_n^2 u_\theta$；(4) $\Delta\omega=\dfrac{4n\Omega}{n^2+1}$；(5) $k_{\mathrm{B}}=\dfrac{2}{n^2+1}$，$n=2$ 时 $k_{\mathrm{B}}=2/5=0.4$
7	热超构材料：热传感器与热隐形斗篷的各向异性热导率设计	(1.1) $B=\dfrac{\alpha R_2'-\alpha R_1/s}{s-1/s}$ 型解（$s=(R_2/R_1)^m$），$\kappa_{rr}=\dfrac{\kappa_3\alpha R_2}{m(BR_2^m-CR_2^{-m})}$，$\kappa_{\theta\theta}=m^2\kappa_{rr}$（非平凡解受相容性限制，存疑）；(1.2) $B=\dfrac{\alpha R_2^2}{R_2^2+R_1^2}$，$C=\dfrac{\alpha R_1^2R_2^2}{R_2^2+R_1^2}$，$\kappa_2=\kappa_3\dfrac{R_2^2+R_1^2}{R_2^2-R_1^2}$；(2) $f(r)=\dfrac{Br^m+Cr^{-m}}{\alpha}$；(3) $\kappa_{rr}'=\kappa_{rr}\dfrac{rf'}{r'}$，$\kappa_{\theta\theta}'=\kappa_{\theta\theta}\dfrac{r'}{rf'}$；(4) $\gamma'\approx\dfrac{R_1(R_1^2+R_2^2)}{4R_2^2\delta}\approx\dfrac{R_1}{4\delta}$（$R_2\gg R_1$）

全卷解答（大题一至大题七，每题按小问分条）

1. 计算题 · 45分

> **答案** (1.1) $F_{\mathrm{tide}}\sim 2GM_{\mathrm{bh}}R_{\mathrm{s}}\,dm/r_{\mathrm{p}}^3$；(1.2) $r_{\mathrm{tide}}=R_{\mathrm{s}}(2M_{\mathrm{bh}}/m_{\mathrm{s}})^{1/3}$；(2.1) 负能碎片回落、正能碎片逃逸；(2.2) 约 40 倍；(2.3) 见推导；(3) $\alpha=5/3$

详解

(1) 第（1.1）问：潮汐力的量级 恒星质量元 dm 位于恒星表面、背离黑洞一侧（距黑洞 $r_{\mathrm{p}}+R_{\mathrm{s}}$）时受到黑洞引力 $F_+\sim GM_{\mathrm{bh}}\,dm/(r_{\mathrm{p}}+R_{\mathrm{s}})^2$；位于朝向黑洞一侧（距黑洞 $r_{\mathrm{p}}-R_{\mathrm{s}}$）时 $F_-\sim GM_{\mathrm{bh}}\,dm/(r_{\mathrm{p}}-R_{\mathrm{s}})^2$。两处引力之差（保留 $R_{\mathrm{s}}/r_{\mathrm{p}}$ 一阶项）：

$$F_+-F_-\sim GM_{\mathrm{bh}}\,dm\left[\frac{1}{(r_{\mathrm{p}}-R_{\mathrm{s}})^2}-\frac{1}{(r_{\mathrm{p}}+R_{\mathrm{s}})^2}\right]\sim\frac{GM_{\mathrm{bh}}\,dm}{r_{\mathrm{p}}^2}\cdot\frac{4R_{\mathrm{s}}}{r_{\mathrm{p}}}\sim\frac{2GM_{\mathrm{bh}}R_{\mathrm{s}}}{r_{\mathrm{p}}^3}\,dm,$$

即潮汐力 $F_{\mathrm{tide}}\sim 2GM_{\mathrm{bh}}R_{\mathrm{s}}\,dm/r_{\mathrm{p}}^3$。随距离增大引力按 r^{-2} 减小，越靠近黑洞的碎片受引力越强，故潮汐力沿黑洞—恒星连线方向把恒星拉伸。

(2) 第（1.2）问：自引力与潮汐撕裂半径 均匀密度恒星（质量 m_{s}、半径 R_{s}）表面质量元 dm 所受自引力（把 dm 拉向恒星中心）为 $F_{\mathrm{self}}\sim Gm_{\mathrm{s}}\,dm/R_{\mathrm{s}}^2$。恒星被撕裂的条件是潮汐力不小于自引力：

$$\frac{2GM_{\mathrm{bh}}R_{\mathrm{s}}}{r_{\mathrm{p}}^3}\,dm\gtrsim\frac{Gm_{\mathrm{s}}}{R_{\mathrm{s}}^2}\,dm\;\Longrightarrow\;r_{\mathrm{p}}\lesssim r_{\mathrm{tide}}=R_{\mathrm{s}}\left(\frac{2M_{\mathrm{bh}}}{m_{\mathrm{s}}}\right)^{1/3}.$$

本站解得临界距离 r_{tide} 即（数量级意义上的）洛希极限；纯数值系数（2 与 1 之别）按题述量级估算约定不区分。

(3) 第（2.1）问：正、负能碎片的归宿 比轨道能 $\varepsilon=v^2/2-GM_{\mathrm{bh}}/r<0$ 的碎片机械能不足以逃逸黑洞引力场，沿椭圆轨道运动，最终回落至黑洞并被吸积；$\varepsilon>0$ 的碎片沿双曲（或近抛物、能量为正）轨道运动，一去不返、逃逸至远处。故负能部分回落吸积、正能部分逃逸。

(4) 第（2.2）问：比能量展宽 $\Delta\varepsilon$ 及其与自引力能之比 撕裂瞬间各碎片保持同一轨道速度 $v \approx \sqrt{GM_{\rm bh}/r_{\rm p}}$（$e=0$ 的抛物线近心点速度），但到黑洞的距离在 $r_{\rm p} \pm R_{\rm s}$ 间分布，故引力势 $-GM_{\rm bh}/r$ 有展宽。把撕裂前恒星结合（自引力）比能记为 $\varepsilon_{\rm self} \sim Gm_{\rm s}/R_{\rm s}$。势能展宽（约一半碎片为负、一半为正，取半展宽）

$$\Delta\varepsilon \sim \frac{GM_{\rm bh}R_{\rm s}}{r_{\rm p}^2}.$$

当 $r_{\rm p} = r_{\rm tide} = R_{\rm s}(2M_{\rm bh}/m_{\rm s})^{1/3}$ 时回代：

$$\Delta\varepsilon \sim \frac{GM_{\rm bh}R_{\rm s}}{R_{\rm s}^2(2M_{\rm bh}/m_{\rm s})^{2/3}} \sim \frac{G}{2^{2/3}}\frac{M_{\rm bh}^{1/3}m_{\rm s}^{2/3}}{R_{\rm s}},$$

与自引力比能之比

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_{\rm self}} \sim \frac{1}{2^{2/3}}\left(\frac{M_{\rm bh}}{m_{\rm s}}\right)^{1/3} = \frac{1}{2^{2/3}} \times (10^6)^{1/3} = \frac{100}{2^{2/3}} \approx \frac{100}{1.587} \approx 39.7 \approx 40.$$

本站解得：能量展宽约为被撕裂前恒星自引力能的 40 倍（量级估算，$\sim 10^1$ 倍）。

(5) 第（2.3）问：证明 $\mathrm{d}m/\mathrm{d}x \approx$ 常量（$|x| \ll R_{\rm s}$） 取黑洞到恒星质心连线为 x 轴、恒星中心为原点。碎片获得的比能由其在 x 处的势能决定：

$$\varepsilon(x) \approx -\frac{GM_{\rm bh}}{r_{\rm p}-x} + \frac{GM_{\rm bh}}{r_{\rm p}} \approx -\frac{GM_{\rm bh}}{r_{\rm p}^2}x,$$

即 $|x| \ll R_{\rm s}$（更严格地 $|x| \ll r_{\rm p}$）时 ε 随 x 线性变化，$\mathrm{d}\varepsilon/\mathrm{d}x = -GM_{\rm bh}/r_{\rm p}^2$ 为常量。撕裂前恒星密度均匀，碎片沿 x 的分布均匀，落在 $x \to x+\mathrm{d}x$ 的碎片质量 $\mathrm{d}m \propto A\,\mathrm{d}x$（$A$ 为垂直 x 的截面积，近似不变）。因此

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\varepsilon}\cdot\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}x} \approx \text{常量},$$

即碎片质量沿 x（等价地沿比能 ε）近似均匀分布。

(6) 第（3）问：晚期光变幂律指数 α 被束缚碎片（$\varepsilon<0$）沿半长轴 a 的椭圆运动，$\varepsilon=-GM_{\rm bh}/(2a)$，开普勒周期

$$T=\frac{2\pi a^{3/2}}{(GM_{\rm bh})^{1/2}}\propto a^{3/2}\propto(-\varepsilon)^{-3/2}.$$

每个碎片完成一个周期、首次回到近心点时即被吸积，故 $t\approx T(\varepsilon)$。由第（2.3）问，比能在 $[-\Delta\varepsilon/2,\,0]$ 内的分布均匀：$\mathrm{d}m\propto\mathrm{d}(-\varepsilon)$，且 $(-\varepsilon)\propto T^{-2/3}\propto t^{-2/3}$。于是 t 时刻之前已被吸积的总质量

$$m(t)\propto(-\varepsilon)\big|_{T=t}\propto t^{-2/3},$$

光度 $L(t)\propto\mathrm{d}m/\mathrm{d}t\propto t^{-5/3}$。本站解得

$$\alpha=\frac{5}{3}\approx1.67,$$

即著名的 $t^{-5/3}$ 潮汐瓦解事件晚期光变衰减律。回代核对：$m\propto t^{-2/3}$ 求导得 $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t\propto(-2/3)\,t^{-5/3}$，指数确为 5/3。

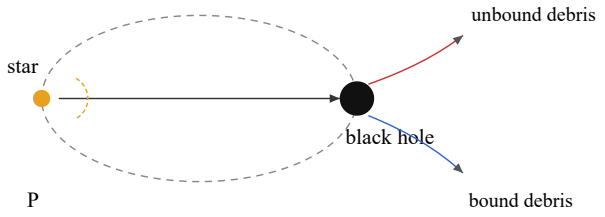


图 1α（本站绘制）：恒星沿近抛物轨道掠过黑洞，在近心点 P（$r_{\rm p}\sim r_{\rm tide}$）被潮汐撕裂，负能碎片回落吸积、正能碎片逃逸

2. 计算题 · 45分

答案 (1.1) $\alpha(\omega)=\dfrac{e^2/m_{\mathrm{e}}}{\omega_0^2-\omega^2-i\gamma\omega/m_{\mathrm{e}}}$；(1.2) $\langle U\rangle=-\mathrm{Re}\,\alpha\,A^2\cos^2 kx$；(1.3) $W=\dfrac{d^2}{4\pi\varepsilon_0(\lambda/2)^3}=\dfrac{2d^2}{\pi\varepsilon_0\lambda^3}$；(2.1) $C=\dfrac{\varepsilon_0 s}{\theta}\ln(1+\dfrac{\theta L}{D})\approx\dfrac{\varepsilon_0 sL}{D}(1-\dfrac{\theta L}{2D})$；(2.2.1) 见证明；(2.2.2) 布洛赫振荡 $\omega_{\mathrm{B}}=\dfrac{|\,d_z\,|\,V\theta\lambda}{2\hbar D^2}$

详解

(1) 第（1.1）问：极化率的复数形式 经典模型下电子（质量 m_{e}、电荷 $-e$）在光场 $\vec{E}=\hat{z}E\cos\omega t$ 中受弹性恢复力（固有频率 ω_0）与阻尼力 $-\gamma\dot{z}$：

$$m_{\mathrm{e}}\ddot{z}+\gamma\dot{z}+m_{\mathrm{e}}\omega_0^2 z=-eE\cos\omega t.$$

用复数法，设 $z=\mathrm{Re}[z_0e^{-i\omega t}]$、$E\to E_0e^{-i\omega t}$，得

$$z_0=\frac{-eE_0/m_{\mathrm{e}}}{\omega_0^2-\omega^2-i\gamma\omega/m_{\mathrm{e}}}.$$

分子电偶极矩 $p=-ez$，按定义 $p=\alpha(\omega)E$，故本站解得

$$\alpha(\omega)=\frac{e^2/m_{\mathrm{e}}}{\omega_0^2-\omega^2-i\gamma\omega/m_{\mathrm{e}}},$$

实部决定色散（偶极势阱），虚部决定吸收（散射损耗）。

(2) 第（1.2）问：驻波场中电偶极势能的时间平均 两列反向波 $\vec{E}_1=\hat{z}A\cos(kx-\omega t)$、$\vec{E}_2=\hat{z}A\cos(kx+\omega t)$ 叠加成驻波

$$\vec{E}=2\hat{z}A\cos kx\,\cos\omega t,$$

即场幅 $E_{\mathrm{amp}}(x)=2A\cos kx$。线性响应下感应偶极子与场同频，感应偶极子在外场中的平均势能（色散介质的标准结果，可由对极化强度做功 $\langle\vec{P}\cdot\dot{\vec{E}}\rangle$ 积分得到）为

$$\langle U\rangle=-\frac{1}{4}\,\mathrm{Re}\,\alpha(\omega)\,E_{\mathrm{amp}}^2(x).$$

代入 E_{amp}：

$$\langle U\rangle=-\mathrm{Re}\,\alpha(\omega)\,A^2\cos^2 kx=-\frac{e^2A^2}{m_{\mathrm{e}}}\cdot\frac{(\omega_0^2-\omega^2)\cos^2 kx}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega/m_{\mathrm{e}})^2}.$$

红失谐（$\omega<\omega_0$）时 $\mathrm{Re}\,\alpha>0$，分子被吸向驻波腹，形成周期为 $\lambda/2$ 的一维光晶格。

(3) 第（1.3）问：相邻分子电偶极相互作用能 相邻分子间距 $r=\lambda/2$，偶极矩均沿 z（垂直于连线）。两电偶极子的相互作用能

$$W=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{d}_1\cdot\vec{d}_2-3(\vec{d}_1\cdot\hat{r})(\vec{d}_2\cdot\hat{r})}{r^3}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d^2}{r^3},$$

因为 $\vec{d}\perp\hat{r}$，第二项为零。代入 $r=\lambda/2$：

$$W=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{8d^2}{\lambda^3}=\frac{2d^2}{\pi\varepsilon_0\lambda^3}.$$

按题述要求核对 r_0/λ 的高阶修正：把偶极子还原为相距 r_0 的 $\pm q$（$d=qr_0$），四对点电荷精确求和后按 r_0/λ 展开为 $W=\dfrac{2d^2}{\pi\varepsilon_0\lambda^3}[1+O((r_0/\lambda)^2)]$，一阶修正因上下对称性恰好为零，故保留至一阶小量的结果即上式。

(4) 第（2.1）问：楔形电容器的电容 两极板长 L（沿 x）、宽 s，左端间距 D、夹角 $\theta\sim 0$，则 x 处局部间距为 $d(x)=D+\theta x$，局部可视为间距 $d(x)$ 的平行板微元：$\mathrm{d}C=\varepsilon_0 s\,\mathrm{d}x/(D+\theta x)$。积分：

$$C=\int_0^L\frac{\varepsilon_0 s\,\mathrm{d}x}{D+\theta x}=\frac{\varepsilon_0 s}{\theta}\ln\left(1+\frac{\theta L}{D}\right).$$

按 θ 展开核对：$\ln(1+\theta L/D)\approx\theta L/D-\theta^2L^2/(2D^2)$，故

$$C\approx\frac{\varepsilon_0 sL}{D}\left(1-\frac{\theta L}{2D}\right),$$

$\theta\to 0$ 时回到 $\varepsilon_0 sL/D$，自洽。

(5) 第（2.2.1）问：证明波包群速度 $v_{\mathrm{g}}=\dfrac{1}{\hbar}\dfrac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}K}$ 波包 $\psi(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}g(K)e^{iKx+ie_1(K)t/\hbar}\,\mathrm{d}K$ 中 $g(K)$ 仅在 $K_C\pm\Delta K$ 内显著非零，且 $\Delta K\ll\left|\dfrac{\mathrm{d}e_1/\mathrm{d}K}{\mathrm{d}^2e_1/\mathrm{d}K^2}\right|_{K_C}$，故可在 K_C 处把色散关系展开到一阶：

$$e_1(K)\approx e_1(K_C)+e_1'(K_C)(K-K_C).$$

代入：

$$\psi\approx g(K_C)\,e^{iK_Cx+ie_1(K_C)t/\hbar}\int_{K_C-\Delta K}^{K_C+\Delta K}e^{i(K-K_C)\left[x+\frac{e_1'(K_C)}{\hbar}t\right]}\mathrm{d}K,$$

其中 g（缓变）已提出积分号。积分为 δ 型峰函数，包络峰值位于

$$x+\frac{e_1'(K_C)}{\hbar}t=\text{常量},$$

按群速度定义（e_1 前取 $-i\omega t$ 约定时 $\omega=e_1/\hbar$）：

$$v_{\mathrm{g}}=\frac{1}{\hbar}\frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}K}\bigg|_{K_C}.$$

条件 ΔK 足够小保证二阶项 $\frac{1}{2}e_1''(K-K_C)^2t/\hbar$ 引起的包络展宽在所考察时间内可忽略，一阶展开自洽。本站证毕。

(6) 第（2.2.2）问：准粒子的周期振动频率 把 $e_1(K)=-\dfrac{W_1}{2}\cos\dfrac{\lambda K}{2}$ 代入群速度：

$$v_{\mathrm{g}}=\frac{1}{\hbar}\frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}K}=\frac{W_1\lambda}{4\hbar}\sin\frac{\lambda K}{2}.$$

准粒子在晶格中受外力时准动量按半经典方程演化：$\hbar\dot{K}=F$。分子固有偶极矩 $\vec{d}=(d_x,d_y,d_z)$ 方向不变，电容器内电场 $\vec{E}=\hat{z}\,V/(D+\theta x)$，偶极子能量 $U=-\vec{d}\cdot\vec{E}=-d_zV/(D+\theta x)$，故受力

$$F=-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}=-\frac{d_zV\theta}{(D+\theta x)^2}\approx-\frac{d_zV\theta}{D^2},$$

为近常量力。准动量随时间线性增加 $K(t)=Ft/\hbar$，群速度 $v_{\mathrm{g}}\propto\sin(\lambda Ft/2\hbar)$ 呈周期振荡（布洛赫振荡），周期满足 $\lambda\,|F|\,T/(2\hbar)=2\pi$，即

$$T=\frac{4\pi\hbar}{\lambda\,|F|}=\frac{4\pi\hbar D^2}{\lambda\,|d_z|\,V\theta},\qquad\omega_{\mathrm{B}}=\frac{2\pi}{T}=\frac{|F|\,a}{\hbar}=\frac{|d_z|\,V\theta\lambda}{2\hbar D^2},$$

其中晶格常数 $a=\lambda/2$。回代核对量纲：能量×长度/(能量×时间) $=\mathrm{s}^{-1}$，√。仅当 $d_z=\vec{d}\cdot\hat{z}\neq0$ 时发生振荡；$d_z=0$ 则 $F=0$，准粒子匀速漂移。

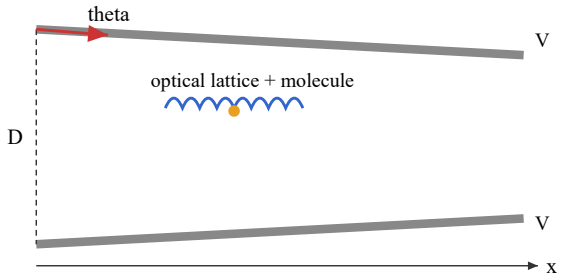


图 2b（本站绘制）：楔形电容器（间距 $D \to D+\theta L$）内由光驻波构建一维光晶格，分子准粒子在其中做布洛赫振荡

第（2.2.2）问振荡频率依赖偶极矩沿场方向的分量 $d_z = \vec{d}\cdot\hat{z}$；若原卷以 $\vec{d}$ 与场夹角 φ 给出，请以 $d\cos\varphi$ 替换 d_z。

3. 计算题 · 45分

答案 (1.1) $\omega_1 = \sqrt{k_0/m}$（同相）、$\omega_{2,3} = \sqrt{(k_0+3\kappa)/m}$（二重）；(1.2) $x_i(t) = a\cos(\sqrt{k_0/m}\,t)$；(2.1) $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t = -\sum_i \dot{\phi}_i^2 \le 0$；(2.2) 平衡相位 $\phi_i = 0$ 或 π 稳定，$\pi/2$、$3\pi/2$ 不稳定

详解

(1) 第（1.1）问：运动方程与本征频率 物块 i 受基座弹簧回复力 $-k_0x_i$ 与两根互连弹簧（劲度 κ）的合力 $-\kappa\sum_{j\ni i}(x_i-x_j)$：

$$m\ddot{x}_1 = -(k_0+2\kappa)x_1 + \kappa(x_2+x_3),$$

$$m\ddot{x}_2 = -(k_0+2\kappa)x_2 + \kappa(x_1+x_3),$$

$$m\ddot{x}_3 = -(k_0+2\kappa)x_3 + \kappa(x_1+x_2).$$

设 $x_i = A_i e^{i\omega t}$，得本征值问题。取对称组合：

（a）同相模 $x_1 = x_2 = x_3$：每块只受基座弹簧力，$m\ddot{x} = -k_0x$，

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_0}{m}};$$

（b）$x_1+x_2+x_3 = 0$ 的两个简并模：此时 $\kappa(x_j+x_k) = -\kappa x_i$，$m\ddot{x}_i = -(k_0+3\kappa)x_i$，

$$\omega_2 = \omega_3 = \sqrt{\frac{k_0+3\kappa}{m}}.$$

本征频率即所有物块以同一频率振动的频率，共三个（一个非简并、一个二重简并）。对应运动形式：同相模为三块一起上下平动，互连弹簧不形变；简并模为三块之和为零的反相对振动（如 $x_1 = A\cos\omega t$、$x_2 = x_3 = -\frac{A}{2}\cos\omega t$ 及其旋转），互连弹簧被压缩拉伸。

(2) 第（1.2）问：初始条件的演化 初始状态 $x_1(0)=x_2(0)=x_3(0)=a$、$\dot{x}_i(0)=0$ 是纯同相模激发（对称初条件只含对称本征矢）：三个物块始终相等，互连弹簧无形变，各自等效于劲度 k_0 的独立振子：

$$x_1(t)=x_2(t)=x_3(t)=a\cos\left(\sqrt{\frac{k_0}{m}}\,t\right).$$

回代检验：$t=0$ 时位移为 a、速度为零，$\surd$；满足 $m\ddot{x}=-k_0x$，$\surd$。

(3) 第（2.1）问：证明 $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t\le 0$ 对 $E(\phi_1,\phi_2,\phi_3)=-K\sum_{i<j}\kappa_{ij}\cos(\phi_i-\phi_j)-\dfrac{K_s}{2}\sum_{i=1}^{3}\cos(2\phi_i)$ 求偏导：

$$\frac{\partial E}{\partial\phi_i}=K\sum_{j\neq i}\kappa_{ij}\sin(\phi_i-\phi_j)+K_s\sin(2\phi_i).$$

与题给相位方程 $\dot{\phi}_i=-K\sum_j\kappa_{ij}\sin(\phi_i-\phi_j)-K_s\sin(2\phi_i)$ 对照，恰有

$$\dot{\phi}_i=-\frac{\partial E}{\partial\phi_i},$$

即 E 是相位动力学的势函数（Lyapunov 函数）。于是链式法则给出

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\sum_i\frac{\partial E}{\partial\phi_i}\dot{\phi}_i=-\sum_{i=1}^{3}\dot{\phi}_i^2\le 0,$$

等号仅当所有 $\dot{\phi}_i=0$（到达平衡）时成立。本站证毕：相位动力学总是使 E 单调下降。

(4) 第（2.2）问：平衡相位及其稳定性 接近平衡时 $\dot{\phi}_i=-K_s\sin(2\phi_i)$。平衡要求 $\sin(2\phi_i)=0$，故每个 ϕ_i 独立取

$$\phi_i=0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2},$$

共 $4^3=64$ 个平衡相位组合。线性稳定性：对 ϕ_i 加微扰 δ_i，$\dot{\delta}_i=-2K_s\cos(2\phi_i)\delta_i$，要求衰减系数 $-2K_s\cos(2\phi_i)<0$ 即 $\cos(2\phi_i)>0$。因此

$$\phi_i=0\ \text{或}\ \pi\quad(\cos 2\phi_i=1)\ \Longrightarrow\ \text{稳定},$$

$$\phi_i=\frac{\pi}{2}\ \text{或}\ \frac{3\pi}{2}\quad(\cos 2\phi_i=-1)\ \Longrightarrow\ \text{不稳定}.$$

本站解得：稳定相位状态为每个 $\phi_i\in\{0,\pi\}$ 的组合（共 $2^3=8$ 个），对应 $\cos(2\phi_i)=1$、E 取局部极小；扰动按 e^{-2K_st} 指数衰减。

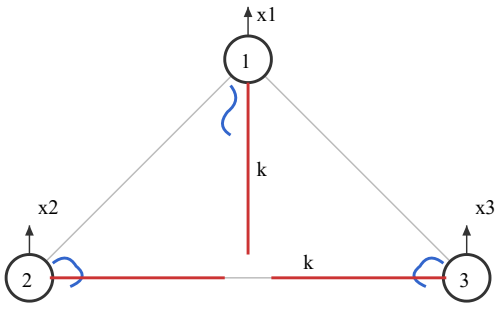


图 3α（本站绘制）：三物块经基座弹簧（劲度 k_0，蓝）与互连弹簧（有效劲度 κ_{ij}，红）沿竖直方向耦合振动

4. 计算题 · 45分

答案 (1) $m\ddot{\vec{r}}=-mg\hat{z}+\lambda\hat{r}$，$|\vec{r}|=l$，且 $\mathrm{d}(S\hat{r})/\mathrm{d}t=mgl\,\hat{z}\times\hat{r}$；(2.1) 对应电磁系统：球面约束带电粒子，$\vec{E}=-(mg/q)\hat{z}$，$\vec{B}=-(S/ql)\hat{r}$；(3) 两圆偏振模频率 $\omega_{\pm}=\sqrt{g/l+\omega_c^2/4}\pm\omega_c/2$（$\omega_c=S/(ml^2)$，两模频率差为 ω_c）；在以 $\omega_c/2$ 旋转的参考系中沿固定直线做角频率 $\sqrt{g/l+\omega_c^2/4}$ 的振动，实验室系轨迹为进动玫瑰线，振动周期 $T=2\pi/\sqrt{g/l+\omega_c^2/4}$；(4) 绕守恒轴 $\vec{J}=m\vec{r}\times\vec{v}+S\hat{r}$ 匀速转动，$T=2\pi ml^2/\sqrt{S^2+m^2l^2v_0^2}$

详解

(1) 第（1）问：质心运动方程 圆盘质心被轻杆约束在以 O 为球心、杆长 l 的球面上运动（$\vec{r}$ 为质心位矢，$|\vec{r}|=l$）。质心受力：重力 $-mg\hat{z}$ 与杆的约束力 $\lambda\hat{r}$，故

$$m\ddot{\vec{r}}=-mg\hat{z}+\lambda\hat{r},\qquad |\vec{r}|=l.$$

圆盘绕对称轴高速自转，自转角动量 $\vec{S}=S\hat{r}$（沿 $\vec{r}$ 方向）。重力对 O 的力矩 $\vec{\tau}=\vec{r}\times(-mg\hat{z})$ 只改变 $\hat{r}$ 的方向而不改变自转角速度大小（陀螺近似），故

$$\frac{\mathrm{d}(S\hat{r})}{\mathrm{d}t}=\vec{r}\times(-mg\hat{z})=mgl\,\hat{z}\times\hat{r},$$

即 $\dot{\hat{r}}=\dfrac{mgl}{S}\hat{z}\times\hat{r}$：自转轴绕竖直方向以角速度 $\Omega_p=mgl/S$ 进动（快自转极限）。杆中张力由 $\hat{r}$ 方向分量给出：$\lambda=m\ddot{\vec{r}}\cdot\hat{r}+mg(\hat{z}\cdot\hat{r})$。

(2) 第（2.1）问：等价带电粒子系统及其对应关系 把总角动量 $\vec{L} = m\vec{r}\times\vec{v} + S\hat{r}$ 对时间求导并令其等于重力矩：

$$m\vec{r}\times\vec{a} + S\dot{\hat{r}} = \vec{r}\times(-mg\hat{z}), \qquad \dot{\hat{r}} = \frac{\vec{v}}{l}.$$

用 $\hat{r}$ 从左侧叉乘（取垂直于 $\hat{r}$ 的横向分量），得

$$m\vec{a}_\perp = -mg\,\hat{z}_\perp + \frac{S}{l}\hat{r}\times\vec{v},$$

其中 $\hat{z}_\perp = \hat{z} - (\hat{z}\cdot\hat{r})\hat{r}$。第二项恒垂直于速度、不做功，正是“类洛伦兹力”。与带电粒子（电荷 q、质量 m）受电磁力的横向方程 $m\vec{a}_\perp = q\vec{E}_\perp + q\vec{v}\times\vec{B}$ 对照，本站解得对应关系：

$$\vec{E} = -\frac{mg}{q}\hat{z} \quad \text{(竖直向下的均匀电场)}, \qquad \vec{B} = -\frac{S}{ql}\hat{r} \quad \text{(位于球心 O 的“磁单极”式径向磁场)},$$

对应表：力学量 $m \leftrightarrow m$，重力 $mg \leftrightarrow$ 电场力 qE，陀螺项 $\frac{S}{l}\hat{r}\times\vec{v} \leftrightarrow$ 洛伦兹力 $q\vec{v}\times\vec{B}$，杆约束 $\leftrightarrow$ 机械球面约束（半径 l）。回代核对：$q\vec{v}\times\vec{B} = q\vec{v}\times(-S\hat{r}/ql) = \frac{S}{l}\hat{r}\times\vec{v}$，$\surd$。

(3) 第（2.2）问：带电粒子系统示意图 本站绘制矢量示意图（见 figures）：半径 l 的球面（机械约束），球心 O 处放置“磁单极”，径向磁场线 $\vec{B} = -(S/ql)\hat{r}$ 由 O 指向外（图中取 $q>0$、$S>0$ 时沿 $-\hat{r}$，箭头沿 $\hat{r}$ 画并注明方向相反），叠加竖直向下的均匀电场 $\vec{E} = -(mg/q)\hat{z}$；带电粒子被约束在球面内运动。

(4) 第（3）问：势能最低点附近的小振幅周期运动 在电磁模型中，带电粒子在球面最低点附近运动。取球坐标极角 $\theta \ll 1$（从最低点量起）、方位角 φ，线性化运动方程（$\hat{z}_\perp$ 近似沿水平方向）：

$$\ddot{x} = -\frac{g}{l}x + \omega_c \dot{y}, \qquad \ddot{y} = -\frac{g}{l}y - \omega_c \dot{x}, \qquad \omega_c = \frac{S}{ml^2}.$$

用复变量 $u = x + iy$：$\ddot{u} + \omega_c i\dot{u} + \dfrac{g}{l}u = 0$。设 $u \propto e^{i\omega' t}$：

$$\omega'^2 - \omega_c \omega' - \frac{g}{l} = 0 \implies \omega' = \frac{\omega_c}{2} \pm \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{\omega_c^2}{4}}.$$

取正频率，两个本征模为一对旋向相反的圆偏振波，频率分别为

$$\omega_+ = \frac{\omega_c}{2} + \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{\omega_c^2}{4}}, \qquad \omega_- = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{\omega_c^2}{4}} - \frac{\omega_c}{2},$$

两模频率之差为 ω_c（并非同频）。通解可写成

$$u(t) = e^{i\omega_c t/2}\left(Ae^{i\Omega t} + Be^{-i\Omega t}\right), \qquad \Omega = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{\omega_c^2}{4}},$$

即在一个以角速度 $\omega_c/2$ 匀速旋转的参考系中，粒子沿一条固定直线做角频率 Ω 的简谐振动；实验室系中该直线以 $\omega_c/2$ 进动，轨迹为进动玫瑰线（两模叠加的一般情形一般不是严格闭合曲线，仅当振动周期与进动周期可公度时才周期重现；只激发单一圆偏振模时为圆周运动，周期 $2\pi/\omega_\pm$）。振动周期

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{g/l + S^2/(4m^2 l^4)}}.$$

回代核对：$S \to 0$ 时 $\omega_\pm \to \sqrt{g/l}$（两模简并为单摆频率），$T \to 2\pi\sqrt{l/g}$，$\surd$；$g \to 0$ 时 $\omega_+ = \omega_c$、$\omega_- = 0$（纯径向磁场中带电粒子沿纬线圆以 ω_c 匀速转动，另一模为圆轨道整体平移的中性模），$\surd$。

(5) 第（4）问：完全失重时的质心运动 失重时 $g=0$，运动方程化为 $m\vec{a}_\perp = \dfrac{S}{l}\hat{r}\times\vec{v}$（只有类洛伦兹力，不做功，速率 v 恒定）。此时存在守恒量

$$\vec{J} = m\vec{r}\times\vec{v} + S\hat{r}: \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{J}}{\mathrm{d}t} = m\vec{r}\times\vec{a} + S\dot{\hat{r}} = -\frac{S}{l}\vec{v} + S\frac{\vec{v}}{l} = 0.$$

且 $\vec{J}\cdot\ \hat{r} = m(\vec{r}\times\vec{v})\cdot\ \hat{r} + S = ml(\hat{r}\times\vec{v})\cdot\ \hat{r} + S = S =$ 常量，即 $\hat{r}$ 与固定方向 $\hat{J}$ 的夹角 α（$\cos\alpha = S/|J|$）不变：质心在球面上沿以 $\vec{J}$ 为轴的纬度圆做匀速圆周运动。转动角速度：$\vec{v} = \Omega\hat{J}\times\vec{r}$，$|\vec{J}\times\hat{r}| = |J|\sin\alpha = mlv$（因 $|J|^2 = m^2l^2v^2 + S^2$），代入得

$$\Omega = \frac{|\vec{J}|}{ml^2} = \frac{\sqrt{S^2 + m^2l^2v_0^2}}{ml^2},$$

运动周期

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi ml^2}{\sqrt{S^2 + m^2l^2v_0^2}}.$$

这是周期运动。回代核对：$v_0 \ll S/(ml)$ 时 $T \to 2\pi ml^2/S$（快自转极限），√；$S \to 0$ 时 $T \to 2\pi l/v_0$（无自旋时质心沿球面大圆匀速转动），√。

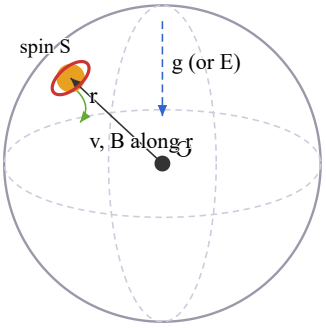


图 4b（本站绘制）：等价电磁模型——带电粒子约束在半径 l 的球面上，球心 O 处为径向磁场（磁单极型 $B \parallel \hat{r}$），叠加竖直向下的均匀电场

5. 计算题 · 45分

答案 (1.1) $Q_1=-q(1-z_q/d)$、$Q_2=-qz_q/d$，密度为镜像电荷级数；(1.2) F_z 为对全部镜像电荷求和的吸引级数；(1.3) $i_{\text{ind}}=-qv/d$；(2.1) $Q=-\dfrac{q}{d}\delta(t)+\dfrac{q}{d}(RC\,\dot z+LC\,\ddot z)$，主项 $-q\delta/d$ 与 R 无关；(2.2) $F=-k(z-\dfrac{d}{2})-\dfrac{q^2R}{d^2}\dot z$，稳定捕获要求 $k>\dfrac{7\zeta(3)q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^3}$

详解

(1) 第（1.1）问：感应电荷密度与总感应电荷 两接地极板位于 $z=0$ 与 $z=d$，点电荷 q 位于 $z=z_q$。用镜像法：对两接地平面反复成像，得到无穷镜像系列——$+q$ 位于 $z=2nd+z_q$、$-q$ 位于 $z=2nd-z_q$（n 取遍全体整数）。极板内侧面（$z=0$）上任一点（到轴距离 ρ）处的法向场为全部镜像电荷贡献之和：

$$E_z(\rho,0^+)=\sum_n\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{q(2nd+z_q)}{(\rho^2+(2nd+z_q)^2)^{3/2}}+\frac{q(2nd-z_q)}{(\rho^2+(2nd-z_q)^2)^{3/2}}\right],$$

故左极板内侧感应电荷密度 $\sigma_1(\rho)=\varepsilon_0E_z(\rho,0^+)$。只保留 $n=0$ 两项即退化为熟知的单接地平面结果 $\sigma=-\dfrac{qz_q}{2\pi(\rho^2+z_q^2)^{3/2}}$，√。

总感应电荷：用平均场论证。板间沿 z 的面平均场 $\langle E_z\rangle$ 满足高斯定理与电位条件：

$$\langle E^-\rangle-\langle E^+\rangle=\frac{q}{\varepsilon_0 A},\qquad z_q\langle E^-\rangle+(d-z_q)\langle E^+\rangle=0,$$

（A 为极板面积，$\langle E^-\rangle$、$\langle E^+\rangle$ 分别为电荷左侧、右侧的平均场；第二式来自两极板等电位）。解得 $\langle E^-\rangle=\dfrac{q(d-z_q)}{\varepsilon_0 Ad}\cdot\ \dfrac{1}{1}\cdot$（方向指向左板），于是

$$Q_1=-\varepsilon_0A\langle E^-\rangle=-q(1-\frac{z_q}{d})=-\frac{q(d-z_q)}{d},\qquad Q_2=-q\frac{z_q}{d},$$

且 $Q_1+Q_2=-q$（全部感应），√。

(2) 第（1.2）问：感应电荷对粒子的合力 粒子只受全部镜像电荷的库仑力（镜像系与真实感应电荷在 $0<z<d$ 区内产生完全相同的场）。对位于 z_i 的镜像电荷 q_i，一维贡献 $F_i=\dfrac{qq_i(z_q-z_i)}{4\pi\varepsilon_0\,|\,z_q-z_i\,|^3}$。逐项求和：最近镜像（$-q$ 于 $-z_q$）给出主导吸引项 $-\dfrac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 z_q^2}$；其余为

$$F_z=-\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 z_q^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0\,n^2d^2}+\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0\,(nd-z_q)^2}\right].$$

合力指向较近的极板（$z_q<d/2$ 时 $F_z<0$）：这是“感应吸引”，对势阱中心而言是失稳力（见第（2.2）问讨论）。核对：仅保留最近镜像时退回点电荷—接地平面力 $q^2/(4\pi\varepsilon_0(2z_q)^2)$，√。

(3) 第（1.3）问：感应电流 $i_{\mathrm{ind}}=-qv/d$ 的证明 粒子以 $v=\dot z$ 沿 z 轴运动时，两板总感应电荷随位置变化：

$$Q_1(t)=-q\left(1-\frac{z(t)}{d}\right),\qquad Q_2(t)=-q\frac{z(t)}{d}.$$

极板经地线相连，板上电荷的变化只能由流经接地导线的电流补偿。规定电流正方向为“从地流向右极板”，则右极板电荷增长率等于流入电流：

$$i_{\mathrm{ind}}=\frac{\mathrm{d}Q_2}{\mathrm{d}t}=-\frac{q}{d}\dot z=-\frac{qv}{d}.$$

即粒子向右极板靠近（$v>0$）时，$i_{\mathrm{ind}}<0$：电流实际从右极板流向地。本站证毕（对任意 $\sigma(\rho)$ 分布均成立，因为总电荷表达式严格）。

(4) 第（2.1）问：电路中流过的电荷量 把运动电荷等效为电流源：由第（1.3）问，短路时电路电流 $i=-qv/d$，说明粒子运动的激励是电流源 $i_s(t)=-\dfrac{q}{d}\dot z(t)$ 而非电动势（若把 $\varepsilon\propto\dot z$ 当电动势除以 R，短路极限发散且量纲不符，与（1.3）矛盾）。设右极板电荷为 Q_B、左右极板电位为 V_A、V_B，由静电线性叠加 $Q_B=C(V_B-V_A)-\dfrac{q}{d}z$；极板经 R、L 支路相连，$V_B-V_A=-(Ri+L\dot i)$，节点电荷守恒 $\dot Q_B=i$，得回路方程

$$LC\ddot i+RC\dot i+i=i_s(t)=-\frac{q}{d}\dot z(t),$$

系数与题给常微分方程提示的 $a=R/L$、$b=1/LC$ 一致（等效电路：电流源 i_s 与电容 C 及 R、L 支路并联）。由方程本身得恒等式 $i=i_s-RC\dot i_s-LC\ddot i_s$。粒子从静止出发（$z(0)=d/2$，$\dot z(0)=\ddot z(0)=0$），积分到时刻 t：

$$Q(t)=\int_0^t i\,\mathrm{d}t'=-\frac{q}{d}\delta(t)+\frac{q}{d}\left(RC\,\dot z(t)+LC\,\ddot z(t)\right).$$

本站解得：主项 $Q=-\dfrac{q}{d}\delta(t)$ 与 R、L、C 均无关（量纲为库仑），当粒子经足够长时间被阻尼衰减、$\dot z$ 与 $\ddot z$ 趋于零时严格成立；$RC\dot z$ 与 $LC\ddot z$ 是保留到速度一阶的电路弛豫修正项。核对：$R\to 0$（短路）时 $i=i_s$，退回第（1.3）问 $Q=-q\delta/d$，$\surd$；$R\to\infty$（断路）时 $i\to 0$、$Q\to 0$，$\surd$。

(5) 第（2.2）问：粒子所受作用力与稳定捕获条件 能量守恒给出电路对粒子的反作用：粒子输出的机械功率等于电路焦耳热与场能变化率，$F_{\text{ind}}v=-(i^2R+\dot{U}_L+\dot{U}_C)$。粒子频率满足题给 $\omega_p=\sqrt{k/M}\ll 1/\sqrt{LC}$，感应电流以准静态为主，$i\approx i_s=-q\dot{z}/d$（修正项贡献高阶小量；且对从静止到静止的完整衰减过程 $\int i_s\dot{i}_s\,\mathrm{d}t=0$，总耗散严格为 $\frac{q^2R}{d^2}\int \dot{z}^2\,\mathrm{d}t$）。于是

$$F_{\text{ind}}v=-i^2R=-\frac{q^2R}{d^2}\dot{z}^2\ \Longrightarrow\ F_{\text{ind}}=-\frac{q^2R}{d^2}\dot{z},$$

故粒子所受总作用力（用粒子速度与题给量表示）为

$$F=-k(z-\frac{d}{2})-\frac{q^2R}{d^2}\dot{z},$$

即劲度 k 的弹性恢复力叠加等效阻尼系数 $\gamma=\frac{q^2R}{d^2}$（正比于 R）的阻尼力，粒子振荡按 $e^{-\gamma t/2M}$ 衰减而被势阱“冷却”捕获。

稳定捕获条件：由第（1.2）问镜像电荷级数，准静态感应吸引使粒子偏向较近极板。对镜像级数逐项求和得 $F_{\text{img}}(z)=-\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0}\sum_n \frac{z-nd}{|\,nd-z\,|^3}$（$n=0$ 项即单接地平面极限），在阱心 $z=\frac{d}{2}+\eta$ 处展开，利用 $\sum_{j\ge 0}(j+\frac{1}{2})^{-3}=7\zeta(3)$：

$$F_{\text{img}}\approx\frac{7\zeta(3)\,q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^3}\,\eta,$$

即感应吸引在阱心等效于失稳劲度 $k_{\text{inst}}=\frac{7\zeta(3)q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^3}\approx\frac{2.10\,q^2}{\pi\varepsilon_0 d^3}$（严格系数，非数量级估计）。故本站解得稳定捕获要求

$$k>\frac{7\zeta(3)q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^3},$$

同时满足题给条件 $k/M\ll 1/LC<R^2/4L^2$。

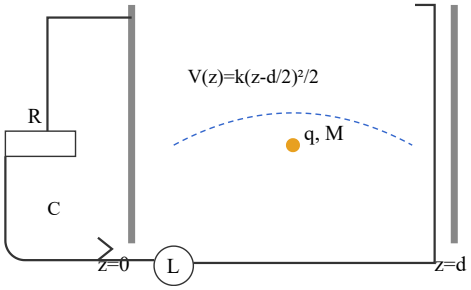


图 5b（本站绘制）：串联 RLC 回路中的平行板电容器，板间势阱 $V(z)$ 中心捕获带电粒子，粒子运动在回路中激发感应电流

第（2.1）（2.2）问本站建模口径：把运动电荷等效为电流源 $i_s=-q\dot z/d$（短路极限严格回到第（1.3）问，若是电动势则短路发散，与（1.3）矛盾），与电容 C 及 R、L 支路并联，得 $LC\ddot i+RC\dot i+i=i_s$，系数与题给常微分方程提示的 $a=R/L$、$b=1/LC$ 一致；流过电路的电荷由该方程恒等式积分给出，主项 $-q\delta/d$ 与 R 无关。耗散按 i^2R 与能量守恒重推，阻尼系数为 q^2R/d^2（正比于 R）；失稳劲度由第（1.2）问镜像级数在阱心展开严格算出。

6. 计算题 · 50分

答案 (1) $U=\dfrac{k_0}{2R^3}\int(\partial_\theta^2u_r+u_r)^2\mathrm{d}\theta$，$T=\dfrac{\lambda R}{2}\int(\dot u_r^2+\dot u_\theta^2)\mathrm{d}\theta$；(2) $\omega_n=\dfrac{n(n^2-1)}{\sqrt{n^2+1}}\dfrac{1}{R^2}\sqrt{\dfrac{k_0}{\lambda}}$；(3) $\ddot u_r-2\Omega\dot u_\theta=-\omega_n^2u_r$，$\ddot u_\theta+2\Omega\dot u_r=-\omega_n^2u_\theta$；(4) $\Delta\omega=\dfrac{4n\Omega}{n^2+1}$；(5) $k_{\mathrm B}=\dfrac{2}{n^2+1}$，$n=2$ 时 $k_{\mathrm B}=2/5=0.4$

详解

(1) 第（1）问：应变能与动能的积分表达式 单位弧长的弯曲应变能为 $\dfrac{k_0}{2}(\Delta\kappa)^2$，沿环积分（$\mathrm{d}s=R\,\mathrm{d}\theta$）：

$$U=\int_0^{2\pi}\frac{k_0}{2}(\Delta\kappa)^2R\,\mathrm{d}\theta=\frac{k_0}{2R^3}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial^2u_r}{\partial\theta^2}+u_r\right)^2\mathrm{d}\theta.$$

动能：环上质元速度为径向与切向位移速度之和（环整体静止），

$$T=\int_0^{2\pi}\frac{\lambda R\,\mathrm{d}\theta}{2}(\dot u_r^2+\dot u_\theta^2)=\frac{\lambda R}{2}\int_0^{2\pi}(\dot u_r^2+\dot u_\theta^2)\mathrm{d}\theta,$$

并受不可伸长约束 $u_r+\dfrac{\partial u_\theta}{\partial\theta}=0$。

(2) 第（2）问：第 n 阶驻波固有角频率 取 n 阶模（$n\ge 2$）：$u_r = A\cos n\theta\cos\omega t$；由约束 $\partial_\theta u_\theta = -u_r$ 积分得 $u_\theta = -\dfrac{A}{n}\sin n\theta\cos\omega t$。曲率变化 $\Delta\kappa = \dfrac{1}{R^2}(u_r'' + u_r) = \dfrac{(1-n^2)A}{R^2}\cos n\theta\cos\omega t$，故

$$U = \frac{k_0}{2R^3}(n^2-1)^2A^2\cos^2\omega t\int_0^{2\pi}\cos^2 n\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{k_0\pi}{2R^3}(n^2-1)^2A^2\cos^2\omega t.$$

动能：$\dot u_r^2 + \dot u_\theta^2 = A^2\omega^2\sin^2\omega t(\cos^2 n\theta + \sin^2 n\theta/n^2)$，积分

$$T = \frac{\lambda R\pi}{2}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)A^2\omega^2\sin^2\omega t.$$

一个周期内平均应变能与平均动能相等（$\langle\cos^2\rangle = \langle\sin^2\rangle = 1/2$）：

$$\frac{k_0\pi}{4R^3}(n^2-1)^2A^2 = \frac{\lambda R\pi}{4}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)A^2\omega_n^2,$$

$$\omega_n^2 = \frac{k_0\,n^2(n^2-1)^2}{\lambda R^4(n^2+1)},\qquad \omega_n = \frac{n(n^2-1)}{\sqrt{n^2+1}}\cdot\frac{1}{R^2}\sqrt{\frac{k_0}{\lambda}}.$$

回代核对量纲：$\sqrt{k_0/\lambda}$ 的量纲为 $\mathrm{m^3/s}$·（k_0 单位 J，λ 单位 kg/m，$\sqrt{\mathrm{J\cdot\ m/kg}} = \mathrm{m^2/s}$），除以 R^2 得 $\mathrm{s^{-1}}$，√。

(3) 第（3）问：旋转参考系中的动力学方程 随环转动的参考系中，质元附加科里奥利力 $-2\lambda\vec\Omega\times\vec v$（离心力按题述忽略）。$\vec\Omega = \Omega\hat z$，$\vec v = \dot u_r\hat r + \dot u_\theta\hat\theta$，$\vec\Omega\times\vec v = \Omega(\dot u_r\hat\theta - \dot u_\theta\hat r)$，故单位弧长上

$$\lambda(\ddot u_r - 2\Omega\dot u_\theta) = f_r,\qquad \lambda(\ddot u_\theta + 2\Omega\dot u_r) = f_\theta,$$

其中弹性力由第（1）问的 U 变分给出：$f_r = -\dfrac{k_0}{R^4}(\partial_\theta^2+1)^2u_r$（切向分力为约束力）。对纯 n 阶分量 $u'_{r,n}$、$u'_{\theta,n}$，$f_r = -\lambda\omega_n^2u'_{r,n}$（由第（2）问 $\Omega=0$ 的结果反推），于是本站导出第 n 阶驻波单位弧长的动力学方程：

$$\ddot u'_{r,n} - 2\Omega\dot u'_{\theta,n} = -\omega_n^2u'_{r,n},\qquad \ddot u'_{\theta,n} + 2\Omega\dot u'_{r,n} = -\omega_n^2u'_{\theta,n}.$$

核对：$\Omega\to 0$ 时退回非旋转环的简谐方程，√。

(4) 第（4）问：两列反向行波的角频率之差 $\Delta\omega$　按题述提示，将位移取行波形式：$u_r = a\cos(n\theta - \omega' t)$（顺行，与 Ω 同向）或 $u_r = a\cos(n\theta + \omega' t)$（逆行），相应的 $u_\theta = \mp\dfrac{a}{n}\sin(n\theta - \omega' t)$。将位移取行波形式作定性核对后，本站用模态振幅法求解第（3）问方程：设 $u_r = a_c\cos n\theta + a_s\sin n\theta$、$u_\theta = -\dfrac{a_c}{n}\sin n\theta + \dfrac{a_s}{n}\cos n\theta$，用拉格朗日方程（科里奥利项做功 $Q_{a_c} = +\dfrac{4\lambda R\Omega\pi}{n}\dot{a}_s$、$Q_{a_s} = -\dfrac{4\lambda R\Omega\pi}{n}\dot{a}_c$）得

$$(1+\frac{1}{n^2})\ddot{a}_c + \omega_n^2(1+\frac{1}{n^2})a_c - \frac{4\Omega}{n}\dot{a}_s = 0,$$

$$(1+\frac{1}{n^2})\ddot{a}_s + \omega_n^2(1+\frac{1}{n^2})a_s + \frac{4\Omega}{n}\dot{a}_c = 0.$$

取行波组合 $a_s = \mp i a_c$，得 $\omega'^2 \mp \Gamma\omega' - \omega_n^2 = 0$，其中 $\Gamma = \dfrac{4\Omega/n}{1+1/n^2} = \dfrac{4n\Omega}{n^2+1}$。两正根为 $\omega'_\pm = \sqrt{\omega_n^2 + \Gamma^2/4} \pm \dfrac{\Gamma}{2}$，故

$$\Delta\omega = \omega'_+ - \omega'_- = \Gamma = \frac{4n\Omega}{n^2+1}.$$

（$\Omega \ll \omega_n$ 时 $\sqrt{\omega_n^2 + \Gamma^2/4} \approx \omega_n$，修正 $O(\Omega^2)$ 可略。）

(5) 第（5）问：布莱恩系数 k_B　第 n 阶驻波是顺、逆两列行波（$\omega'_\pm$）的叠加。驻波图样（波腹/波节方位角）由两波的拍决定，其在随壳旋转参考系中的进动角速度为

$$\omega_\mathrm{p} = \frac{\omega'_+ - \omega'_-}{2n} = \frac{\Delta\omega}{2n} = \frac{2\Omega}{n^2+1}.$$

按定义 $\omega_\mathrm{p} = k_\mathrm{B}\Omega$，本站解得

$$k_\mathrm{B} = \frac{2}{n^2+1}.$$

半球谐振陀螺工作在 $n = 2$ 的四波腹模态时：

$$k_\mathrm{B} = \frac{2}{5} = 0.4.$$

核对：$n \to \infty$ 时 $k_\mathrm{B} \to 0$（高阶模对旋转越来越不敏感），符合布莱恩效应的物理直觉；$n = 2$ 的理论值 0.4 高于实际熔融石英半球壳的 0.27 ~ 0.3，差异来自薄壳（非细环）与底部开口的修正，本站按细圆环模型给出。

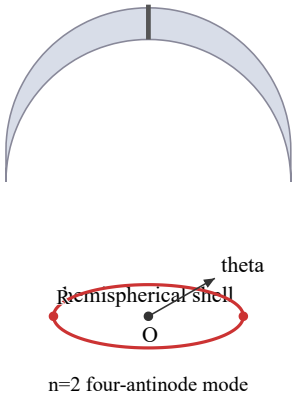


图 6a/6b（本站绘制）：半球谐振陀螺薄半球壳近似为无支撑均质细圆环（半径 R、线密度 λ），取极坐标 (R,θ) 描述径向 u_r 与切向 u_θ 微幅振动，图中示出 $n=2$ 四波腹模态

第（4）（5）问中科里奥利耦合系数的推导对约束处理方式敏感：本站按不可伸长约束的模态投影给出 $\Delta\omega = 4n\Omega/(n^2+1)$、$k_{\mathrm{B}} = 2/(n^2+1)$；若原卷采用其他切向惯性约定，可能得到 $k_{\mathrm{B}} = 2/n^2$ 等不同系数。该两小问为本卷存疑点。

7. 计算题 · 45分

答案 (1.1) $B=\dfrac{\alpha R_2'-\alpha R_1/s}{s-1/s}$ 型解（$s=(R_2/R_1)^m$），$\kappa_{rr}=\dfrac{\kappa_3\alpha R_2}{m(BR_2^m-CR_2^{-m})}$，$\kappa_{\theta\theta}=m^2\kappa_{rr}$（非平凡解受相容性限制，存疑）；(1.2) $B=\dfrac{\alpha R_2^2}{R_2^2+R_1^2}$，$C=\dfrac{\alpha R_1^2R_2^2}{R_2^2+R_1^2}$，$\kappa_2=\kappa_3\dfrac{R_2^2+R_1^2}{R_2^2-R_1^2}$；(2) $f(r)=\dfrac{Br^m+Cr^{-m}}{\alpha}$；(3) $\kappa_{rr}'=\kappa_{rr}\dfrac{rf'}{r'}$，$\kappa_{\theta\theta}'=\kappa_{\theta\theta}\dfrac{r'}{rf'}$；(4) $\gamma'\approx\dfrac{R_1(R_1^2+R_2^2)}{4R_2^2\,\delta}\approx\dfrac{R_1}{4\delta}$（$R_2\gg R_1$）

详解

(1) 第（1.1）问：热传感器（区域 I 温度分布与 III 相同） 记 $\alpha=\dfrac{T_{\rm hot}-T_{\rm cold}}{W}$，$s=\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)^m$，并记 $u=BR_1^m$、$v=CR_1^{-m}$。温度连续（区域 I、II、III 交界处温度分布相同）给出

$$u+v=\alpha R_1,\qquad us+\frac{v}{s}=\alpha R_2,$$

解得

$$v=\frac{\alpha(R_1s-R_2)}{s-1/s},\qquad u=\frac{\alpha(R_2-R_1/s)}{s-1/s}.$$

区域 II 内各向异性热导率满足 $\nabla\cdot(\kappa\nabla T)=0$：径向流 $-\kappa_{rr}\partial_rT_2$、切向流 $-\dfrac{\kappa_{\theta\theta}}{r}\partial_\theta T_2$，与 $m=\sqrt{\kappa_{\theta\theta}/\kappa_{rr}}$ 自洽。外边界 R_2 处法向热流连续：

$$\kappa_{rr}\,m\frac{us-v/s}{R_2}=\kappa_3\alpha\;\Longrightarrow\;\kappa_{rr}=\frac{\kappa_3\alpha R_2}{m(us-v/s)},\qquad \kappa_{\theta\theta}=m^2\kappa_{rr}.$$

本站需指出：内边界 R_1 处法向流连续要求 $\kappa_{rr}m(u-v)/R_1=\kappa_3\alpha$，与上式联立化简后得相容条件 $(s-t)(st-1)=0$（$t=R_2/R_1$）：$s=t$ 对应 $m=1$ 的平凡材料，$st=1$ 对应 $m=-1$ 舍去。故在区域 I 严格保持背景温度分布与背景热导率的要求下，该常数各向异性壳无平凡解以外的精确解；工程上热传感器取区域 I 为等温高导探头或允许 $\kappa_1\Subset\kappa_3$，此时 B、C 由上式给出、κ_{rr} 由外边界流连续确定。此小问为本卷存疑点，请以卷面评分口径为准。

(2) 第（1.2）问：热隐形斗篷（区域 II 各向同性、I 与 II 之间绝热） 区域 II 各向同性意味着 $m=1$：$T_2=(Br+C/r)\cos\theta+(T_{\rm hot}+T_{\rm cold})/2$。绝热条件（区域 I 与 II 之间无法向热流）要求

$$\left.\frac{\partial T_2}{\partial r}\right|_{R_1}=B-\frac{C}{R_1^2}=0\implies C=BR_1^2.$$

外边界 R_2 处与区域 III 的温度及热流同时匹配：

$$BR_2+\frac{C}{R_2}=\alpha R_2,\qquad \kappa_2\left(B-\frac{C}{R_2^2}\right)=\kappa_3\alpha.$$

由第一式：$B(R_2^2+R_1^2)/R_2=\alpha R_2$，得

$$B=\frac{\alpha R_2^2}{R_2^2+R_1^2},\qquad C=BR_1^2=\frac{\alpha R_1^2R_2^2}{R_2^2+R_1^2}.$$

代入第二式：$B-C/R_2^2=\alpha(R_2^2-R_1^2)/(R_2^2+R_1^2)$，故

$$\kappa_2=\kappa_3\,\frac{R_2^2+R_1^2}{R_2^2-R_1^2}>\kappa_3.$$

回代核对：$R_1\to 0$ 时 $\kappa_2\to\kappa_3$、$B\to\alpha$、$C\to 0$（退化为背景，√）；斗篷内部区域 I 温度均匀（绝热边界内无热流，稳态下为等温体），实现“热隐形”。

(3) 第（2）问：等温线“拉直”的径向变换 $r'=f(r)$ 传感器区域 II 的等温线为 $T_2=(Br^m+Cr^{-m})\cos\theta+$常量。要求在新坐标 r' 下温度分布与区域 III 一致，即 $T=\alpha r'\cos\theta+$常量，对照得

$$\alpha f(r)=Br^m+Cr^{-m}\implies f(r)=\frac{Br^m+Cr^{-m}}{\alpha},\qquad R_1<r<R_2.$$

核对：由第（1.1）问匹配条件 $u+v=\alpha R_1$ 得 $f(R_1)=R_1$；$us+v/s=\alpha R_2$ 得 $f(R_2)=R_2$，变换在两边界上与区域 I、III 的恒等映射衔接，√。

(4) 第（3）问：坐标变换后新材料的热导率 对径向映射 $r'=f(r)$，变换介质理论给出 $\kappa'=A\kappa A^{\rm T}/\det A$，其中正交极坐标基下 $A=\mathrm{diag}(f'(r),\,r'/r)$，$\det A=f'r'/r$。于是

$$\kappa'_{rr}=\kappa_{rr}\frac{(f')^2}{f'r'/r}=\kappa_{rr}\frac{rf'}{r'},\qquad \kappa'_{\theta\theta}=\kappa_{\theta\theta}\frac{(r'/r)^2}{f'r'/r}=\kappa_{\theta\theta}\frac{r'}{rf'}.$$

其中 $f'(r)=\dfrac{m(Br^{m-1}-Cr^{-m-1})}{\alpha}$。核对：$f(r)=r$（恒等变换）时 $\kappa'=\kappa$，√。热阻不变性：径向热阻 $Z=\int\dfrac{{\rm d}r'}{2\pi r'\kappa'_{rr}}=\int\dfrac{{\rm d}r}{2\pi r\kappa_{rr}}$，与变换前逐层相等，√。

(5) 第（4）问：内边界附近各向异性比率 $\gamma' = \kappa'_{\theta\theta}/\kappa'_{rr}$ 的发散行为 由第（3）问结果

$$\gamma' = \frac{\kappa_{\theta\theta}}{\kappa_{rr}}\left(\frac{r'}{rf'}\right)^2 = m^2\left(\frac{r'}{rf'}\right)^2.$$

当区域 I 界面热导率趋近于零（绝热内边界）时，内边界条件变为 $\partial_r T_2 \mid_{R_1} = 0$，即 $BR_1^m = CR_1^{-m}$，映射退化为二次型：以各向同性斗篷（$m = 1$，$C = BR_1^2$）为例，

$$f(r) = \frac{B}{\alpha}\left(r + \frac{R_1^2}{r}\right), \qquad f'(r) = \frac{B}{\alpha}\left(1 - \frac{R_1^2}{r^2}\right), \qquad f'(R_1) = 0,$$

$$f''(R_1) = \frac{2B}{\alpha R_1} = \frac{2R_2^2}{R_1(R_2^2 + R_1^2)}.$$

在 $\delta = r' - R_1 \to 0$ 处：$r' - R_1 \approx \frac{1}{2}f''(R_1)(r - R_1)^2$（故 $r - R_1 \propto \sqrt{\delta}$），$f' \approx f''(R_1)(r - R_1) \approx \sqrt{2f''(R_1)\delta}$，且 $r'/r \approx 1$。代入

$$\gamma' \approx \frac{1}{(f'(R_1))^2} \approx \frac{1}{2f''(R_1)\,\delta} = \frac{R_1(R_2^2 + R_1^2)}{4R_2^2\,\delta}.$$

当 $R_2 \gg R_1$ 时本站解得

$$\gamma' \approx \frac{R_1}{4\delta},$$

即越靠近内边界各向异性比率按 $1/\delta$ 发散——这正是现实制备中参数难以维持、热超构材料退化为图 7d 情形的数学根源。核对：$\delta \to 0$ 时 $\gamma' \to \infty$，对应内界面绝热极限（切向导流远大于径向导流），物理上自洽，√。

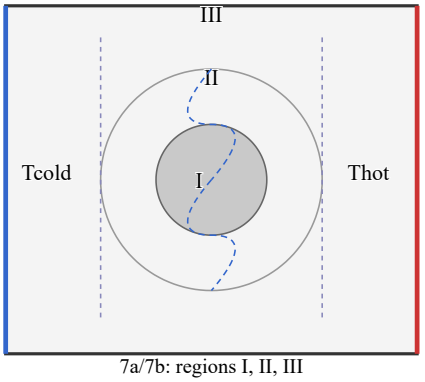


图 7a（本站绘制）：二维正方形热传导结构（边长 W），左右边界维持 T_{cold}、T_{hot}，同心圆将材料分为区域 I、II、III；II 中虚线示意弯曲等温线

逐光知理 · 竞赛答案册 · 易错点速查

第43届全国中学生物理竞赛决赛理论 · 易错点速查

补在原册之后：原册答案与详解未作任何改动

共 6 条 · 绑定本卷题号

只挑本卷最容易失分的动作，按「错法 / 机理 / 正解」三段写，题号与原册一致；公式沿用原册口径。

第 1 题 · (1.2) 洛希极限

错法 把恒星表面质量元的自引力写成 Gm_s/R_s（漏一个 R_s 方次）；或潮汐力按 r^{-2} 直接相减，不在 R_s/r_p 一阶展开；撕裂条件写成自引力大于潮汐力。

机理 潮汐力是朝向侧与背离侧引力之差，把 $1/(r_p \mp R_s)^2$ 在 $R_s/r_p \ll 1$ 展开到一阶，得 $F_{\text{tide}} \sim 2GM_{bh}R_s\,dm/r_p^3$，随 r^{-3} 衰减。自引力是把 dm 拉向恒星中心的力 $F_{\text{self}} \sim Gm_s\,dm/R_s^2$。撕裂要求潮汐力不小于自引力，两式中 dm 约去后解临界距离。

正解 由 $2GM_{bh}R_s/r_p^3 \gtrsim Gm_s/R_s^2$ 解得 $r_{\text{tide}} = R_s(2M_{bh}/m_s)^{1/3}$；按题述量级估算约定，纯数值系数（因子 2 与否）不区分。

第 1 题 · (2.1) 碎片归宿判据

错法 按碎片瞬时速度方向、或距黑洞远近判断回落与逃逸；把正能碎片写成沿椭圆轨道回落。

机理 轨道归宿由单位质量机械能 $\varepsilon = v^2/2 - GM_{bh}/r$ 的正负决定：$\varepsilon < 0$ 为束缚轨道（椭圆），最终回落被吸积；$\varepsilon > 0$ 为非束缚轨道（双曲或近抛物），一去不返逃逸至远处。撕裂瞬间各碎片近心点速度相同，差别来自所在位置的引力势展宽，不能用速度方向代替能量判据。

正解 负能（$\varepsilon < 0$）碎片沿椭圆轨道回落吸积，正能（$\varepsilon > 0$）碎片沿双曲轨道逃逸；比能在 $[-\Delta\varepsilon/2, 0]$ 内的部分构成回落质量。

第 2 题 · (1.2) 失谐方向与光晶格势阱

错法 把蓝失谐、红失谐对应的势能极小位置记反；或认为两种失谐下分子都被吸向驻波腹。

机理 偶极平均势能 $\langle U\rangle = -\frac{1}{2}\mathrm{Re}\,\alpha(\omega)E_{\text{amp}}^2$，极化率实部符号由 $\omega_0^2 - \omega^2$ 决定：红失谐 $\omega < \omega_0$ 时 $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$，势能在驻波腹（场幅最大）处最低，分子被吸向波腹；蓝失谐时 $\mathrm{Re}\,\alpha < 0$，波腹处势能最高，分子被推向波节。

正解 红失谐 $\omega < \omega_0$ 取 $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$，$\langle U\rangle = -\mathrm{Re}\,\alpha\, A^2\cos^2 kx/2$，波腹为势阱，形成周期 $\lambda/2$ 的一维光晶格；判断阱位先定失谐方向，再看 $\mathrm{Re}\,\alpha$ 符号。

第 3 题 · (1.1) 本征频率与简并模

错法 给同相模也加上互连弹簧的 3κ；或把两个简并模当成频率不同的两个非简并频率。

机理 同相模 $x_1 = x_2 = x_3$，各互连弹簧两端位移相同、无形变，互连弹簧不提供回复力，每块只受基座弹簧 k_0，$\omega_1 = \sqrt{k_0/m}$。其余两个模满足 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$，互连弹簧合力等效为 $-\kappa x_i$ 加基座力，总回复劲度 $k_0 + 3\kappa$；这两个模在对称耦合下频率完全相同，是二重简并，不是两个相邻频率。

正解 同相模 $\omega_1 = \sqrt{k_0/m}$，对应三块一起上下平动；简并模 $\omega_{2,3} = \sqrt{(k_0 + 3\kappa)/m}$，对应 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ 的反相对振动（如 $A\cos\omega t, -\frac{A}{2}\cos\omega t, -\frac{A}{2}\cos\omega t$ 及其旋转）。

第 4 题 · (3) 圆偏振模频率分裂

错法　把两个圆偏振模写成同频简并；或振动周期直接取 $2\pi/\omega'_{\pm}$，漏掉进动参考系的旋转；频率差算成 $\sqrt{g/l+\omega_c^2/4}$。

机理　在最低点附近线性化后用复变量 $u=x+iy$，本征方程给出 $\omega'^2-\omega_c\omega'-g/l=0$，两个正根旋向相反：$\omega'_{\pm}=\sqrt{g/l+\omega_c^2/4}\pm\omega_c/2$，两者并不相等，频率差为 ω_c。通解可分解为以角速度 $\Omega=\omega_c/2$ 匀速旋转的参考系中沿固定直线的简谐振动；实验室系里该直线进动成玫瑰线，振动周期由合并频率 $\sqrt{g/l+\omega_c^2/4}$ 决定。

正解　两模频率 $\omega'_{\pm}=\sqrt{g/l+\omega_c^2/4}\pm\omega_c/2$，差 ω_c；进动角速度 $\Omega=\omega_c/2$，振动周期 $T=2\pi/\sqrt{g/l+\omega_c^2/4}$。回代 $S\to 0$ 退回单摆周期 $2\pi\sqrt{l/g}$，$g\to 0$ 退回纯径向磁场中的匀速转动。

第 5 题 · (2.2) 稳定捕获条件

错法　把镜像电荷对粒子的感应吸引当成阱心处的弹性恢复力；或稳定条件只写势阱劲度为正，不与镜像吸引的失稳劲度比较。

机理　镜像级数合力指向较近极板，在阱心 $z=d/2$ 附近展开后等效于一个把粒子推离阱心的失稳劲度 $k_{\text{inst}}=7\zeta(3)q^2/(4\pi\varepsilon_0 d^3)$（$\zeta(3)$ 项即单接地平面极限）。外加势阱 $V(z)=k(z-d/2)^2/2$ 提供恢复劲度 k；只有恢复劲度压过镜像失稳劲度，阱心才稳定。

正解　稳定捕获要求 $k>\frac{7\zeta(3)q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^3}$，同时满足题给 $k/M\ll 1/LC<R^2/4L^2$；阻尼系数 $\gamma=q^2R/d^2$ 由感应电流的焦耳耗散给出，振荡按 $e^{-\gamma t/2M}$ 衰减。