逐光知理 · 高考物理参考答案与详解

第32届全国中学生物理竞赛决赛理论试题

参考答案与详解（本站独立编撰）

物理竞赛决赛理论 · 8 道计算大题

本册解答与详解由逐光知理物理教研组独立编撰，依据原卷题面自行推演，逐步给出完整推导链与数值回代核对，供竞赛学习参考。

答案速查

题号	主考点	答案摘要
1	刚体力矩平衡与等效劲度系数、简谐振动固有频率	(1) $\Delta x_3=\frac{mg}{k_3}$，$\Delta x_1=\frac{mgb}{(a+b)k_1}$，$\Delta x_2=\frac{mga}{(a+b)k_2}$；(2) $\omega=\sqrt{\frac{(a+b)^2k_1k_2k_3}{m[a^2k_1k_3+b^2k_2k_3+(a+b)^2k_1k_2]}}$；(3) $a=\frac{k_2}{k_1}b$ 时固有频率最大，$\omega_{\max}=\sqrt{\frac{(k_1+k_2)k_3}{(k_1+k_2+k_3)m}}$
2	含时变电感回路的电磁感应与能量守恒、电磁炮加速	(1) 回路方程 $u=\frac{d}{dt}[L(x)i]+R(x)i=L(x)\frac{di}{dt}+iL_r'v_s+iR(x)$；(2) $a_s=\frac{L_r'i^2}{2(m_s+m_a)}$；(3) $I=3.0\times10^6$ A，$\tau=3.3\times10^{-4}$ s
3	变质量系统动量守恒与相对论火箭方程	(1) $V_1=-V_e\ln\frac{M}{M_i}$；(2) $V_1=c\frac{1-(M/M_i)^{2V_e/c}}{1+(M/M_i)^{2V_e/c}}$；(3) 两种结果之差保留至 $(V_1/c)^2$ 项为零，实际差别为 $(V_1/c)^3$ 量级
4	光子动量传递、光压回复力与简谐运动、多普勒效应	(1)(a) $\ddot{y}+\frac{2I\cos^2\theta}{c\rho L^2}y=0$；(1)(b) $t_1=\frac{2\pi}{3\cos\theta}\sqrt{\frac{c\rho}{2I}}$；(2) 先偏小且差距增大，后偏大且差距减小
5	表面张力做功、毛细势能与能量耗散（放热）	(1) $E_s(h)=-2\pi\alpha\cos\theta(R_1+R_2)h$；(2) $Q=\frac{2\pi\alpha^2\cos^2\theta(R_1+R_2)}{\rho g(R_1-R_2)}$；(3) $z=R_{地}\left(\sqrt{\frac{Q\rho g(R_1-R_2)}{2\pi\alpha^2\cos^2\theta(R_1+R_2)}}-1\right)$
6	地外行星的逆行（留）与会合周期、开普勒第三定律	相邻两次冲日间隔内：逆行约 73 d，顺行约 706 d
7	带电粒子在电场中的加速与匀速漂移、飞行时间法测质荷比与分辨率	(1) $R=\frac{t}{2\Delta t}$；(2) $L=2\left(\sqrt{k^3}-k(\sqrt{k}-1)\frac{E_s}{E_1}\right)S$，$k=\frac{E_sS+E_1D_1}{E_sS}$；(3) $L=(E_sS+E_1D_1)\left(\frac{\sqrt{k}}{E_s}+\frac{1-\sqrt{k}}{E_1}+\frac{2(1-\sqrt{k'})}{E_2}+\frac{2\sqrt{k'}}{E_3}\right)$，$k'=\frac{E_sS+E_1D_1}{E_sS+E_1D_1-E_2D_2}$
8	分层介质中的折射定律与变折射率光线轨迹、抛物线形光路	(1) $y=\frac{\alpha^2}{4n_0^2\sin^2\theta_0}x^2+\frac{x}{\tan\theta_0}$；(2) $x_{a\max}=\frac{2n_0}{\alpha}\sqrt{y_a}$；(3) $\theta_0(t)=\arctan\left[\frac{2n_0^2(x_0-vt)}{4n_0^2y_0-\alpha^2(x_0-vt)^2}+\sqrt{\left(\frac{2n_0^2(x_0-vt)}{4n_0^2y_0-\alpha^2(x_0-vt)^2}\right)^2+\frac{\alpha^2(x_0-vt)^2}{4n_0^2y_0-\alpha^2(x_0-vt)^2}}\right]$；(4) $0<v<\frac{2n_0(t_a\sqrt{gy_a}-\sqrt{2}y_a)}{\alpha(gt_a^2-2y_a)}$

第一题（弹簧-轻杆系统的平衡与振动）

1. 计算题

> **答案** (1) $\Delta x_3=\dfrac{mg}{k_3}$，$\Delta x_1=\dfrac{mgb}{(a+b)k_1}$，$\Delta x_2=\dfrac{mga}{(a+b)k_2}$；(2) $\omega=\sqrt{\dfrac{(a+b)^2k_1k_2k_3}{m[a^2k_1k_3+b^2k_2k_3+(a+b)^2k_1k_2]}}$；(3) $a=\dfrac{k_2}{k_1}b$ 时固有频率最大，$\omega_{\max}=\sqrt{\dfrac{(k_1+k_2)k_3}{(k_1+k_2+k_3)m}}$

详解

(1) 第（1）问：物块 D 的平衡 沿竖直方向建立坐标轴（原点在天花板下沿，竖直向下）。物块 D 平衡时，弹簧 C 的拉力等于重力：

$$mg=k_3\Delta x_3\Rightarrow\Delta x_3=\frac{mg}{k_3}.$$

设弹簧 A、B 末端对轻杆的拉力分别为 F_1、F_2。以弹簧 C 与轻杆的连接点为支点，力矩平衡给出 $F_1a=F_2b$；轻杆竖直方向合力为零给出 $F_1+F_2-mg=0$。联立解得 $F_1=\frac{b}{a+b}mg$，$F_2=\frac{a}{a+b}mg$。再由胡克定律 $F_1=k_1\Delta x_1$、$F_2=k_2\Delta x_2$ 得

$$\Delta x_1=\frac{mgb}{(a+b)k_1},\qquad \Delta x_2=\frac{mga}{(a+b)k_2}.$$

(2) 第（2）问：等效劲度系数与固有频率 挂 D 前弹簧 C 末端 E 点坐标为 $x_E=l_1+l_3+\frac{a(l_2-l_1)}{a+b}$；挂 D 后系统重新平衡时末端移到 E'，$x_{E'}=l_1+\Delta x_1+l_3+\Delta x_3+\frac{a(l_2-l_1+\Delta x_2-\Delta x_1)}{a+b}$。等效弹簧静伸长为

$$\Delta x_E=x_{E'}-x_E=\Delta x_1+\Delta x_3+\frac{a(\Delta x_2-\Delta x_1)}{a+b}=\frac{mg(a^2k_1+b^2k_2)}{(a+b)^2k_1k_2}+\frac{mg}{k_3}.$$

故等效劲度系数为

$$k_e=\frac{mg}{\Delta x_E}=\frac{(a+b)^2k_1k_2k_3}{a^2k_1k_3+b^2k_2k_3+(a+b)^2k_1k_2},$$

物块 D 微小振动的固有角频率与频率分别为

$$\omega=\sqrt{\frac{k_e}{m}}=\sqrt{\frac{(a+b)^2k_1k_2k_3}{m[a^2k_1k_3+b^2k_2k_3+(a+b)^2k_1k_2]}},\qquad f=\frac{\omega}{2\pi}.$$

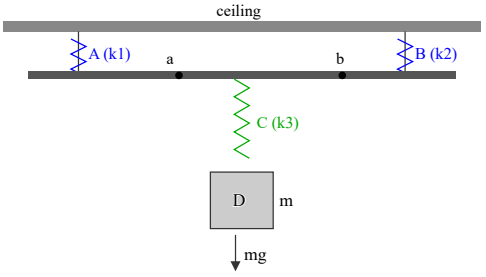
(3) 第（3）问：固有频率最大的条件 令 $\frac{d\omega}{da}=0$，对④式（以 a 为变量）求极值可得

$$a=\frac{k_2}{k_1}b.$$

此时 $\frac{d^2\omega}{da^2}=-\frac{k_1^3}{k_2b^2\sqrt{m}}\left(\frac{k_3}{(k_1+k_2)(k_1+k_2+k_3)}\right)^{3/2}<0$，为极大值。代入得最大固有角频率

$$\omega_{\max}=\sqrt{\frac{(k_1+k_2)k_3}{(k_1+k_2+k_3)m}},$$

相应固有频率 $f_{\max}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(k_1+k_2)k_3}{(k_1+k_2+k_3)m}}$。其物理意义是：当 C 的连接点使两弹簧伸长的“力比”与劲度反比匹配时，A、B 并联效果最优。



Q1 setup: light rod hung by springs A and B, block D attached to the rod via spring C

第二题（轨道型电磁发射器）

2. 计算题

答案 (1) 回路方程 $u=\dfrac{d}{dt}[L(x)i]+R(x)i=L(x)\dfrac{di}{dt}+iL_r'v_s+iR(x)$；(2) $a_s=\dfrac{L_r'i^2}{2(m_s+m_a)}$；(3) $I=3.0\times10^6$ A，$\tau=3.3\times10^{-4}$ s

详解

(1) 第（1）问：等效电路与回路方程 设回路总电感、总电阻分别为

$$L(x)=L_0+L_r'x+L_s,\qquad R(x)=R_0+R_r'x+R_s.$$

电枢运动使回路面积增大，磁链变化包含自感变化与 $L_r'x$ 随运动的变化。由基尔霍夫定律（考虑电感随时间变化）得回路方程

$$u=\frac{d}{dt}[L(x)i]+R(x)i=L(x)\frac{di}{dt}+iL_r'v_s+iR(x),$$

式中 u 为电源端电压，i 为回路电流，v_s 为电枢（发射体）速度。

(2) 第（2）问：加速度与电流的关系 电源输出功率 $p=iu=L(x)i\frac{di}{dt}+i^2L_r'v_s+i^2R(x)$。$dt$ 内输入电能 $dE=dE_m+dE_k+dE_R$，其中回路磁能 $E_m=\frac12L(x)i^2$、总动能 $E_k=\frac12(m_s+m_a)v_s^2$、热损耗 $dE_R=i^2R(x)dt$。求导得

$$\frac{dE}{dt}=L(x)i\frac{di}{dt}+\frac12L_r'i^2v_s+(m_s+m_a)v_s\frac{dv_s}{dt}+i^2R(x).$$

与 $p=\frac{dE}{dt}$ 比较，消去相同项得

$$i^2L_r'v_s=(m_s+m_a)v_s\frac{dv_s}{dt},$$

故发射体加速度大小与回路电流的关系为

$$a_s=\frac{dv_s}{dt}=\frac{L_r'i^2}{2(m_s+m_a)}.$$

(3) 第（3）问：恒流情形的电流与加速时间（数值回代） 恒流 I 时加速度恒定：$a_s=\frac{L_r'I^2}{2(m_s+m_a)}$，电枢和发射体做初速为零的匀加速运动。由 $v_{sm}^2=2a_sx_{sm}$ 得

$$a_{sm}=\frac{v_{sm}^2}{2x_{sm}}=\frac{(3.0\times10^3)^2}{2\times500}\ \text{m/s}^2=9.0\times10^6\ \text{m/s}^2.$$

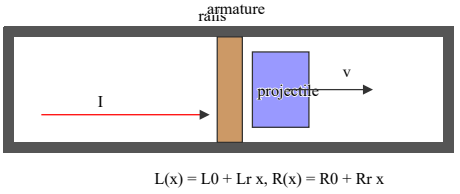
回代求电流

$$I=\sqrt{\frac{2(m_s+m_a)a_{sm}}{L_r'}}=\sqrt{\frac{2\times0.50\times9.0\times10^6}{1.0\times10^{-6}}}\ \text{A}=3.0\times10^6\ \text{A}.$$

加速时间

$$\tau=\frac{v_{sm}}{a_{sm}}=\frac{3.0\times10^3}{9.0\times10^6}\ \text{s}=3.3\times10^{-4}\ \text{s}.$$

数值回代核对：$a_s=\frac{1.0\times10^{-6}\times(3.0\times10^6)^2}{2\times0.50}=9.0\times10^6\ \text{m/s}^2$，与匀加速要求一致。



Q2 setup: rail-type electromagnetic launcher with armature and projectile

第三题（理想火箭方程：牛顿力学与相对论力学）

3. 计算题

答案 (1) $V_1 = -V_e \ln \dfrac{M}{M_i}$；(2) $V_1 = c\dfrac{1-(M/M_i)^{2V_e/c}}{1+(M/M_i)^{2V_e/c}}$；(3) 两种结果之差保留至 $(V_1/c)^2$ 项为零，实际差别为 $(V_1/c)^3$ 量级

详解

(1) 第（1）问：牛顿力学推导 设某瞬间火箭质量 M、速度 V_1，排出气体质量 dm。动量守恒（火箭动量变化等于排出气体的动量）给出

$$d(MV_1) = V_2\, dm.$$

质量守恒 $dM + dm = 0$；由速度叠加原理，排出气体在 S 系中的速度 $V_2 = V_e - V_1$。代入得

$$d(MV_1) = (V_e - V_1)dm = (V_e - V_1)dM,$$

展开并化简得

$$\frac{dM}{M} = -\frac{dV_1}{V_e}.$$

两边积分（初始 $M = M_i$，$V_1 = 0$）：

$$\ln \frac{M}{M_i} = -\frac{V_1}{V_e},$$

即齐奥尔科夫斯基火箭方程

$$V_1 = -V_e \ln \frac{M}{M_i} = V_e \ln \frac{M_i}{M}.$$

(2) 第（2）问：狭义相对论推导 相对论动量守恒与能量守恒分别给出

$$d\left(\frac{MV_1}{\sqrt{1-V_1^2/c^2}}\right) = V_2 \frac{dm}{\sqrt{1-V_2^2/c^2}}, \qquad -d\left(\frac{Mc^2}{\sqrt{1-V_1^2/c^2}}\right) = \frac{dm\,c^2}{\sqrt{1-V_2^2/c^2}}.$$

相对论速度叠加 $V_2 = \frac{V_e - V_1}{1 - V_1 V_e/c^2}$。两式相除（动量式除以能量式）消去 dm 项，整理得

$$\frac{dM}{M} = -\frac{dV_1}{V_e(1-V_1^2/c^2)}.$$

利用恒等式 $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)$ 积分得

$$\ln \frac{M}{M_i} = -\frac{c}{2V_e} \ln \frac{1+V_1/c}{1-V_1/c},$$

即

$$\frac{M}{M_i} = \left(\frac{1-V_1/c}{1+V_1/c}\right)^{c/2V_e},$$

解出

$$V_1 = c\,\frac{1-(M/M_i)^{2V_e/c}}{1+(M/M_i)^{2V_e/c}}.$$

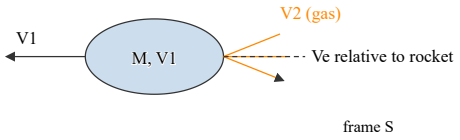
(3) 第（3）问：低速下两种结果的差别 利用 $\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2}$（$|x| \ll 1$）展开相对论结果：

$$\ln \frac{M}{M_i}\bigg|_{\text{相对论}} = -\frac{c}{2V_e} \ln \frac{1+V_1/c}{1-V_1/c} = -\frac{V_1}{V_e} + O\left(\left(\frac{V_1}{c}\right)^3\right),$$

而牛顿力学结果为 $\ln \frac{M}{M_i}\big|_{\text{牛顿}} = -\frac{V_1}{V_e}$。故

$$\left(\ln \frac{M}{M_i}\right)_{\text{相对论}} - \left(\ln \frac{M}{M_i}\right)_{\text{牛顿}} = O\left(\left(\frac{V_1}{c}\right)^3\right),$$

即在 $V_1 \ll c$ 时两种结果之差保留至 $(V_1/c)^2$ 项为零，实际差别为 $(V_1/c)^3$ 量级。



Q3 setup: rocket of mass M moving at V1 ejects gas of mass dm at speed Ve (relative)

第四题（光压驱动三棱柱的光镊问题）

4. 计算题

> **答案** (1)(a) $\ddot{y}+\dfrac{2I\cos^2\theta}{c\rho L^2}y=0$；(1)(b) $t_1=\dfrac{2\pi}{3\cos\theta}\sqrt{\dfrac{c\rho}{2I}}$；(2) 先偏小且差距增大，后偏大且差距减小

详解

(1) 第（1）问(a)：动力学方程 频率为 v 的光子能量 $E_0=hv$、动量 $p_0=\frac{hv}{c}$。光子沿 z 轴负向入射到斜面 B，入射角、反射角均为底角 θ，出射方向与 z 轴成 2θ 角；反射前后光子动量大小基本不变。单个光子在 B 面反射给物体的冲量的 y 分量大小为

$$|\,I_{0y}\,|=\frac{hv}{c}\sin 2\theta,$$

方向指向坐标原点 O。设三棱柱棱长为 d，当顶点垂足 $Q(0,y,0)$ 处于 y 轴正半轴（$y>0$）时，激光入射到 B 面的横截面积 $s=yd$，入射功率 $w=Iyd$，单位时间入射光子数 $n=\frac{w}{E_0}=\frac{Iyd}{hv}$；当 $y\le 0$ 时同理入射到 A 面，$n=-\frac{Iyd}{hv}$。于是物体所受合外力（y 分量）为线性回复力

$$F=nI_{0y}=-\frac{Id\sin 2\theta}{c}y=-ky,\qquad k=\frac{Id\sin 2\theta}{c}.$$

三棱柱质量 $m=\rho L^2 d\tan\theta$（底边 $2L$、底角 θ 的等腰三角形截面乘棱长），故动力学方程为

$$\ddot{y}+\frac{2I\cos^2\theta}{c\rho L^2}y=0,$$

即物体以原点为中心沿 y 轴做简谐运动，角频率 $\omega=\sqrt{\frac{2I\cos^2\theta}{c\rho L^2}}$。

(2) 第（1）问(b)：移动 3L/2 所需时间 初始位置 Q 在 $(0,L,0)$，初速为零，故简谐运动解为

$$y(t)=L\cos\left(t\sqrt{\frac{2I\cos^2\theta}{c\rho L^2}}\right).$$

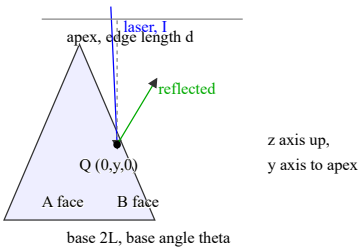
当小物体向 y 轴负方向移动 $\frac{3L}{2}$ 时 $y=-\frac{L}{2}$，即

$$\cos\left(t_1\sqrt{\frac{2I\cos^2\theta}{c\rho L^2}}\right)=-\frac{1}{2}\Rightarrow t_1\omega=\frac{2\pi}{3}.$$

解得

$$t_1=\frac{2\pi}{3\cos\theta}\sqrt{\frac{c\rho}{2I}}.$$

(3) 第（2）问：反射光子频率的定性比较 当小物体从初始位置向 y 轴负方向移动到距离为 L 的过程中，物体速度沿 $-y$ 方向，反射光子速度的 y 分量与物体运动方向相反（光子被“迎面”反射的物体在远离入射方向的多普勒退移），根据多普勒效应，反射光子频率比入射光子频率小；且随时间增加物体速度增大，频率差距越来越大。当小物体继续向 y 轴负方向移动到距初始位置 $\frac{3L}{2}$ 的过程中，物体已越过原点向 $-y$ 运动，反射光子速度的 y 分量与物体运动方向相同，反射光子频率比入射光子频率大；但随着物体速度减小（靠近端点），差距越来越小。



Q4 cross-section: laser beam hits face B of the isosceles triangular prism and is reflected

第五题（双圆筒毛细现象）

5. 计算题

> **答案** (1) $E_s(h) = -2\pi\alpha\cos\theta(R_1+R_2)h$；(2) $Q = \dfrac{2\pi\alpha^2\cos^2\theta(R_1+R_2)}{\rho g(R_1-R_2)}$；(3) $z = R_{地}\left(\sqrt{\dfrac{Q\rho g(R_1-R_2)}{2\pi\alpha^2\cos^2\theta(R_1+R_2)}}-1\right)$

详解

(1) 第（1）问：毛细作用势能 作用在两筒壁之间水面与玻璃壁交界线上水面表面张力沿器壁方向的投影大小为

$$F_s = 2\pi R_1\alpha\cos\theta + 2\pi R_2\alpha\cos\theta,$$

该力大小不变、方向竖直向下（沿器壁向下拉水面）。水面上升 h 过程中该力做的功 $W_s = -F_s h$，即系统毛细作用势能变化

$$E_s(h) - E_s(0) = W_s.$$

取大容器水面处为势能零点 $E_s(0) = 0$，得

$$E_s(h) = -2\pi\alpha\cos\theta\,(R_1+R_2)\,h.$$

(2) 第（2）问：上升过程释放的热量 水柱上升 h 引起的重力势能改变为

$$E_G = \frac{1}{2}\rho g(\pi R_1^2 - \pi R_2^2)h^2.$$

系统总势能

$$E(h) = E_s + E_G = \frac{1}{2}\pi\rho g(R_1^2-R_2^2)h^2 - 2\pi\alpha\cos\theta(R_1+R_2)h.$$

平衡时势能最小，$\left.\frac{dE}{dh}\right|_{h=h_e} = 0$ 给出 $\rho g h_e(R_1^2-R_2^2) = 2R_1\alpha\cos\theta + 2R_2\alpha\cos\theta$，解得平衡高度

$$h_e = \frac{2\alpha\cos\theta}{\rho g(R_1-R_2)}.$$

平衡时 $E_s(h_e) = -\frac{4\pi\alpha^2\cos^2\theta(R_1+R_2)}{\rho g(R_1-R_2)}$，$E_G(h_e) = \frac{2\pi\alpha^2\cos^2\theta(R_1+R_2)}{\rho g(R_1-R_2)}$。毛细作用势能的减小一部分转化为水的重力势能，另一部分克服摩擦耗散为热，故释放热量

$$Q = [-E_s(h_e)] - E_G(h_e) = \frac{2\pi\alpha^2\cos^2\theta(R_1+R_2)}{\rho g(R_1-R_2)}.$$

(3) 第（3）问：高空飞机中放热 Q 对应的高度 高空重力加速度变小。由万有引力定律

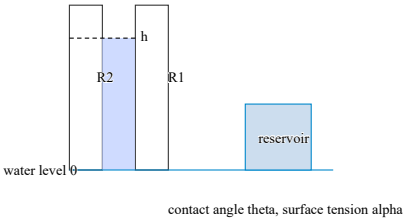
$$mg_z = \frac{GMm}{(R_{地}+z)^2}, \qquad g = \frac{GM}{R_{地}^2},$$

得 $g_z = \frac{g}{(1+z/R_{地})^2}$。代入放热表达式得高度 z 处的放热

$$Q = \frac{2\pi\alpha^2\cos^2\theta(R_1+R_2)}{\rho g(R_1-R_2)}\left(1+\frac{z}{R_{地}}\right)^2,$$

反解得飞机距地面高度

$$z = R_{地}\left(\sqrt{\frac{Q\rho g(R_1-R_2)}{2\pi\alpha^2\cos^2\theta(R_1+R_2)}}-1\right).$$



Q5 setup: water rises to height h between two coaxial cylinders of radii R1 and R2

第六题（火星视运动的逆行与顺行）

6. 计算题

> **答案** 相邻两次冲日间隔内：逆行约 73 d，顺行约 706 d

详解

(1) 解法一：角速度法（求留的时刻） 选火星冲日（日、地、火共线）为计时零点，在以地心为原点的平动坐标系 o-xy 中火星位置

$$x = R_m\cos\omega_m t - R_0\cos\omega_0 t, \qquad y = R_m\sin\omega_m t - R_0\sin\omega_0 t.$$

火星-地球连线与 x 轴夹角 ϕ 满足

$$\tan\phi = \frac{R_m\sin\omega_m t - R_0\sin\omega_0 t}{R_m\cos\omega_m t - R_0\cos\omega_0 t}.$$

对时间求导，顺行/逆行对应 $\dot\phi$ 为正/负。令 $\dot\phi = 0$（留）得

$$\omega_m R_m^2 + \omega_0 R_0^2 - (\omega_m+\omega_0)R_m R_0\cos[(\omega_0-\omega_m)t] = 0,$$

解出

$$t = \pm\frac{1}{\omega_0-\omega_m}\arccos\frac{\omega_m R_m^2+\omega_0 R_0^2}{(\omega_m+\omega_0)R_m R_0}.$$

相邻两次冲日间隔内仅在该区间（宽度为上式两根之差）内 $\dot\phi<0$，故逆行总时间

$$t_{逆} = \frac{2}{\omega_0-\omega_m}\arccos\frac{\omega_m R_m^2+\omega_0 R_0^2}{(\omega_m+\omega_0)R_m R_0} = \frac{T_0}{\pi(1-n^{-3/2})}\arccos\frac{n+n^{1/2}}{n^{3/2}+1},$$

式中 $n = \frac{R_m}{R_0} = 1.524$，$T_0 = 365$ d（由开普勒第三定律 $\omega_m^2 R_m^3 = \omega_0^2 R_0^3$ 换算）。代入数值得

$$t_{逆} = 0.1991T_0 = 72.7\text{ d} \approx 73\text{ d}.$$

(2) 冲日间隔与顺行时间（数值回代） 相邻两次冲日时间满足

$$T=\frac{2\pi}{\omega_0-\omega_m}=\frac{T_0T_m}{T_m-T_0}=\frac{T_0}{1-n^{-3/2}}\approx 779\ \mathrm{d}.$$

火星顺行时间为

$$t_{\text{顺}}=T-t_{\text{逆}}=(779-73)\ \mathrm{d}=706\ \mathrm{d}.$$

核对：$0.1991\times 365=72.7$；$1-n^{-3/2}=1-1.524^{-1.5}=0.4686$，$365/0.4686=779$ d，回代一致。

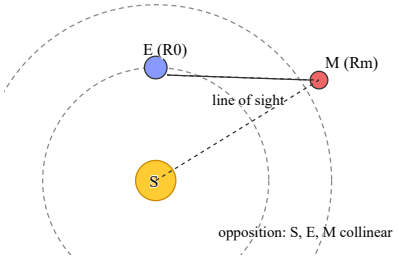
(3) 解法二：相对速度法（验证） 留的位置对应火星相对地球速度 $\mathbf{v}'_m=\mathbf{v}_m-\mathbf{v}_E$ 与地火连心线 $\overline{EM}$ 平行（相对切向速度为零）。设此时日心到地、火的矢径与连心线夹角为 θ、φ，由正弦定理与速度关系、开普勒第三定律联立解得

$$\cos\theta=\frac{n+n^{1/2}}{n^{3/2}+1},\qquad \theta=\pm 16.79^{\circ}.$$

相邻两次冲日间隔内仅当相对日心角 $\theta\in(-16.79^{\circ},16.79^{\circ})$ 时视运动逆行，故

$$t_{\text{逆}}=\frac{2\times 16.79^{\circ}}{360^{\circ}}T=0.09328T\approx 73\ \mathrm{d},\qquad t_{\text{顺}}=779-73=706\ \mathrm{d}.$$

与解法一一致。



Q6 geometry: Sun S, Earth E and Mars M at opposition and at a generic configuration

第七题（飞行时间质谱仪 TOFMS 的分辨率）

7. 计算题

> **答案** (1) $R=\dfrac{t}{2\Delta t}$；(2) $L=2\left(\sqrt{k^3}-k(\sqrt{k}-1)\dfrac{E_s}{E_1}\right)S$，$k=\dfrac{E_sS+E_1D_1}{E_sS}$；(3) $L=(E_sS+E_1D_1)\left(\dfrac{\sqrt{k}}{E_s}+\dfrac{1-\sqrt{k}}{E_1}+\dfrac{2(1-\sqrt{k'})}{E_2}+\dfrac{2\sqrt{k'}}{E_3}\right)$，$k'=\dfrac{E_sS+E_1D_1}{E_sS+E_1D_1-E_2D_2}$

详解

(1) 第（1）问：理想 TOFMS 的分辨率 离子源区初速为零的匀加速运动：$a_0=\frac{qE_s}{m}$，飞行时间

$$t_s=\sqrt{\frac{2S}{a_0}}=\sqrt{\frac{2mS}{qE_s}}.$$

漂移区末速度 $v_0=a_0t_s=\sqrt{\frac{2qE_sS}{m}}$，漂移时间

$$t_L=\frac{L}{v_0}=L\sqrt{\frac{m}{2qE_sS}}.$$

总时间

$$t=\sqrt{\frac{m}{q}}\left(\sqrt{\frac{2S}{E_s}}+\frac{L}{\sqrt{2E_sS}}\right)=\sqrt{\frac{m}{q}}\,k_0,\qquad k_0=\sqrt{\frac{2S}{E_s}}+\frac{L}{\sqrt{2E_sS}}.$$

即 $\frac{m}{q}=\frac{t^2}{k_0^2}$，微分得 $\frac{dm}{m}=\frac{2dt}{t}$。取 $dt=\Delta t$ 对应最小分辨质量 Δm，故

$$R=\frac{m}{\Delta m}=\frac{t}{2\Delta t}.$$

(2) 第（2）问：二级加速时漂移区长度 L 的选择 第二加速区长度 D_1、场强 E_1，离子做初速 v_0 的匀加速运动，由 $(v_0+a_1t_{d1})^2-v_0^2=2a_1D_1$（$a_1=\frac{qE_1}{m}$）解得

$$t_{d1}=\sqrt{\frac{2m}{q}}\frac{1}{E_1}\left(\sqrt{E_sS+E_1D_1}-\sqrt{E_sS}\right),$$

漂移时间

$$t_L=\sqrt{\frac{2m}{q}}\frac{L}{2}\frac{1}{\sqrt{E_sS+E_1D_1}}.$$

总时间 $t=t_s+t_{d1}+t_L$。对产生位置的差别 S 求微商 $\frac{dt}{dS}$，令其为零以使 ΔS 的影响最小：

$$\frac{1}{\sqrt{E_sS}}+\frac{E_s}{E_1\sqrt{E_sS+E_1D_1}}-\frac{E_s}{E_1\sqrt{E_sS}}-\frac{L}{2}\frac{E_s}{\sqrt{(E_sS+E_1D_1)^3}}=0,$$

解得

$$L=2\sqrt{(E_sS+E_1D_1)^3}\left(\frac{1}{E_s\sqrt{E_sS}}+\frac{1}{E_1\sqrt{E_sS+E_1D_1}}-\frac{1}{E_1\sqrt{E_sS}}\right)=2\left(\sqrt{k^3}-k(\sqrt{k}-1)\frac{E_s}{E_1}\right)S,$$

式中 $k=\frac{E_sS+E_1D_1}{E_sS}$。

(3) 第（3）问：反射式 TOFMS 的 L 反射器由两级减速电场 E_2（长度 D_2）、E_3（长度 D_3）组成，离子往返对称，总时间

$$t=t_s+t_{d1}+2t_L+2t_{d2}+2t_{d3},$$

其中

$$t_{d2}=\sqrt{\frac{2m}{q}}\frac{1}{E_2}\left(\sqrt{E_sS+E_1D_1}-\sqrt{E_sS+E_1D_1-E_2D_2}\right),$$

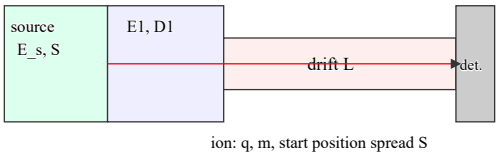
$$t_{d3}=\sqrt{\frac{2m}{q}}\frac{1}{E_3}\sqrt{E_sS+E_1D_1-E_2D_2}.$$

对 S 微商并令 $\frac{dt}{dS}=0$，解得

$$L=\sqrt{(E_sS+E_1D_1)^3}\left[\frac{1}{E_s\sqrt{E_sS}}+\frac{1}{E_1}\left(\frac{1}{\sqrt{E_sS+E_1D_1}}-\frac{1}{\sqrt{E_sS}}\right)+\frac{2}{E_2}\left(\frac{1}{\sqrt{E_sS+E_1D_1}}-\frac{1}{\sqrt{E_sS+E_1D_1-E_2D_2}}\right)+\frac{2}{E_3}\frac{1}{\sqrt{E_sS+E_1D_1-E_2D_2}}\right]$$

$$=(E_sS+E_1D_1)\left(\frac{\sqrt{k}}{E_s}+\frac{1-\sqrt{k}}{E_1}+\frac{2(1-\sqrt{k'})}{E_2}+\frac{2\sqrt{k'}}{E_3}\right),$$

式中 $k=\frac{E_sS+E_1D_1}{E_sS}$，$k'=\frac{E_sS+E_1D_1}{E_sS+E_1D_1-E_2D_2}$。题给条件 $E_sS+E_1D_1\le E_2D_2+E_3D_3$ 保证所有离子均能在反射器内反转方向。



Q7 basic TOFMS: source region (Es, S), second acceleration (E1, D1), drift tube L and detector

第八题（非均匀大气中激光的传播与瞄准）

8. 计算题

答案 (1) $y=\dfrac{\alpha^2}{4n_0^2\sin^2\theta_0}x^2+\dfrac{x}{\tan\theta_0}$；(2) $x_{a\max}=\dfrac{2n_0}{\alpha}\sqrt{y_a}$；(3) $\theta_0(t)=\arctan\left[\dfrac{2n_0^2(x_0-vt)}{4n_0^2y_0-\alpha^2(x_0-vt)^2}+\sqrt{\left(\dfrac{2n_0^2(x_0-vt)}{4n_0^2y_0-\alpha^2(x_0-vt)^2}\right)^2+\dfrac{\alpha^2(x_0-vt)^2}{4n_0^2y_0-\alpha^2(x_0-vt)^2}}\right]$；(4) $0<v<\dfrac{2n_0(t_a\sqrt{gy_a}-\sqrt{2}y_a)}{\alpha(gt_a^2-2y_a)}$

详解

(1) 第（1）问：激光轨迹方程 把大气分成水平薄层，由折射定律 $n(y)\sin\theta(y)=$ 常数。光线从原点出射时该常数为 $n_0\sin\theta_0$。几何关系 $\frac{dx}{dy}=\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$ 给出

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{n^2}{n_0^2\sin^2\theta_0}-1}.$$

代入 $n^2=n_0^2+\alpha^2y$：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\alpha}{n_0\sin\theta_0}\sqrt{\frac{n_0^2}{\alpha^2}\cos^2\theta_0+y},$$

分离变量积分

$$\frac{dy}{\sqrt{\frac{n_0^2}{\alpha^2}\cos^2\theta_0+y}}=\frac{\alpha}{n_0\sin\theta_0}dx,$$

得

$$2\sqrt{\frac{n_0^2}{\alpha^2}\cos^2\theta_0+y}+C=\frac{\alpha}{n_0\sin\theta_0}x.$$

由 $x=0$ 时 $y=0$ 定出 $C=-\frac{2n_0}{\alpha}\cos\theta_0$，整理得激光轨迹方程

$$y=\frac{\alpha^2}{4n_0^2\sin^2\theta_0}x^2+\frac{x}{\tan\theta_0},$$

这是顶点在第 III 象限、开口向上、过 O 点的一段抛物线。

(2) 第（2）问：可照射目标的最大 x 坐标 给定 y 时，θ_0 越大 x 越大；当 $\theta_0=\pi/2$（水平出射）时抛物线顶点到达 O 点，x 方向达到最远。把 $\theta_0=\pi/2$ 与 A 点坐标 (x_a,y_a) 代入轨迹方程：

$$y_a=\frac{\alpha^2}{4n_0^2}x_a^2,$$

解得

$$x_{a\max}=\frac{2n_0}{\alpha}\sqrt{y_a}.$$

(3) 第（3）问：出射角随时间的变化 目标坐标 (x_a, y_a) 应满足轨迹方程

$$y_a = \frac{\alpha^2}{4n_0^2 \sin^2\theta_0} x_a^2 + \frac{x_a}{\tan\theta_0}.$$

利用 $\sin^2\theta_0 = \frac{\tan^2\theta_0}{1+\tan^2\theta_0}$ 整理成关于 $\tan\theta_0$ 的一元二次方程

$$(4n_0^2 y_a - \alpha^2 x_a^2)\tan^2\theta_0 - 4n_0^2 x_a \tan\theta_0 - \alpha^2 x_a^2 = 0,$$

解得

$$\tan\theta_0 = \frac{2n_0^2 x_a}{4n_0^2 y_a - \alpha^2 x_a^2} + \sqrt{\left(\frac{2n_0^2 x_a}{4n_0^2 y_a - \alpha^2 x_a^2}\right)^2 + \frac{\alpha^2 x_a^2}{4n_0^2 y_a - \alpha^2 x_a^2}},$$

因目标在第 I 象限且 $0 \le x_a \le \frac{2n_0}{\alpha}\sqrt{y_a}$、$0 \le \theta_0 \le \pi/2$，根号前取正号。目标运动轨迹 $x_a = x_0 - vt$、$y_a = y_0$，代入即得激光出射角随时间的变化规律

$$\theta_0(t) = \arctan\left[\frac{2n_0^2(x_0 - vt)}{4n_0^2 y_0 - \alpha^2(x_0 - vt)^2} + \sqrt{\left(\frac{2n_0^2(x_0 - vt)}{4n_0^2 y_0 - \alpha^2(x_0 - vt)^2}\right)^2 + \frac{\alpha^2(x_0 - vt)^2}{4n_0^2 y_0 - \alpha^2(x_0 - vt)^2}}\right].$$

(4) 第（4）问：安全击毁对应的目标速度范围 飞行时间分两段：受激光照射到被摧毁的时间 t_a，以及刚被摧毁时水平投出的炸弹落到地面所需时间 t_g。炸弹做平抛运动：

$$t_g = \sqrt{\frac{2y_a}{g}}.$$

目标从被照射到炸弹落地全过程的水平飞行距离

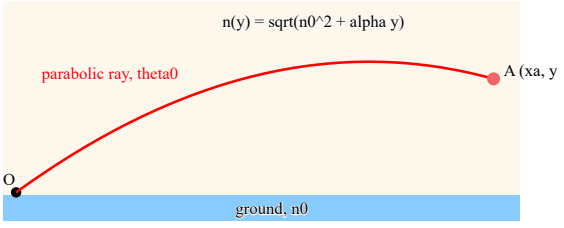
$$s = v\left(t_a + \sqrt{\frac{2y_a}{g}}\right).$$

安全击毁要求炸弹落地点在激光器（原点）之外，即 $s < x_{a\max}$，其中 $x_{a\max} = \frac{2n_0}{\alpha}\sqrt{y_a}$。解出

$$v < \frac{\frac{2n_0}{\alpha}\sqrt{y_a}}{t_a + \sqrt{\frac{2y_a}{g}}} = \frac{2n_0\left(t_a\sqrt{gy_a} - \sqrt{2}\,y_a\right)}{\alpha(gt_a^2 - 2y_a)},$$

又 $v > 0$，故目标飞行器 A 的速度范围为

$$0 < v < \frac{2n_0\left(t_a\sqrt{gy_a} - \sqrt{2}\,y_a\right)}{\alpha(gt_a^2 - 2y_a)}.$$



Q8 setup: laser launched from O bends along a parabola in stratified atmosphere toward target A

逐光知理 · 竞赛答案册 · 易错点速查

第32届全国中学生物理竞赛决赛理论 · 易错点速查

补在原册之后：原册答案与详解未作任何改动

共 6 条 · 绑定本卷题号

只挑本卷最容易失分的动作，按「错法 / 机理 / 正解」三段写，题号与原册一致；公式沿用原册口径。

第 1 题 · 第(1)(3)问

错法 对轻杆列力矩平衡时把支点取在物块 D 的悬挂点，或直接把 A、B 两弹簧按并联 k_1+k_2 并入 C 的劲度；第⑶问把频率最大条件写成 $a/b=k_2/k_1$。

机理 轻杆上 A、B 拉力 F_1、F_2 到两悬挂点的力臂分别为 a、b，以 C 与杆连接点为支点才有 $F_1a=F_2b$，再与竖直方向合力 $F_1+F_2-mg=0$ 联立；两弹簧通过杠杆作用到末端，等效劲度含 a、b 与各 k 的交叉项，不是简单并联。极值条件由对 a/b 求导得到 $a/b=k_1/k_2$，写反即把两弹簧的匹配关系颠倒。

正解 先由力矩与合力联立解出 $F_1=\frac{b}{a+b}mg$、$F_2=\frac{a}{a+b}mg$，再由胡克定律求伸长；频率最大时 $a/b=k_1/k_2$，代入得 $\omega_{\max}=\sqrt{\frac{(k_1+k_2+k_3)k_3}{m(k_1+k_2)}}$。

第 2 题 · 第(1)(2)问

错法 回路方程写成 $u=L(x)\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+iR(x)$，漏掉电感随位置变化带来的运动电动势；加速度写成 $a_s=\frac{L_r'i^2}{m_s}$，或质量只取电枢 m_s。

机理 电感 $L(x)$ 随电枢位置变化，磁链 $L(x)i$ 对时间求导含两项：$L(x)\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ 与 $iL_r'v_s$，后者是运动电动势，漏掉后方程不闭合。能量守恒中磁能 $\frac{1}{2}L(x)i^2$、总动能 $\frac{1}{2}(m_s+m_a)v_s^2$、焦耳热三项并列，求导后交叉项给出 $L_r'i^2v_s=2(m_s+m_a)v_sa_s$，故加速度含 1/2，质量是电枢与发射体之和。

正解 回路方程 $u=L(x)\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+iL_r'v_s+iR(x)$；加速度 $a_s=\frac{L_r'i^2}{2(m_s+m_a)}$，恒流时按匀加速 $v_s^2=2a_sx_{sm}$ 回代电流与时间。

第 3 题 · 第(3)问

错法 低速比较时认为相对论结果与牛顿结果在 $(V_1/c)^2$ 阶就有差别，或把展开后一阶、二阶项的残留当成两者之差。

机理 相对论火箭方程在 $V_1/c\ll1$ 下按 $\ln(1+x)$ 展开，V_1/c 的一次项与牛顿式相同，二次项也相消；两者之差从 $(V_1/c)^3$ 阶才开始出现，即低速下相对论修正是三阶小量。若在二阶就报差异，说明展开时没有把动量式与能量式相除后的对数结构对齐。

正解 保留到 $(V_1/c)^2$ 项，两式之差为零；实际差别为 $(V_1/c)^3$ 量级，比较时先写明展开阶数再下结论。

第 5 题 · 第(2)问

错法 写水柱重力势能时把环形截面面积取成 $\pi(R_1^2+R_2^2)$；或把毛细作用势能的减小全部当作重力势能增量，放热 Q 算成重力势能增量本身。

机理 两同轴圆筒之间的水柱截面是外圆减内圆，面积为 $\pi(R_1^2-R_2^2)$，重力势能 $E_G=\frac{1}{2}\rho g\pi(R_1^2-R_2^2)h^2$。毛细力做功释放的能量一部分转化为水的重力势能，另一部分克服摩擦耗散为热，放热是毛细势能减少量减去重力势能增量，方向不能反。

正解 总势能 $E(h)=E_G+E_s$，由 $\mathrm{d}E/\mathrm{d}h=0$ 定平衡高度 $h_e=\frac{2\alpha\cos\theta(R_1+R_2)}{\rho g(R_1^2-R_2^2)}$；放热 $Q=[-E_s(h_e)]-E_G(h_e)=\frac{2\pi\alpha\cos\theta(R_1+R_2)}{\rho g(R_1^2-R_2^2)}$。

第 6 题 · 第(1)(2)问

错法　算顺行时间时用地球周期 365 d 直接减逆行天数；或把留的时刻条件写成 $\dot{\phi}=1$，符号取反。

机理　火星与地球的会合周期不是一年，由 $T=\frac{T_0T_m}{T_m-T_0}$ 给出，约 779 d；顺行时间是会合间隔减去逆行时间，不能用 365 d 减。视运动顺行、逆行由地火连线方位角的变化率 $\dot{\phi}$ 的正负判定，留的位置对应 $\dot{\phi}=0$，不是取某个正值。

正解　先由开普勒第三定律换算火星角速度，令 $\dot{\phi}=0$ 解出留的时刻，得逆行约 73 d；会合间隔约 779 d，顺行时间 $t_{\text{顺}}=T-t_{\text{逆}}\approx 706$ d。

第 8 题 · 第(4)问

错法　安全速度只按激光照射时间算水平距离，漏掉炸弹平抛落地时间；或把平抛时间写成 $t_g=\sqrt{2g/y_a}$。

机理　目标被照射后投出的炸弹做平抛运动，竖直方向自由下落 $y_a=\frac{1}{2}gt_g^2$，落地时间 $t_g=\sqrt{2y_a/g}$；全过程水平距离是目标在照射段与炸弹落地段两段时间内的位移之和 $s=v(t_a+t_g)$。安全击毁要求炸弹落地点在激光器之外，即 $s<x_{a,\max}$，只算照射段会把安全速度上限放宽。

正解　先算 $t_g=\sqrt{2y_a/g}$，再由 $v(t_a+t_g)<x_{a,\max}=\frac{2n_0}{\alpha}\sqrt{y_a}$ 解出速度上限，结合 $v>0$ 写出安全区间。