逐光知理 · 高考物理参考答案与详解

第33届全国中学生物理竞赛复赛理论试题

参考答案与详解（本站独立编撰）

全国中学生物理竞赛 · 复赛理论部分 · 8 道大题（力学、热学、电磁学、光学、近代物理各 1 题以上）

本册答案与解析由逐光知理物理教研组独立编撰，独立完成全部推导与数值回代核对，未照录任何外部答案。原卷为公式图片型排版，个别几何量符号按本站建模给出，若与原卷印刷符号不符以卷面为准。

答案速查

题号	主考点	答案摘要
1	柱面间空气薄膜的等厚干涉（类牛顿环）	第 k 级亮纹在 X-Y 平面的投影为椭圆族 $\dfrac{x^2}{R_1}+\dfrac{y^2}{R_2}=\dfrac{(2k-1)\lambda}{2}\quad(k=1,2,\dots)$ 半长轴（沿 X）$a_k=\sqrt{(2k-1)\lambda R_1/2}$，半短轴（沿 Y）$b_k=\sqrt{(2k-1)\lambda R_2/2}$。
2	密闭容器气体状态方程与连通器液位（含水的热膨胀）	（1）中午观察柱内水位 $l_1\approx 1.82$ m；（2）罐内空气对外做功 $W\approx -1.9\times10^{3}$ J，吸热 $Q\approx 5.5\times10^{4}$ J，过程热容量 $C\approx 2.77\times10^{3}$ J·K^{-1}。
3	万有引力、开普勒第三定律与引力俘获判据	（1）$v_{ej}=\sqrt{Gm_s\left(\dfrac{1}{r_e}+\dfrac{1}{r_j}-\dfrac{2\cos\theta}{\sqrt{r_e r_j}}\right)}$，$v_0=\sqrt{\dfrac{2Gm_j}{r_{ej}}}$，其中 $r_{ej}=\sqrt{r_e^2+r_j^2-2r_e r_j\cos\theta}$；（2）$(v_{ej}/v_0)_{\min}\approx 26\gg 1$，地球不会围绕木星转动。
4	变质量（绳段转移）系统与软绳张力	（1）$v^2=gy\dfrac{4ML+2mL-my}{2ML+mL-my}$，$a=g\left[1+\dfrac{my(4ML+2mL-my)}{2(2ML+mL-my)^2}\right]$；速度上限 $v_{y\to L}=\sqrt{2gL+\dfrac{m}{2M}gL}$，加速度上限 $a_{y\to L}=g\left[1+\dfrac{m(4M+m)}{8M^2}\right]$。（2）$F_b=mg\left[\dfrac{L+y}{2L}+\dfrac{y(4ML+2mL-my)}{4L(2ML+mL-my)}\right]$。
5	缠绕绳拉伸传感器的伸长率、电阻变化与轴向磁场	（1）伸长率 $\varepsilon\approx\dfrac{\pi r_2(3-2\sqrt{\cos\theta}-\cos\theta)}{4r_1}\cdot\dfrac{n}{N}$；电阻变化率 $\dfrac{\Delta R}{R_0}=\left[\dfrac{(3-2\sqrt{\cos\theta}+3\cos\theta)^2\rho r_2^2+4\rho r_1^2\cos^2\theta}{4\rho r_1^2\cos^2\theta+4\cos\theta(3-2\sqrt{\cos\theta}+3\cos\theta)tr_1r_2R_c}\right.$ （2）未拉伸时轴向磁场为零；拉伸后 $B=\dfrac{\mu_0 r_2^2 nI}{2D^3}$。
6	光电倍增管的级联倍增能耗与磁聚焦	（1）放大一个光电子的平均能耗 $\dfrac{E}{n_p}=[1+n+\eta(\delta-1)]\left\{\dfrac{\sigma\delta\left[(\sigma\delta)^n-1\right]}{(\sigma\delta-1)^2}-\dfrac{n}{\sigma\delta-1}\right\}eV$；当 $\delta\sigma>1$、$n\gg1$ 时 $\dfrac{E}{n_p}\approx\dfrac{\eta(\delta-1)(\delta\sigma)^{n+1}}{(\delta\sigma-1)^2}eV$。（2）磁场垂直纸面向里；收集电子最多时 $B=\dfrac{4\sqrt{2mE_e}}{5ea}$；有电子被收集的条件 $\dfrac{3\sqrt{2mE_e}}{5ea}\le B\le\dfrac{\sqrt{2mE_e}}{ea}$。
7	双杆刚体定轴转动（固结与铰接两种情形）	（1）（i）$\alpha=\dfrac{6g}{7l}$；（ii）$\omega=\sqrt{\dfrac{3g}{7l}(5\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta-2\sqrt{3})}$。（2）$\alpha_1=\dfrac{9g}{11l}$，$\alpha_2=\dfrac{15g}{11l}$，两杆相互作用力 $F=\dfrac{\sqrt{37}}{22}mg\approx0.276mg$，与竖直方向夹角 $\tan\varphi=\dfrac{3\sqrt{3}}{11}\approx0.472$。

8	相对论能动量守恒与部分子对撞产生新粒子	（1）$x_a x_b = \dfrac{m_s^2 c^4}{4E^2} = 0.0051$；（2）$\nu_1 = \nu_2 = \dfrac{m_s c^2}{2h} \approx 1.2 \times 10^{26}\ \mathrm{Hz}$；（3）$\theta \approx \dfrac{4m_A}{m_s} = 0.0040$（弧度）。

理论试题（共 8 题）

1. 计算题

答案 第 k 级亮纹在 X-Y 平面的投影为椭圆族

$$\frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2} = \frac{(2k-1)\lambda}{2} \qquad (k = 1, 2, \dots)$$

半长轴（沿 X）$a_k = \sqrt{(2k-1)\lambda R_1/2}$，半短轴（沿 Y）$b_k = \sqrt{(2k-1)\lambda R_2/2}$。

详解

(1) 光程差 光沿 Z 轴负方向傍轴入射：一路在上柱面下表面直接反射（玻璃→空气，光疏→光密方向的反向，无半波损失）；另一路进入空气隙，在下柱面上表面反射（空气→玻璃，存在半波损失，相位突变 π，等效附加光程 $\lambda/2$）后返回并与之相遇。傍轴垂直入射时第二路光在空气隙中往返一次，故两束反射光的光程差为

$$\Delta L = 2d + \frac{\lambda}{2}$$

其中 d 为该处空气隙厚度。

(2) 空气隙厚度 设上柱面半径为 R_1、母线沿 Y（在 X-Z 面内弯曲），下柱面半径为 R_2、母线沿 X（在 Y-Z 面内弯曲）。由弓形高近似 $s^2 \approx 2Rd$（$d \ll R$），两柱面偏离公共切面 XOY 的高度分别为 $x^2/(2R_1)$ 与 $y^2/(2R_2)$，故

$$d(x, y) = \frac{x^2}{2R_1} + \frac{y^2}{2R_2}$$

(3) 亮纹条件 亮纹满足 $\Delta L = k\lambda$，即

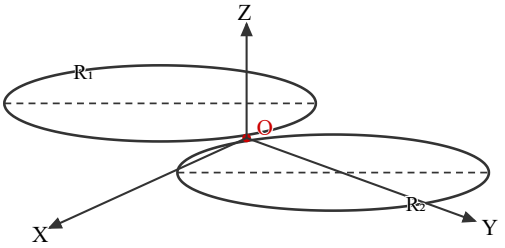
$$2d = \frac{(2k-1)\lambda}{2}, \qquad k = 1, 2, \dots$$

中心 O 处 $d = 0$ 为暗点（存在半波损失），与接触点为暗斑的牛顿环特征一致。

(4) 第 k 级亮纹方程 将 $d(x, y)$ 代入亮纹条件：

$$\frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2} = \frac{(2k-1)\lambda}{2}$$

这是中心在 O、主轴沿 X 与 Y 的椭圆，半轴分别为 $a_k = \sqrt{(2k-1)\lambda R_1/2}$、$b_k = \sqrt{(2k-1)\lambda R_2/2}$。回代检验：$d(a_k, 0) = (2k-1)\lambda/4$，$2d + \lambda/2 = k\lambda$，条件自洽。



两正交平凸柱面于 O 点外切，光沿 Z 轴负方向傍轴入射（示意）

本题按“上柱面曲率沿 X、下柱面曲率沿 Y”建模；若原卷图中 R_1 、R_2 与 X、Y 方向的对应与此不同，将结果中 R_1 、R_2 对调即可，以卷面为准。

2. 计算题

答案 （1）中午观察柱内水位 $l_1 \approx 1.82\ \mathrm{m}$；（2）罐内空气对外做功 $W \approx -1.9\times10^{3}\ \mathrm{J}$，吸热 $Q \approx 5.5\times10^{4}\ \mathrm{J}$，过程热容量 $C \approx 2.77\times10^{3}\ \mathrm{J\cdot\ K^{-1}}$。

详解

(1) 清晨初态 罐内径 2.00 m，截面积 $S_1=\pi\times1.00^2\approx3.14\ \mathrm{m^2}$；观察柱内径 4.00 cm，截面积 $S'=\pi\times0.02^2\approx1.26\times10^{-3}\ \mathrm{m^2}$。密闭加水口瞬间罐内空气压强为大气压 $p_0=1.01\times10^{5}\ \mathrm{Pa}$，罐内水高与观察柱水位均为 $l_0=1.00\ \mathrm{m}$，空气体积

$$V_0=S_1(2.00-1.00)\approx3.14\ \mathrm{m^3},\qquad T_0=273.15+4.0=277.15\ \mathrm{K}$$

(2) 第（1）问：中午的方程组 设中午罐内水位 h_1、观察柱水位 l_1、两者之差 $\Delta h=l_1-h_1$、罐内气压 p_1，气温 $T_1=273.15+24.0=297.15\ \mathrm{K}$。三个方程：气体状态方程

$$\frac{p_1V_1}{T_1}=\frac{p_0V_0}{T_0},\qquad V_1=S_1(2.00-h_1)$$

水体积守恒（平均体膨胀系数 $\kappa=3.03\times10^{-4}\ \mathrm{K^{-1}}$，$\Delta T=20.0\ \mathrm{K}$）：

$$S_1h_1+S'l_1=(S_1+S')\times1.00\times(1+\kappa\Delta T)$$

膜受力平衡（观察柱顶通大气）：

$$p_1=p_0+\rho_1g\Delta h,\qquad \rho_1=\frac{\rho_0}{1+\kappa\Delta T}\approx994\ \mathrm{kg\cdot\ m^{-3}}$$

(3) 第（1）问：求解 联立消去 p_1、h_1 得关于 Δh 的一元二次方程，取合理解得 $\Delta h\approx0.81\ \mathrm{m}$（相应罐内气压升高 $\Delta p=\rho_1g\Delta h\approx7.9\times10^{3}\ \mathrm{Pa}\ll p_0$），$h_1\approx1.006\ \mathrm{m}$，故

$$l_1=h_1+\Delta h=\Delta h-\frac{V_1-V_0}{S_1}+1.00\approx1.82\ \mathrm{m}$$

水位明显上升主要来自水的热膨胀（$\kappa\Delta T\cdot\ S_1l_0\approx0.019\ \mathrm{m^3}$，经细观察柱放大为约 0.81 m 的水位差）。

(4) 第（2）问：对外做功 罐内空气体积缩小量可由水体积守恒写成

$$V_1-V_0=S'\Delta h-\kappa\Delta T\,S_1l_0\approx1.26\times10^{-3}\times0.81-0.019\approx-0.018\ \mathrm{m^3}$$

升温为准静态过程，且 $\Delta p\ll p_0$，平均压强 $\bar p=p_0+\Delta p/2\approx1.05\times10^{5}\ \mathrm{Pa}$，故对外做功

$$W=\bar p\,(V_1-V_0)\approx-1.05\times10^{5}\times0.018\approx-1.9\times10^{3}\ \mathrm{J}$$

即外界对罐内空气做功约 $1.9\times10^{3}\ \mathrm{J}$。

(5) 第（2）问：内能变化与吸热 常温下空气分子自由度为 5，摩尔数 $n=p_0V_0/(RT_0)\approx1145\ \mathrm{mol}$，

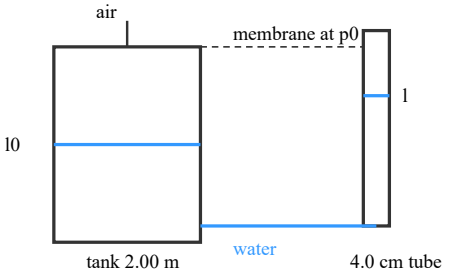
$$\Delta U=\frac{5}{2}nR\Delta T=\frac{5}{2}\frac{p_0V_0}{T_0}\Delta T\approx\frac{5}{2}\times1145\times20.0\approx5.72\times10^{4}\ \mathrm{J}$$

由热力学第一定律 $Q=\Delta U+W\approx5.72\times10^{4}-1.9\times10^{3}\approx5.5\times10^{4}\ \mathrm{J}$。

(6) 第（2）问：过程热容量

$$C=\frac{Q}{T_1-T_0}\approx\frac{5.54\times10^4}{20.0}\approx2.77\times10^3\ \mathrm{J\cdot\ K^{-1}}$$

介于定容热容量 $\frac{5}{2}nR\approx2.86\times10^3$ J/K 之下附近，因过程中空气被轻微压缩，吸热略小于等容吸热。



Sealed tank connected to a thin observation tube with flexible membrane at top; water levels l0 and l

观察柱截面积虽只有罐截面积约 1/2500，但水位差把水的膨胀量放大了同样倍数：S′Δh 与 ϰΔT · S₁ l₀ 同为 10^{-3} m³ 量级，列体积守恒方程时两者都必须保留。

3. 计算题 · 20分

答案 （1）$v_{ej}=\sqrt{Gm_s\left(\frac{1}{r_e}+\frac{1}{r_j}-\frac{2\cos\theta}{\sqrt{r_er_j}}\right)}$，$v_0=\sqrt{\frac{2Gm_j}{r_{ej}}}$，其中 $r_{ej}=\sqrt{r_e^2+r_j^2-2r_er_j\cos\theta}$；（2）$(v_{ej}/v_0)_{\min}\approx26\gg1$，地球不会围绕木星转动。

详解

(1) 太阳消失瞬间的速度 太阳质量突然变为零不改变地球、木星原有速度。消失前由万有引力提供向心力 $Gm_sm/r^2=mv^2/r$，得

$$v_e=\sqrt{\frac{Gm_s}{r_e}},\qquad v_j=\sqrt{\frac{Gm_s}{r_j}}$$

(2) 地球相对木星的速度 两者同向绕行，速度方向沿各自轨道切向、夹角为 θ，由矢量差

$$v_{ej}=\sqrt{v_e^2+v_j^2-2v_ev_j\cos\theta}=\sqrt{Gm_s\left(\frac{1}{r_e}+\frac{1}{r_j}-\frac{2\cos\theta}{\sqrt{r_er_j}}\right)}$$

若两者反向绕行，$\cos\theta$ 项变号，v_{ej} 只会更大。

(3) 不被俘获的最小速率 地球相对木星以 v_0 运动且到无穷远时速度恰为零，则木星—地球系统机械能为零：

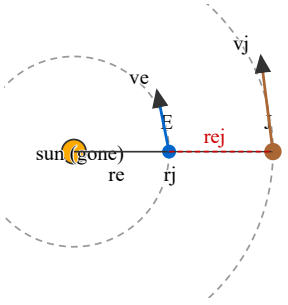
$$\frac{1}{2}m_ev_0^2-\frac{Gm_em_j}{r_{ej}}=0\ \Rightarrow\ v_0=\sqrt{\frac{2Gm_j}{r_{ej}}}$$

其中此刻地木距离 $r_{ej}=\sqrt{r_e^2+r_j^2-2r_er_j\cos\theta}$。若 $v_{ej}>v_0$，地球机械能为正，将逃逸至无穷远而不被俘获。

(4) 第（2）问：判据与数值 由开普勒第三定律 $r_j/r_e=\sqrt[3]{(T_j/T_e)^2}=\sqrt[3]{144}\approx 5.2$。$v_{ej}/v_0$ 在 $\theta=0$（太阳、地球、木星同侧共线，$r_{ej}=r_j-r_e$ 最小，v_0 最大而 v_{ej} 较小）时取最小：

$$\left(\frac{v_{ej}}{v_0}\right)_{\min}=\sqrt{\frac{m_s}{2m_j}\left(1+\frac{1}{5.2}-\frac{2}{\sqrt{5.2}}\right)}\cdot\ \frac{\sqrt[4]{1+5.2^2-2\times 5.2}}{\sqrt[4]{(5.2-1)^2}}\approx 26$$

回代核对：分子部分 $\sqrt{\frac{2.0\times10^{30}}{2\times1.9\times10^{27}}\times 0.3153}\approx 14.5$，距离因子 $\left(\frac{4.2^2}{5.2^2-2\times5.2+1}\right)^{1/4}\approx 1.8$，乘积约 26。$\theta$ 从 0 增大时 v_{ej} 单调增大、v_0 单调减小，故任意 θ 均有 $v_{ej}\gg v_0$：太阳消失后地球必定不被木星俘获，不会围绕木星转动。



Sun vanishes: Earth and Jupiter keep tangential velocities ve, vj; relative distance rej and relative speed vej decide capture

关键在于两个速度的比较对象——比较的是相对速度与当地逃逸速度；同侧共线时地木距离最小、判据最接近临界，是最不利情形，只需核对该情形。

4. 计算题 · 20分

答案 （1）$v^2=gy\,\dfrac{4ML+2mL-my}{2ML+mL-my}$，$a=g\left[1+\dfrac{my(4ML+2mL-my)}{2(2ML+mL-my)^2}\right]$；速度上限 $v_{y\to L}=\sqrt{2gL+\dfrac{m}{2M}gL}$，加速度上限 $a_{y\to L}=g\left[1+\dfrac{m(4M+m)}{8M^2}\right]$。（2）$F_b=mg\left[\dfrac{L+y}{2L}+\dfrac{y\,(4ML+2mL-my)}{4L(2ML+mL-my)}\right]$。

详解

(1) 第（1）问：能量守恒求速度 绳仅在自重下几乎不可伸长，自重引起的弹性势能可忽略；绳经弯折处由静止段转入运动段时按题设无能量损失。以桥面为势能零点，初态（绳对折、质心深度 $L/4$）机械能 $E_i=-mgL/4$。下落 y 时：蹦极者与下落绳段（长 $(L-y)/2$）以速度 v 运动，动能为 $E_k=\frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{2}m\frac{L-y}{2L}v^2$；下落段绳势能 $-m\frac{L-y}{2L}g\left(y+\frac{L-y}{4}\right)$，静止段（长 $(L+y)/2$）绳势能 $-m\frac{L+y}{2L}g\cdot\ \frac{L+y}{4}$，蹦极者势能 $-Mgy$。由 $E_i=E_k+E_p$ 化简得

$$v^2=gy\,\frac{4ML+2mL-my}{2ML+mL-my}$$

回代 $y=0$ 得 $v=0$，自洽。

(2) 第（1）问：加速度 将 v^2 两边对时间求导（$\mathrm{d}y/\mathrm{d}t=v$）：

$$2v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=g\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\left[2+\frac{my(4ML+2mL-my)}{(2ML+mL-my)^2}\right]$$

故加速度大小

$$a=g\left[1+\frac{my(4ML+2mL-my)}{2(2ML+mL-my)^2}\right]$$

(3) 第（1）问：速度与加速度上限 $v^2(y)$ 在 $0<y<L$ 内单调增，上限在 $y\to L$：

$$v_{y\to L}=\sqrt{gL\,\frac{4ML+mL}{2ML}}=\sqrt{2gL+\frac{m}{2M}gL}$$

加速度 a 也随 y 单调增（$\mathrm{d}a/\mathrm{d}y=mg\frac{(2M+m)^2L^2}{(2ML+mL-my)^3}>0$），上限

$$a_{y\to L}=g\,[1+\frac{mL(4ML+mL)}{2(2ML)^2}]=g\,[1+\frac{m(4M+m)}{8M^2}]$$

因 $M\gg m$，两者只比自由落体值略大。

(4) 第（2）问：悬点张力 对弯折处长 $\mathrm{d}y/2$ 的微段用动量定理：

$$(F_1+F_2)\,\mathrm{d}t+\frac{m\,\mathrm{d}y}{L}\frac{g\,\mathrm{d}t}{2}=0-\frac{m\,\mathrm{d}y}{L}\frac{v}{2}$$

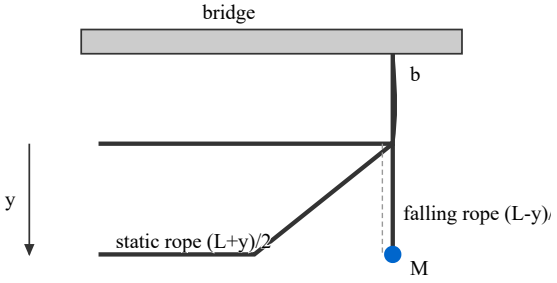
又弯折处无能量耗散要求两侧张力相等（$\mathrm{d}E_f/\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}(F_1-F_2)v=0\Rightarrow F_1=F_2$）。对下落系统（蹦极者 + 下落绳段）用牛顿第二定律联立，取 $\mathrm{d}y\to 0$，桥沿 b 处张力等于静止段重力与弯折转移的动量流之和：

$$F_b=\frac{m\,(L+y)}{2L}g+\frac{m}{4L}v^2$$

代入第（1）问的 v^2 得

$$F_b=mg\,[\frac{L+y}{2L}+\frac{y\,(4ML+2mL-my)}{4L\,(2ML+mL-my)}]$$

回代 $y=0$：$F_b=mg/2$，恰为半段绳重，自洽。



Rope of length L folded over edge b: falling segment (L-y)/2 moves with v, static segment (L+y)/2 hangs; jumper M at depth y

本题的核心是“弯折处无能耗 ⇒ 两侧张力相等”与“运动绳段长度随 y 变化”两个要点；若误把整条绳当作以同一速度运动，会丢掉 (L−y)/2L 因子。

5. 计算题

答案　（1）伸长率 $\varepsilon \approx \dfrac{\pi r_2(3-2\sqrt{\cos\theta}-\cos\theta)}{4r_1}\cdot\dfrac{n}{N}$；电阻变化率

$$\frac{\Delta R}{R_0}=\left[\frac{(3-2\sqrt{\cos\theta}+3\cos\theta)^2\rho r_2^2+4\rho r_1^2\cos^2\theta}{4\rho r_1^2\cos^2\theta+4\cos\theta(3-2\sqrt{\cos\theta}+3\cos\theta)tr_1r_2R_c}-2\right]\frac{n}{N}$$

（2）未拉伸时轴向磁场为零；拉伸后 $B=\dfrac{\mu_0 r_2^2 nI}{2D^3}$。

详解

(1) 第（1）问：伸长率　每圈绳中心线为长半轴 $a=r_2/\cos\theta$、短半轴 $b=r_2$ 的椭圆，周长

$$l=\pi\left(\frac{3(a+b)}{2}-\sqrt{ab}\right)=\frac{\pi r_2}{2}\left(\frac{3}{\cos\theta}+3-\frac{2}{\sqrt{\cos\theta}}\right)$$

拉伸后每个缝隙中那圈绳由未封闭圆环与两段平行于轴线的直线段串接，其路径长度

$$L=l-2\pi r_2+2r_1=\frac{\pi r_2}{2}\left(\frac{3}{\cos\theta}-\frac{2}{\sqrt{\cos\theta}}-1\right)+2r_1$$

传感器原长为 N 圈紧挨之长，伸长率

$$\varepsilon=\frac{n\,(L-2r_1/\cos\theta)}{L_1}\approx\frac{\pi r_2(3-2\sqrt{\cos\theta}-\cos\theta)}{4r_1}\cdot\frac{n}{N}$$

最后一步用 $r_1\ll r_2$ 略去含 r_1 的修正项。

(2) 第（1）问：电阻变化率　由电阻定律，每圈椭圆环沿轴向的电阻（内、外半圈并联，因子 $1/2$）为

$$R_1=\frac{1}{2}\rho\frac{\pi r_1}{lt}=\frac{\rho r_1\cos\theta}{(3-2\sqrt{\cos\theta}+3\cos\theta)r_2t}$$

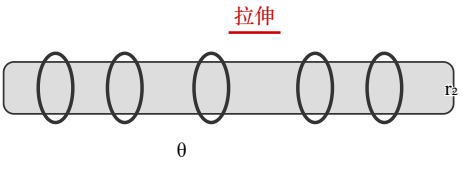
未拉伸时 $R_0=N(R_1+R_c)$（$N\gg1$，n 取 $N-1\approx N$ 个接触电阻）。拉伸后 n 个缝隙处的电阻由 $2R_c+R_1$ 变为 $R_2=\dfrac{(3-2\sqrt{\cos\theta}+3\cos\theta)\rho r_2}{4r_1t\cos\theta}$，故 $R_3=R_0-n(2R_c+R_1)+nR_2$，

$$\frac{\Delta R}{R_0}=\frac{R_3-R_0}{R_0}=\left[\frac{(3-2\sqrt{\cos\theta}+3\cos\theta)^2\rho r_2^2+4\rho r_1^2\cos^2\theta}{4\rho r_1^2\cos^2\theta+4\cos\theta(3-2\sqrt{\cos\theta}+3\cos\theta)tr_1r_2R_c}-2\right]\frac{n}{N}$$

(3) 第（2）问：未拉伸时的磁场　未拉伸时电流沿塑料棒轴向流过整层绳，由毕奥—萨伐尔定律，与轴向平行的电流在轴线上不产生轴向磁场分量，故 P 点沿轴向的磁感应强度为零。

(4) 第（2）问：拉伸后的磁场　拉伸后只有 n 个缝隙处绳构成（近似的）圆环电流，其两段直线段与缺口贡献可忽略。半径 r_2 的圆环电流 I 在轴线上距离 x 处产生的轴向磁场为 $B=\dfrac{\mu_0 I r_2^2}{2(r_2^2+x^2)^{3/2}}$。$D$ 远大于传感器长度，各缝隙环到 P 的距离均为 D，

$$B=\mu_0\frac{r_2^2 nI}{2D^3}$$



拉伸传感器示意：缝隙处一圈绳展开为未封闭圆环加两段直线（示意）

电阻变化率的分母中接触电阻项 Rc 与绳本身电阻须同时保留，只有在 Rc 不可忽略时“缝隙”才显著改变总电阻。

6. 计算题 · 20分

答案 （1）放大一个光电子的平均能耗 $\frac{E}{n_p}=[1+n+\eta(\delta-1)]\{\frac{\sigma\delta\,[(\sigma\delta)^n-1]}{(\sigma\delta-1)^2}-\frac{n}{\sigma\delta-1}\}\,eV$；当 $\delta\sigma>1$、$n\gg1$ 时 $\frac{E}{n_p}\approx\frac{\eta(\delta-1)(\delta\sigma)^{n+1}}{(\delta\sigma-1)^2}eV$。（2）磁场垂直纸面向里；收集电子最多时 $B=\frac{4\sqrt{2mE_e}}{5\,ea}$；有电子被收集的条件 $\frac{3\sqrt{2mE_e}}{5\,ea}\le B\le\frac{\sqrt{2mE_e}}{ea}$。

详解

(1) 第（1）问：倍增电子数 光阴极逸出 n_p 个光电子，其中 ηn_p 个打到第 1 倍增级，每个倍增 δ 倍；第 i 级逸出电子数可用归纳法写出

$$m_i=\eta n_p\delta\,(\sigma\delta)^{i-1},\qquad i=1,\dots,n$$

(2) 第（1）问：各级对能耗的贡献 第 i 级逸出的电子有 σ 份额进入下一级（加速电压 V）、其余直接到阳极（加速电压 $(n-i+1)V$）；光阴极直接到阳极的电子占 $1-\eta$。总能耗

$$E=en_p\eta V+en_p(1-\eta)(n+1)V+\sum_{i=1}^{n}em_i(1-\sigma)(n-i+1)V+\sum_{i=1}^{n-1}em_i\sigma V$$

整理得

$$\frac{E}{n_p}=[1+n+\eta(\delta-1)]\{\frac{\sigma\delta\,[(\sigma\delta)^n-1]}{(\sigma\delta-1)^2}-\frac{n}{\sigma\delta-1}\}\,eV$$

(3) 第（1）问：大 n 近似 当 $\delta\sigma>1$、$n\gg1$ 时含 $(\delta\sigma)^n$ 因子的项占绝对主导，仅保留之：

$$\frac{E}{n_p}\approx\frac{\eta(\delta-1)(\delta\sigma)^{n+1}}{(\delta\sigma-1)^2}\,eV$$

(4) 第（2）问：磁场方向与四种临界半径 所加磁场应垂直纸面向里（使电子向第 $i+1$ 级偏转）。电子垂直于电极出射，圆心在电极所在直线上。四种临界轨迹的半径满足：

$$r_1=\sqrt{(3a-r_1)^2+a^2},\ r_2=\sqrt{(2a-r_2)^2+a^2},\ r_3=\sqrt{(2a-r_3)^2+a^2},\ r_4=\sqrt{(a-r_4)^2+a^2}$$

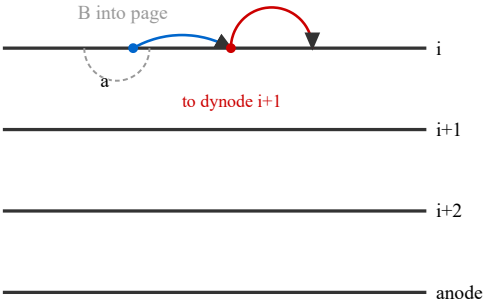
解得

$$r_1=\frac{5a}{3},\quad r_2=r_3=\frac{5a}{4},\quad r_4=a$$

(5) 第（2）问：磁场大小 由 $evB=mv^2/r$ 与 $E_e=\frac12mv^2$ 得 $r=\sqrt{2mE_e}/(eB)$，相应临界磁场

$$B_1=\frac{3\sqrt{2mE_e}}{5ea},\quad B_2=B_3=\frac{4\sqrt{2mE_e}}{5ea},\quad B_4=\frac{\sqrt{2mE_e}}{ea}$$

当 $B=B_2=B_3=\frac{4\sqrt{2mE_e}}{5ea}$ 时全部电子都被第 $i+1$ 级收集，收集最多；当 $\frac{3\sqrt{2mE_e}}{5ea}\le B\le\frac{\sqrt{2mE_e}}{ea}$ 时至少有部分电子被第 $i+1$ 级收集（B 再大或再小则一个都收不到）。



Electrodes spaced a apart, B into page; electrons leave dynode i normal to electrode and follow circular arcs of radius r = sqrt(2mEe)/(eB) with centers on the electrode line

注意区分“收集最多”（唯一最优 B）与“至少收集到一些”（一个闭区间）两种判据；圆心在电极延长线上是几何求解的关键。

7. 计算题

答案 （1）（i）$\alpha=\dfrac{6g}{7l}$；（ii）$\omega=\sqrt{\dfrac{3g}{7l}(5\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta-2\sqrt{3})}$。（2）$\alpha_1=\dfrac{9g}{11l}$，$\alpha_2=\dfrac{15g}{11l}$，两杆相互作用力 $F=\dfrac{\sqrt{37}}{22}mg\approx0.276mg$，与竖直方向夹角 $\tan\varphi=\dfrac{3\sqrt{3}}{11}\approx0.472$。

详解

(1) 第（1）问（i）：角加速度 $\angle ABC=60^\circ$ 且两杆等长、A、C 在同一水平线上，故 $\triangle ABC$ 为等边三角形，AB 与水平线成 60°。两杆对 A 的转动惯量

$$I_1=\frac{1}{3}ml^2,\qquad I_2=\frac{1}{12}ml^2+m\left(\frac{\sqrt{3}}{2}l\right)^2=\frac{5}{6}ml^2,\qquad I=\frac{7}{6}ml^2$$

重力对 A 的总力矩（AB 质心水平距 $l/4$，BC 质心水平距 $3l/4$）

$$M=\frac{1}{4}mgl+\frac{3}{4}mgl=mgl$$

由转动定理 $\alpha=\dfrac{M}{I}=\dfrac{6g}{7l}$。

(2) 第（1）问（ii）：角速度 设 AB 与水平线 AD 夹角为 θ，两杆重力势能变化量

$$\Delta E_p=-mg\frac{l}{2}\sin\theta-mg\frac{\sqrt{3}l}{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)-2\left(-mg\frac{l}{2}\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

动能变化 $\Delta E_k=\frac{1}{2}I\omega^2$。由机械能守恒 $\Delta E_k+\Delta E_p=0$ 得

$$\omega=\sqrt{\frac{3g}{7l}(5\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta-2\sqrt{3})}$$

回代 $\theta=60^\circ$：$5\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\times\frac{1}{2}-2\sqrt{3}=0$，初速为零，自洽。

(3) 第（2）问：铰接情形的方程组 两杆在 B 光滑铰接，角加速度 α_1、α_2 不同，杆间相互作用力分量 F_x、F_y。对 AB 杆相对 A 用转动定理

$$\frac{1}{3}ml^2\alpha_1=\frac{1}{4}mgl+\frac{1}{2}F_yl-\frac{\sqrt{3}}{2}F_xl$$

对 BC 杆用质心运动定理与绕质心转动定理

$$ma_x=-F_x,\qquad ma_y=mg-F_y,\qquad \frac{1}{12}ml^2\alpha_2=\frac{1}{4}F_yl+\frac{\sqrt{3}}{4}F_xl$$

铰接点 B 的加速度相容条件（初始时刻两杆角速度为零）联立求解。

(4) 第（2）问：结果 解得

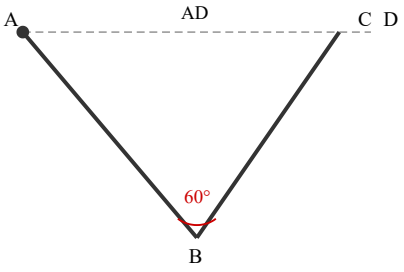
$$\alpha_1=\frac{9g}{11l},\qquad \alpha_2=\frac{15g}{11l}$$

$$F_x=\frac{3\sqrt{3}}{44}mg,\qquad F_y=\frac{1}{4}mg$$

两杆相互作用力大小

$$F=\sqrt{F_x^2+F_y^2}=\frac{\sqrt{37}}{22}mg\approx0.276mg$$

与竖直方向夹角 $\tan\varphi=F_x/F_y=\frac{3\sqrt{3}}{11}\approx0.472$。



两等长杆 AB、BC 铰/固结于 B，A 悬于固定点，初始 ∠ABC=60°（示意）

铰接情形必须同时用质心运动定理、绕质心转动定理和 B 点加速度相容条件三个关系；误把两杆当刚体整体处理会得到错误结果。

8. 计算题

答案　（1）$x_ax_b=\dfrac{m_s^2c^4}{4E^2}=0.0051$；　（2）$\nu_1=\nu_2=\dfrac{m_sc^2}{2h}\approx1.2\times10^{26}\ \mathrm{Hz}$；　（3）$\theta\approx\dfrac{4m_A}{m_s}=0.0040$（弧度）。

详解

(1) 第（1）问：动量能量守恒 部分子动能 $E_a=x_aE$、$E_b=x_bE$，因远大于静能，质量可忽略，动量大小 $p_a=E_a/c$、$p_b=-E_b/c$（方向相反）。新粒子 S 满足 $E_S=E_a+E_b$、$p_S=p_a+p_b$，代入能动量关系 $E_S^2-p_S^2c^2=m_s^2c^4$：

$$(x_aE+x_bE)^2-\left(\frac{x_aE-x_bE}{c}\right)^2c^2=4x_ax_bE^2=m_s^2c^4$$

故

$$x_ax_b=\frac{m_s^2c^4}{4E^2}$$

代入 $m_s=1.0\ \mathrm{TeV}/c^2$、$E=7.0\ \mathrm{TeV}$：$x_ax_b=\frac{1^2}{4\times7^2}=\frac{1}{196}\approx0.0051$。

(2) 第（2）问：两光子频率 在 S 静止系中两光子动量等大反向，能量各为 $m_s c^2/2$：

$$\nu_1 = \nu_2 = \frac{m_s c^2}{2h} = \frac{1.0 \times 10^{12} \times 1.60 \times 10^{-19}}{2 \times 6.63 \times 10^{-34}}\ \text{Hz} \approx 1.2 \times 10^{26}\ \text{Hz}$$

(3) 第（3）问：光子对夹角 S 静止系中衰变为两个轻粒子 A，每个 A 的能量 $E_A = \frac{1}{2} m_s c^2 = 5.0 \times 10^2\ \text{GeV} \gg m_A c^2$，A 可视为极端相对论性。A 再衰变为两个同频光子，在 A 的运动方向上动量守恒给出发射对称于 A 的运动方向。设两光子动量夹角为 θ，由动量守恒（沿与垂直 A 运动方向分解）可得

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{2m_A}{m_s} = \frac{2 \times 1.0\ \text{GeV/c}^2}{1.0 \times 10^3\ \text{GeV/c}^2} = 0.0020 \ll 1$$

利用小角近似 $\sin\frac{\theta}{2} \approx \frac{\theta}{2}$：

$$\theta \approx \frac{4m_A}{m_s} = \frac{4 \times 1.0}{1.0 \times 10^3} = 0.0040\ \text{rad}$$

回代核对：$\sin(0.0020) \approx 0.0020$，近似自洽。

（3）问中必须先在 S 静止系求出 A 的能量（5.0×10^2 GeV），再用动量守恒的横向分量得到 $\sin(\theta/2)=2m_A/m_s$；夹角极小是“极端相对论性衰变”的典型特征。

逐光知理 · 竞赛答案册 · 易错点速查

第33届全国中学生物理竞赛复赛 · 易错点速查

补在原册之后：原册答案与详解未作任何改动

共 6 条 · 绑定本卷题号

只挑本卷最容易失分的动作，按「错法 / 机理 / 正解」三段写，题号与原册一致；公式沿用原册口径。

第 1 题 · 第(1)问

错法 认为上下两个柱面反射都有半波损失，光程差里加两个 $\lambda/2$；或把接触点 O 按亮斑处理，亮纹条件写成 $2d=k\lambda$。

机理 上柱面下表面是玻璃到空气（光密到光疏）反射，无半波损失；下柱面上表面是空气到玻璃（光疏到光密）反射，存在相位突变 π，等效附加光程 $\lambda/2$。两束反射光之间只有一处半波损失，光程差为 $\Delta L=2d+\lambda/2$；接触点 $d=0$ 时 $\Delta L=\lambda/2$，故 O 为暗点，与牛顿环中心暗斑一致。

正解 亮纹满足 $2d+\lambda/2=k\lambda$，即 $2d=(2k-1)\lambda/2$；代入气隙厚度 $d=x^2/(2R_1)+y^2/(2R_2)$，第 k 级亮纹为椭圆 $x^2/a_k^2+y^2/b_k^2=1$，半长轴 $a_k=\sqrt{(2k-1)\lambda R_1/2}$、半短轴 $b_k=\sqrt{(2k-1)\lambda R_2/2}$。

第 2 题 · 第(1)(2)问

错法 列水体积守恒时只写罐内水位与观察柱水位的体积分配，漏掉水受热膨胀多出的体积项；或把罐内空气对外做功写成正号；内能变化按单原子自由度 3/2 计算。

机理 升温 $\Delta T=20.0\,\mathrm{K}$ 时水的平均体膨胀系数 $\kappa=3.03\times10^{-4}\,\mathrm{K^{-1}}$，膨胀量 $\kappa\Delta T\cdot S_1 l_0\approx0.019\,\mathrm{m^3}$，与细柱里的 $S'\Delta h$ 同为 $10^{-3}\,\mathrm{m^3}$ 量级，漏掉它水位差就对不上。中午空气被压缩，体积变化 $V_1-V_0<0$，对外做功 $W=\bar{p}(V_1-V_0)$ 为负，即外界对空气做功。常温空气自由度为 5，$\Delta U=\frac{5}{2}nR\Delta T$。

正解 联立气体状态方程、水体积守恒（含 $\kappa\Delta T$ 膨胀项）、膜受力平衡 $p_1=p_0+\rho_1 g\Delta h$ 三式，得 $\Delta h\approx0.81\,\mathrm{m}$、柱内水位 $l_1\approx1.82\,\mathrm{m}$；做功 $W\approx-1.9\times10^3\,\mathrm{J}$，$\Delta U\approx5.72\times10^4\,\mathrm{J}$，由 $Q=\Delta U+W$ 得 $Q\approx5.5\times10^4\,\mathrm{J}$，过程热容量 $C=Q/(T_1-T_0)\approx2.77\times10^3\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}$。

第 3 题 · 第(2)问

错法 拿地球（或木星）绕太阳的绝对速度直接与木星当地逃逸速度比较；或挑两者相距最远、相对速度最小的方位去判断能否被俘获。

机理 太阳消失后两星各自保持原切向速度，俘获判据必须在木星参考系中比较：相对速度 v_{ej} 与当地逃逸速度 $v_0=\sqrt{2Gm_j/r_{\mathrm{ej}}}$。机械能 $\frac{1}{2}m_e v_{\mathrm{ej}}^2-Gm_e m_j/r_{\mathrm{ej}}\ge0$ 时逃逸。最不利（最接近临界）的是同侧共线 $\theta=0$：此时地木距离 $r_{\mathrm{ej}}=r_j-r_e$ 最小、逃逸速度分母最小，而相对速度最大；该情形下仍不满足，任意方位都不会被俘获。

正解 由矢量差 $v_{\mathrm{ej}}^2=v_e^2+v_j^2-2v_e v_j\cos\theta$ 与 $r_{\mathrm{ej}}=\sqrt{r_e^2+r_j^2-2r_e r_j\cos\theta}$，在 $\theta=0$ 共线处取 v_{ej}/v_0 的最小值；按开普勒第三定律 $r_j/r_e=(T_j/T_e)^{2/3}$ 代入，得比值约 $26\gg1$，机械能为正，地球不会围绕木星转动。

第 4 题 · 第(1)问

错法　把整条绳当成以同一速度 v 运动，动能和重力势能都按全长 L 折算；或在弯折处让两侧张力不相等来凑平衡。

机理　绳对折搭在弯折处，下落段长 $(L-y)/2$、以速度 v 运动，静止段长 $(L+y)/2$ 不动；只有下落段参与动能与动量转移，丢掉 $(L-y)/2$ 因子会把速度方程写错。弯折处按题设无能量耗散，两侧张力必须相等；悬点张力除静止段重力外，还要加上绳段转入转出的动量流。

正解　以桥面为势能零点，对蹦极者 M、下落绳段与静止绳段分别写动能、重力势能，由机械能守恒化简得 $v^2 = 2gy\,\frac{2ML+mL-my}{4ML+2mL-my}$；速度、加速度均随 y 单调增，上限在 $y \to L$：$v_{y\to L} = \sqrt{2gL + \frac{m}{2M}gL}$，$a_{y\to L} = g\left[1 + \frac{m(4M+m)}{8M^2}\right]$。

第 7 题 · 第(2)问

错法　铰接情形仍把两杆当成固结的一个刚体整体，用单一角加速度和一条整体转动定理求解；或只列两杆各自的转动定理，漏掉铰接点 B 的加速度相容条件。

机理　B 为光滑铰接时两杆角加速度 α_2、α_3 不同，不能作为同一刚体处理；除对 AB 杆相对 A 的转动定理外，BC 杆还要用质心运动定理与绕质心转动定理，并由铰接点 B 的加速度在两杆描述中相等补上相容条件，方程组才封闭。

正解　对 AB 杆列相对 A 的转动定理，对 BC 杆列质心运动定理、绕质心转动定理，再代 B 点加速度相容条件（初始角速度为零），解得 $\alpha_2 = 9g/(11l)$、$\alpha_3 = 15g/(11l)$；杆间相互作用力 $F \approx 0.276mg$，与竖直方向夹角满足 $\tan\varphi = 3\sqrt{3}/11 \approx 0.472$。

第 8 题 · 第(3)问

错法　在中间粒子 A 的静止系里直接套用两光子对称发射的夹角；或不先求 S 系中 A 的能量，直接用 m_A 代替高能侧动量写夹角。

机理　S 系中 A 是极端相对论性粒子，$E_A = m_sc^2/2 = 5.0\times10^2\ \mathrm{GeV} \gg m_Ac^2$；两光子在 A 的静止系里对称于 A 的运动方向发射，回到 S 系后被洛伦兹压缩成极小的前向夹角。必须先在 S 系求出 A 的能量与动量，再沿平行、垂直 A 运动方向分解光子动量，由横向动量守恒定出夹角。

正解　由 $\sin(\theta/2) = 2m_A/m_s$，小角近似 $\sin(\theta/2) \approx \theta/2$，得 $\theta \approx 4m_A/m_s = 0.0040\,\mathrm{rad}$；回代 $\sin(0.0020) \approx 0.0020$ 自洽。第⑵问两光子在 S 系动量等大反向，各取能量 $m_sc^2/2$，频率 $\nu = m_sc^2/(2h) \approx 1.2\times10^{26}\,\mathrm{Hz}$。