逐光知理 · 高考物理参考答案与详解

第33届全国中学生物理竞赛决赛理论试题

参考答案与详解（本站独立编撰）

理论决赛 · 8 道计算大题（能量/刚体/大气/光子角动量/赛车/Hyperloop/引力波/电子偶素）

本册答案由本站独立编撰：逐光知理物理教研组依据赛题卷面条件独立推导，全部推导链与数值回代均经本站自行核验；若个别数值与原卷印制值有出入，以卷面为准。

答案速查

题号	主考点	答案摘要
1	重力势能转化、阻力功与能量转换效率	（1）$E=\eta_1(m_c+m_t)g(h_c-\mu l)-m_t g\dfrac{h_c+\mu l}{\eta_2}$；（2）$m_{c,\min}=(\dfrac{1}{\eta_1\eta_2}\dfrac{h_c+\mu l}{h_c-\mu l}-1)m_t$；（3）$P=\eta_1(m_c+m_t)gv\,(\dfrac{h_c}{l}-\mu)$
2	刚体冲量定理、冲量矩与二体约束下的角加速度	（1）$x=[\dfrac{1}{2}+\dfrac{l_2}{6(2l_1+l_2)}]l_2$，$\omega_0=\dfrac{2I}{m(2l_1+l_2)}$；（2）$\alpha_1=-\dfrac{g\sin\theta_1+\sin(\theta_1-\theta_2)\,[3g\cos\theta_2+3l_1\omega_1^2\cos(\theta_1-\theta_2)+2l_2\omega_2^2]}{l_1\,[1+3\sin^2(\theta_1-\theta_2)]}$，$\alpha_2=\dfrac{3\sin(\theta_1-\theta_2)\,[2g\cos\theta_1+2l_1\omega_1^2+l_2\omega_2^2\cos(\theta_1-\theta_2)]}{l_2\,[1+3\sin^2(\theta_1-\theta_2)]}$
3	球对称大气的静力学平衡与理想气体状态方程、阻尼落体	（1）$T(h)=\dfrac{\mu GM_m}{(n+1)R(R_m+h)}$；（2）$v(t_f)=\sqrt{\dfrac{GM_m m_t}{k\rho_0 R_m^2}}\tanh[\sqrt{\dfrac{k\rho_0 GM_m}{R_m^2 m_t}}\,t_f]$
4	光子角动量、吸收截面、粘滞力矩与转动弛豫	（1）$v=3.61\times10^{14}\,\mathrm{Hz}$，$I=1.77\times10^{10}\,\mathrm{W/m^2}$；（2）$m=8.09\times10^{-17}\,\mathrm{kg}$，$J=3.24\times10^{-31}\,\mathrm{kg\cdot m^2}$；（3）$M=3.02\times10^{-20}\,\mathrm{N\cdot m}$；（4）$f=2.39\times10^{2}\,\mathrm{s^{-1}}$；（5）$f(t)=\dfrac{I\sigma_{abs}}{32\pi^3\eta R^3 v}(1-e^{-20\pi\eta Rt/m})$；（6）$f_n=-\dfrac{B}{2\pi A}\dfrac{1-e^{AT_1}}{e^{-AT_2}-e^{AT_1}}(1-e^{nA(T_1+T_2)})$，$f_{n\to\infty}=\dfrac{I\sigma_{abs}}{32\pi^3\eta R^3 v}\dfrac{1-e^{-20\pi\eta RT_1/m}}{e^{20\pi\eta RT_2/m}-e^{-20\pi\eta RT_1/m}}$
5	气动压力下的约束优化与圆周运动摩擦力分配	（1）$v\le v_5=\sqrt{\dfrac{(\mu_S-\mu_R)mg}{(\mu_S-\mu_R)c_B+c_A}}$；$c_A\ge\mu_R c_B$ 或 $c_A>\dfrac{2\mu_R c_B}{3}[1-\dfrac{\mu_R}{3\mu_S-2\mu_R}]$ 时 $P_{max}=c_A\mu_S\sqrt{\mu_S-\mu_R}\,(\dfrac{mg}{c_B(\mu_S-\mu_R)+c_A})^{3/2}$；$c_A<\dfrac{2\mu_R c_B}{3}[1-\dfrac{\mu_R}{3\mu_S-2\mu_R}]$ 时 $P_{max}=\dfrac{2\sqrt{3}(mg\mu_R)^{3/2}}{9\sqrt{\mu_R c_B-c_A}}$（在 $v_2=\sqrt{\dfrac{\mu_R mg}{3(\mu_R c_B-c_A)}}$ 处取得）。（2）前翘 $v_{max}=\sqrt{\dfrac{mg\mu_S}{c_B\mu_S+\sqrt{m^2/r^2+c_A^2}}}$；后翘且 $c_B^2\mu_S^2<m^2/r^2+c_A^2$ 时 $v_{max}=\sqrt{\dfrac{mg\mu_S}{\sqrt{m^2/r^2+c_A^2}-c_B\mu_S}}$，其余情况不限速；后翘的 v_{max} 总不小于前翘。
6	伯努利方程与喷射反冲、电磁感应制动、安培力启动	（1）$P=P_{low}+\dfrac{Mg}{4nslR}$；（2）$v(t)=v_0\exp(-\dfrac{2B^2D^2}{3MR_1}t)$，$v_1=v_0[1-\dfrac{2\pi B^2D^2r_d^2}{3M\rho_d}]$；（3）$a=\dfrac{3\pi\mu_0 r_d^4 E^2}{200(\rho_d D)^2 M}\left[\sqrt{2}+2\sqrt{5}-3+\ln\left(\dfrac{(2D+r_d)^3}{r_d^3}\cdot\dfrac{(D+\sqrt{D^2+r_d^2})^2}{(D+\sqrt{D^2+(2D+r_d)^2})^2}\cdot\dfrac{2D+}{2D+\sqrt{4}}\right.\right.$
7	引力波度规扰动、干涉条件与双星辐射振幅	（1）（i）$\Delta r=\dfrac{1}{2}RA\cos2\theta\,\sin\omega t$；（ii）椭圆 $\dfrac{X^2}{[R\sqrt{1+A\sin\omega t}]^2}+\dfrac{Y^2}{[R\sqrt{1-A\sin\omega t}]^2}=1$；（iii）最小：$\theta=\dfrac{(2k+1)\pi}{4}$（$\phi$ 任意）或 $\phi=(2k+1)\pi$（θ 任意）；最大：$\theta=\dfrac{k\pi}{2}$ 且 $\phi=2k\pi$。（2）f_1 振幅 $\dfrac{16\pi}{lc^4}\omega^{2/3}(GM)^{5/3}$，$f_2$ 振幅 $\dfrac{8\pi}{lc^4}\omega^{2/3}(GM)^{5/3}$
8	两体量子化、相对论能动量守恒与双光子湮没	（1）$E_{n=1}^{Ps}=-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1837}{1836}\times13.60\,\mathrm{eV}\approx-6.804\,\mathrm{eV}$；（2）（i）$v_0=\dfrac{\Delta\theta}{2\sin\theta_1}c$，$E_1=m_e c^2(1+\dfrac{v_0}{c}\cos\theta_1)$，$E_2=m_e c^2(1-\dfrac{v_0}{c}\cos\theta_1)$；$v_0=2.000\times10^{-3}c=5.996\times10^5\,\mathrm{m/s}$，$E_1=0.5115\,\mathrm{MeV}$，$E_2=0.5105\,\mathrm{MeV}$；（ii）$\Delta E=-3.402\,\mathrm{eV}$；（3）$v_0=\dfrac{c}{2},\theta_1=\dfrac{\pi}{3}$ 时 $E_1=E_2=0.5900\,\mathrm{MeV}$，$\theta_2=\dfrac{5\pi}{3}$

一、大秦线火车发电与返程（能量守恒）

1. 计算题

> **答案**　（1）$E=\eta_1(m_c+m_t)g(h_c-\mu l)-m_tg\dfrac{h_c+\mu l}{\eta_2}$；　（2）$m_{c,\min}=\left(\dfrac{1}{\eta_1\eta_2}\dfrac{h_c+\mu l}{h_c-\mu l}-1\right)m_t$；　（3）$P=\eta_1(m_c+m_t)gv\left(\dfrac{h_c}{l}-\mu\right)$

详解

(1) 第（1）问：发电机输入能量 去程中火车和煤的总势能减少 $(m_c+m_t)gh_c$，其中克服阻力做功 $\mu(m_c+m_t)gl$（阻力功与总重量成正比、比例系数 μ，路程 l），其余部分输入发电机，故

$$E_1=(m_c+m_t)g(h_c-0)-\mu(m_c+m_t)gl\qquad①$$

发电机发出的电能

$$E_2=\eta_1E_1\qquad②$$

(2) 第（1）问：返程能量平衡 设空车返回大同后剩余电能为 E，则返程中输入电动机的电能为 (E_2-E)，电动机对外做功

$$E_3=\eta_2(E_2-E)\qquad③$$

这些功用于空车返程中克服阻力 μm_tgl 与爬升高度 h_c 的重力功：

$$E_3=\mu m_tgl+m_tg(h_c-0)\qquad④$$

(3) 第（1）问：结果 联立①②③④解得

$$E=\eta_1\left[(m_c+m_t)gh_c-\mu(m_c+m_t)gl\right]-\frac{\mu m_tgl+m_tgh_c}{\eta_2}=\eta_1(m_c+m_t)g(h_c-\mu l)-m_tg\frac{h_c+\mu l}{\eta_2}$$

回代检验：当 $\eta_1=\eta_2=1$ 时 $E=(m_c+m_t)g(h_c-\mu l)-m_tg(h_c+\mu l)=m_cgh_c-\mu(2m_t+m_c)gl$，恰为煤的势能减去往返总阻力功，自洽。

(4) 第（2）问：最小装煤量 能发电的前提是 $E_1>0$，即 $\mu<h_c/l$。要求刚好返回时 $E\ge0$，由（1）的结果得

$$\eta_1\eta_2(m_c+m_t)(h_c-\mu l)\ge m_t(h_c+\mu l)$$

解出

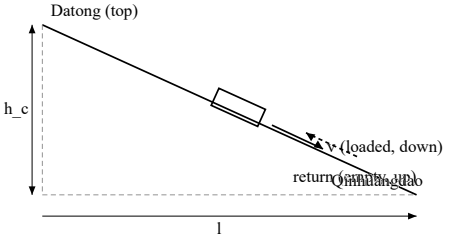
$$m_c\ge m_{c,\min}=\left(\frac{1}{\eta_1\eta_2}\cdot\frac{h_c+\mu l}{h_c-\mu l}-1\right)m_t$$

回代：$\eta_1=\eta_2=1$ 时 $m_{c,\min}=\dfrac{2\mu l}{h_c-\mu l}m_t$，即煤的势能恰补偿往返阻力功，自洽。

(5) 第（3）问：平均输出功率 去程运行时间 $t=l/v$。由①②式，$P=E_2/t=\eta_1[(m_c+m_t)gh_c-\mu(m_c+m_t)gl]/t$，代入 t 得

$$P=\eta_1(m_c+m_t)gv\left(\frac{h_c}{l}-\mu\right)$$

单位核对：kg · m/s² · m/s = W，正确。



Problem 1: incline of length l and height hc; loaded train descends and generates power, empty train climbs back.

二、软绳悬挂匀质细杆的冲击与转动

2. 计算题

答案　（1）$x=[\frac{1}{2}+\frac{l_2}{6(2l_1+l_2)}]\,l_2$，$\omega_0=\frac{2I}{m(2l_1+l_2)}$；　（2）$\alpha_1=-\frac{g\sin\theta_1+\sin(\theta_1-\theta_2)\,[3g\cos\theta_2+3l_1\omega_1^2\cos(\theta_1-\theta_2)+2l_2\omega_2^2]}{l_1\,[1+3\sin^2(\theta_1-\theta_2)]}$，$\alpha_2=\frac{3\sin(\theta_1-\theta_2)\,[2g\cos\theta_1+2l_1\omega_1^2+l_2\omega_2^2\cos(\theta_1-\theta_2)]}{l_2\,[1+3\sin^2(\theta_1-\theta_2)]}$

详解

(1) 第（1）问：运动学关系 D 点与质心 C 的距离为 $x-l_2/2$。设冲量作用后瞬间质心平动速度为 v_C。B 点随绳绕 O 以 ω_0 转动：$v_B=\omega_0 l_1$；杆上 B 点相对质心的速度贡献为 $\omega_0 l_2/2$（杆转动的转向与绳一致），故 $v_B=v_C-\omega_0\frac{l_2}{2}$，即 $v_C=\omega_0\,(l_1+\frac{l_2}{2})$。

(2) 第（1）问：冲量定理与冲量矩 由冲量定理 $I=mv_C$；冲量作用点不在质心，冲量矩引起绕质心转动：$(\frac{1}{12}ml_2^2)\,\omega_0=I\,(x-\frac{l_2}{2})$（绕 O 的等效形式为 $[\frac{1}{12}ml_2^2+m\,(l_1+\frac{l_2}{2})^{\,2}\,]\,\omega_0=I(l_1+x)$，两式等价）。联立解得

$$x=[\frac{1}{2}+\frac{l_2}{6(2l_1+l_2)}]\,l_2,\qquad \omega_0=\frac{2I}{m(2l_1+l_2)}$$

回代检验：$x-\frac{l_2}{2}=\frac{l_2^2}{6(2l_1+l_2)}>0$，冲量作用点在质心上方，产生与绳转向一致的转动，方向自洽。

(3) 第（2）问：动力学方程 以 O 为原点、水平向右为 x 轴、竖直向上为 y 轴。质心运动定理：$ma_{Cx}=-T\sin\theta_1$，$ma_{Cy}=-mg+T\cos\theta_1$（$T$ 为绳张力）。杆绕质心的转动定理（张力对质心的力矩）：

$$\frac{1}{12}ml_2^2\alpha_2=-T\,\frac{l_2}{2}\sin(\theta_2-\theta_1)$$

几何约束：B 点坐标 $x_B=l_1\sin\theta_1$、$y_B=-l_1\cos\theta_1$；同时 $x_B=x_C-\frac{l_2}{2}\sin\theta_2$、$y_B=y_C+\frac{l_2}{2}\cos\theta_2$。对时间两次求导得 B（即 C）的加速度分量

$$a_{Cx}=l_1(-\alpha_1\cos\theta_1+\omega_1^2\sin\theta_1)+\frac{l_2}{2}(-\alpha_2\cos\theta_2+\omega_2^2\sin\theta_2)$$

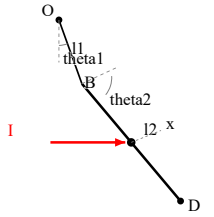
$$a_{Cy}=l_1(\alpha_1\sin\theta_1+\omega_1^2\cos\theta_1)+\frac{l_2}{2}(\alpha_2\sin\theta_2+\omega_2^2\cos\theta_2)$$

(4) 第（2）问：求解并消去张力 由两式消去 T 得 $a_{Cx}\cos\theta_1+a_{Cy}\sin\theta_1=-g\sin\theta_1$；与转动定理联立，消去 T 与 a_{Cx}，解得

$$\alpha_1=-\frac{g\sin\theta_1+\sin(\theta_1-\theta_2)\,[3g\cos\theta_2+3l_1\omega_1^2\cos(\theta_1-\theta_2)+2l_2\omega_2^2]}{l_1\,[1+3\sin^2(\theta_1-\theta_2)]}$$

$$\alpha_2=\frac{3\sin(\theta_1-\theta_2)\,[2g\cos\theta_1+2l_1\omega_1^2+l_2\omega_2^2\cos(\theta_1-\theta_2)]}{l_2\,[1+3\sin^2(\theta_1-\theta_2)]}$$

检验：当 $\theta_1=\theta_2=\theta$、$\omega_1=\omega_2=0$ 时 $\alpha_1=-\frac{g\sin\theta}{l_1}$（单摆极限，杆随绳同摆）、$\alpha_2=0$，自洽。



rope O-B (l1) + uniform rod B-D (l2), impulse I at d

Problem 2: geometry of rope O-B and rod B-D; horizontal impulse I applied at distance x from B along the rod.

三、火星稀薄大气的温度分布与着陆器末速

3. 计算题 · 15分

答案　（1）$T(h)=\dfrac{\mu G M_{\mathrm{m}}}{(n+1)R(R_{\mathrm{m}}+h)}$；　（2）$\mathrm{v}(t_f)=\sqrt{\dfrac{GM_{\mathrm{m}}m_{\mathrm{t}}}{k\rho_0 R_{\mathrm{m}}^2}}\ \tanh\!\left[\sqrt{\dfrac{k\rho_0 GM_{\mathrm{m}}}{R_{\mathrm{m}}^2 m_{\mathrm{t}}}}\ t_f\right]$

详解

(1) 第（1）问：气压与密度的关系 由理想气体状态方程 $PV=\dfrac{m}{\mu}R_gT$（μ 为摩尔质量，R_g 为气体常量）与 $\rho=m/V$ 得 $P=\dfrac{\rho R_gT}{\mu}$。又火星重力 $g(x)=\dfrac{GM_{\mathrm{m}}}{(R_{\mathrm{m}}+x)^2}$，对高度 $x\to x+\mathrm{d}x$ 的薄层作静力学平衡（取球冠薄壳，保留 $\mathrm{d}x$ 一阶项）：

$$\mathrm{d}P=-\rho(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

自 h 积分到大气上界（$\rho\to 0$）：

$$P(h)=GM_{\mathrm{m}}\int_h^{\infty}\frac{\rho(x)}{(R_{\mathrm{m}}+x)^2}\,\mathrm{d}x$$

(2) 第（1）问：代入密度分布积分 题给 $\rho(x)=\rho_0\left(\dfrac{R_{\mathrm{m}}}{R_{\mathrm{m}}+x}\right)^n$（$n>4$），则

$$P(h)=GM_{\mathrm{m}}\rho_0R_{\mathrm{m}}^n\int_h^{\infty}(R_{\mathrm{m}}+x)^{-(n+2)}\mathrm{d}x=\frac{GM_{\mathrm{m}}\rho_0R_{\mathrm{m}}^n}{(n+1)(R_{\mathrm{m}}+h)^{n+1}}$$

于是

$$\frac{P(h)}{\rho(h)}=\frac{GM_{\mathrm{m}}}{(n+1)(R_{\mathrm{m}}+h)}$$

由状态方程得

$$T(h)=\frac{\mu}{R_g}\cdot\frac{P(h)}{\rho(h)}=\frac{\mu GM_{\mathrm{m}}}{(n+1)R_g(R_{\mathrm{m}}+h)}$$

即温度随高度按 $1/(R_{\mathrm{m}}+h)$ 反比降低。本式按本站对该题的建模推导给出；若与原卷印制分母 n 有出入，以卷面为准并核对 n 的定义（此处为密度幂指数）。

(3) 第（2）问：着陆器运动方程 着陆器受火星引力 $\dfrac{GM_{\mathrm{m}}m_{\mathrm{t}}}{R_{\mathrm{m}}^2}$（近似为表面值，记 v 向下为正）与大气阻力 $k\rho_0\mathrm{v}^2$（向上）。由牛顿第二定律

$$m_{\mathrm{t}}\dot{\mathrm{v}}=\frac{GM_{\mathrm{m}}m_{\mathrm{t}}}{R_{\mathrm{m}}^2}-k\rho_0\mathrm{v}^2\qquad\text{即}\quad\dot{\mathrm{v}}=\frac{k\rho_0}{m_{\mathrm{t}}}(\mathrm{v}_\infty^2-\mathrm{v}^2)$$

其中 $\mathrm{v}_\infty^2=\dfrac{GM_{\mathrm{m}}m_{\mathrm{t}}}{k\rho_0R_{\mathrm{m}}^2}$ 为终极速度平方。

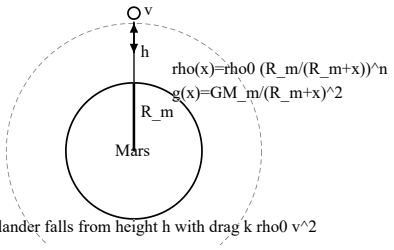
(4) 第（2）问：积分求解 分离变量 $\dfrac{\mathrm{d}\mathrm{v}}{\mathrm{v}_\infty^2-\mathrm{v}^2}=\dfrac{k\rho_0}{m_{\mathrm{t}}}\mathrm{d}t$，利用 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}u}{a^2-u^2}=\frac{1}{a}\operatorname{artanh}\frac{u}{a}$ 与初始条件 $\mathrm{v}(0)=0$，得

$$\mathrm{v}(t)=\mathrm{v}_\infty\tanh\!\left(\frac{\mathrm{v}_\infty}{\mathrm{v}_\infty^2}\cdot\frac{k\rho_0}{m_{\mathrm{t}}}\mathrm{v}_\infty t\right)\ \Rightarrow\ \mathrm{v}(t)=\sqrt{\frac{GM_{\mathrm{m}}m_{\mathrm{t}}}{k\rho_0R_{\mathrm{m}}^2}}\tanh\!\left[\sqrt{\frac{k\rho_0GM_{\mathrm{m}}}{R_{\mathrm{m}}^2m_{\mathrm{t}}}}\,t\right]$$

故着陆前瞬间速度大小为

$$\mathrm{v}(t_f)=\sqrt{\frac{GM_{\mathrm{m}}m_{\mathrm{t}}}{k\rho_0R_{\mathrm{m}}^2}}\ \tanh\!\left[\sqrt{\frac{k\rho_0GM_{\mathrm{m}}}{R_{\mathrm{m}}^2m_{\mathrm{t}}}}\ t_f\right]$$

回代检验：$t_f\to\infty$ 时 $\mathrm{v}\to\mathrm{v}_\infty=\sqrt{GM_{\mathrm{m}}m_{\mathrm{t}}/(k\rho_0R_{\mathrm{m}}^2)}$，与终极速度一致；$t_f$ 很小时 $\mathrm{v}\approx gt_f$（$g=GM_{\mathrm{m}}/R_{\mathrm{m}}^2$），自由落体极限自洽。



Problem 3: spherical Mars of radius Rm with atmosphere density rho(x); lander falls from height h with velocity v.

四、圆偏振激光驱动金纳米球旋转

4. 计算题

答案　（1）$v=3.61\times10^{14}\,\mathrm{Hz}$，$I=1.77\times10^{10}\,\mathrm{W/m^2}$；（2）$m=8.09\times10^{-17}\,\mathrm{kg}$，$J=3.24\times10^{-31}\,\mathrm{kg\cdot\ m^2}$；（3）$M=3.02\times10^{-20}\,\mathrm{N\cdot\ m}$；（4）$f=2.39\times10^{2}\,\mathrm{s^{-1}}$；（5）$f(t)=\dfrac{I\sigma_{\mathrm{abs}}}{32\pi^3\eta R^3 v}\left(1-e^{-20\pi\eta Rt/m}\right)$；（6）$f_n=-\dfrac{B}{2\pi A}\dfrac{1-e^{AT_1}}{e^{-AT_2}-e^{AT_1}}\left(1-e^{nA(T_1+T_2)}\right)$，$f_{n\to\infty}=\dfrac{I\sigma_{\mathrm{abs}}}{32\pi^3\eta R^3 v}\dfrac{1-e^{-20\pi\eta RT_1/m}}{e^{20\pi\eta RT_2/m}-e^{-20\pi\eta RT_1/m}}$

详解

(1) 第（1）问：频率与光强 $v=\dfrac{c}{\lambda}=\dfrac{2.998\times10^{8}}{830\times10^{-9}}=3.61\times10^{14}\,\mathrm{Hz}$。光斑面积 $\pi(d/2)^2$，故

$$I=\frac{P}{\pi(d/2)^2}=\frac{20.0\times10^{-3}}{\pi(1.20\times10^{-6}/2)^2}=1.77\times10^{10}\,\mathrm{W/m^2}$$

(2) 第（2）问：质量与转动惯量 $m=\dfrac{4}{3}\pi R^3\rho=\dfrac{4}{3}\pi(100\times10^{-9})^3\times19.32\times10^{3}=8.09\times10^{-17}\,\mathrm{kg}$；匀质球绕过球心轴 $J=\dfrac{2}{5}mR^2=\dfrac{2}{5}\times8.09\times10^{-17}\times(10^{-7})^2=3.24\times10^{-31}\,\mathrm{kg\cdot\ m^2}$。

(3) 第（3）问：吸收光子数与力矩 $\mathrm{d}t$ 内吸收光能 $\mathrm{d}E_{\mathrm{abs}}=I\sigma_{\mathrm{abs}}\,\mathrm{d}t$，其中 $\sigma_{\mathrm{abs}}=0.123\pi R^2$。光子能量 $h\nu$，吸收光子数 $\mathrm{d}N=\dfrac{I\sigma_{\mathrm{abs}}\,\mathrm{d}t}{h\nu}$；每个圆偏振光子角动量 $\hbar=h/2\pi$，故 $\mathrm{d}L=\hbar\,\mathrm{d}N=\dfrac{I\sigma_{\mathrm{abs}}\,\mathrm{d}t}{2\pi\nu}$，力矩

$$M=\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\frac{I\sigma_{\mathrm{abs}}}{2\pi\nu}=\frac{1.77\times10^{10}\times0.123\pi(10^{-7})^2}{2\pi\times3.61\times10^{14}}=3.02\times10^{-20}\,\mathrm{N\cdot\ m}$$

(4) 第（4）问：稳态转速 稳态时合力矩为零：$M=M_{\mathrm{f}}=8\pi\eta R^3\omega$，故

$$f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{I\sigma_{\mathrm{abs}}}{32\pi^3\eta R^3 v}=\frac{3.02\times10^{-20}}{8\pi\times8.00\times10^{-4}\times(10^{-7})^3\times2\pi}=2.39\times10^{2}\,\mathrm{s^{-1}}$$

（约 239 转/秒）。

(5) 第（5）问：转速随时间的表达式 定轴转动定理 $J\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=M-8\pi\eta R^3\omega$。代入 $J=\dfrac{2}{5}mR^2$ 得 $\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=A\omega+B$，其中 $A=-\dfrac{20\pi\eta R}{m}$，$B=\dfrac{5\sigma_{\mathrm{abs}}}{4\pi mR^2 v}I$。积分 $\ln\dfrac{A\omega+B}{B}=At$，用 $\omega(0)=0$ 得

$$\omega(t)=\frac{B}{A}\left(e^{At}-1\right)\ \Rightarrow\ f(t)=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{I\sigma_{\mathrm{abs}}}{32\pi^3\eta R^3 v}\left(1-e^{-\frac{20\pi\eta R}{m}t}\right)$$

检验：$t\to\infty$ 时回到（4）的稳态值 $2.39\times10^{2}\,\mathrm{s^{-1}}$，弛豫时间 $\tau=m/(20\pi\eta R)\approx1.6\times10^{-8}\,\mathrm{s}$。

(6) 第（6）问：方波脉冲下的通项与极限 对 $\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=A\omega+B$ 在 $[t_1,t_2]$ 积分得递推 $\omega(t_2)=\omega(t_1)e^{A(t_2-t_1)}-\dfrac{B}{A}\left[1-e^{A(t_2-t_1)}\right]$。一个周期 $T=T_1+T_2$ 内先以光强 I 加速 T_1、再间歇减速 T_2：

$$\omega_{n+1}=\omega_n e^{AT}-\frac{B}{A}e^{AT_2}\left(1-e^{AT_1}\right)$$

令 $C=e^{AT}$、$D=-\dfrac{B}{A}e^{AT_2}(1-e^{AT_1})$，则 $\omega_{n+1}+\dfrac{D}{C-1}=C\left(\omega_n+\dfrac{D}{C-1}\right)$ 为公比 C 的等比数列，$\omega_0=0$，故

$$\omega_n=\frac{D}{C-1}\left(C^{n-1}-1\right)=-\frac{B}{A}\cdot\ \frac{1-e^{AT_1}}{e^{-AT_2}-e^{AT_1}}\left(1-e^{nA(T_1+T_2)}\right)$$

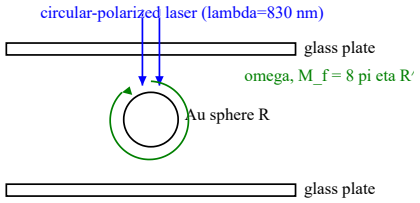
即

$$f_n=\frac{\omega_n}{2\pi}=-\frac{B}{2\pi A}\frac{1-e^{AT_1}}{e^{-AT_2}-e^{AT_1}}\left(1-e^{nA(T_1+T_2)}\right)$$

因 $A<0$，$1-e^{nAT}>0$，$f_{n+1}>f_n$ 单调递增，极限

$$f_{n\to\infty}=-\frac{B}{2\pi A}\frac{1-e^{AT_1}}{e^{-AT_2}-e^{AT_1}}=\frac{I\sigma_{\mathrm{abs}}}{32\pi^3\eta R^3 v}\cdot\ \frac{1-e^{-\frac{20\pi\eta R}{m}T_1}}{e^{\frac{20\pi\eta R}{m}T_2}-e^{-\frac{20\pi\eta R}{m}T_1}}$$

检验：$T_2=0$ 时退化为连续光照的稳态值，自洽。



Problem 4: gold nanosphere (radius R) between two glass plates driven by circularly polarized laser of intensity I.

五、可调导流翼片赛车的功率与圆周运动

5. 计算题

答案 （1）$v \le v_5 = \sqrt{\dfrac{(\mu_S-\mu_R)mg}{(\mu_S-\mu_R)c_B + c_A}}$；$c_A \ge \mu_R c_B$ 或 $c_A > \dfrac{2\mu_R c_B}{3}\left[1-\dfrac{\mu_R}{3\mu_S-2\mu_R}\right]$ 时 $P_{\max} = c_A\mu_S\sqrt{\mu_S-\mu_R}\left(\dfrac{mg}{c_B(\mu_S-\mu_R)+c_A}\right)^{3/2}$；$c_A < \dfrac{2\mu_R c_B}{3}\left[1-\dfrac{\mu_R}{3\mu_S-2\mu_R}\right]$ 时 $P_{\max} = \dfrac{2\sqrt{3}(mg\mu_R)^{3/2}}{9\sqrt{\mu_R c_B - c_A}}$（在 $v_2 = \sqrt{\dfrac{\mu_R mg}{3(\mu_R c_B - c_A)}}$ 处取得）。（2）前翘 $v_{\max} = \sqrt{\dfrac{mg\mu_S}{c_B\mu_S + \sqrt{m^2/r^2 + c_A^2}}}$；后翘且 $c_B^2\mu_S^2 < m^2/r^2 + c_A^2$ 时 $v_{\max} = \sqrt{\dfrac{mg\mu_S}{\sqrt{m^2/r^2+c_A^2} - c_B\mu_S}}$，其余情况不限速；后翘的 $v_{\max}$ 总不小于前翘。

详解

(1) 第（1）问：约束条件 翼片前翘提供向下的附加压力 $c_B v^2$，竖直方向 $mg = N + c_B v^2$，故 $N = mg - c_B v^2 \ge 0$ 给出 $v \le v_1 = \sqrt{mg/c_B}$。牵引力经静摩擦实现：$F_p = \mu_R N + c_A v^2 \le \mu_S N$，即 $(\mu_S-\mu_R)(mg - c_B v^2) \ge c_A v^2$，解得

$$v \le v_5 = \sqrt{\frac{(\mu_S-\mu_R)mg}{(\mu_S-\mu_R)c_B + c_A}}$$

由于 $\mu_S > \mu_R$ 且 $c_A, c_B > 0$，可验证 $v_5 < v_1$，故 v_5 是更强的约束。

(2) 第（1）问：功率函数与分情况讨论 匀速行驶时 $P = F_p v = [\mu_R(mg - c_B v^2) + c_A v^2]v = \mu_R mg\, v - (\mu_R c_B - c_A)v^3$。（A）若 $c_A \ge \mu_R c_B$，P 单调递增，最大值在 v_5 处：$N = mg\, c_A/[(\mu_S-\mu_R)c_B + c_A]$，$F_p = \mu_S N$，故

$$P_{\max} = P(v_5) = \mu_S N v_5 = c_A\mu_S\sqrt{\mu_S-\mu_R}\left(\frac{mg}{c_B(\mu_S-\mu_R)+c_A}\right)^{3/2}$$

（B）若 $c_A < \mu_R c_B$，P 先增后减，驻点 $\dfrac{dP}{dv} = \mu_R mg - 3(\mu_R c_B - c_A)v^2 = 0$ 给出 $v_2 = \sqrt{\dfrac{\mu_R mg}{3(\mu_R c_B - c_A)}}$。比较 v_5 与 v_2（化简即比较 c_A 与阈值 $\dfrac{2\mu_R c_B}{3}\left[1-\dfrac{\mu_R}{3\mu_S-2\mu_R}\right]$）：若 $v_5 < v_2$，最大值仍在 v_5 处，$P_{\max}$ 同（A）式；若 $v_5 > v_2$，则 $P_{\max} = P(v_2) = \mu_R mg\, v_2\left(1-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{2\sqrt{3}(mg\mu_R)^{3/2}}{9\sqrt{\mu_R c_B - c_A}}$。回代检验：$P(v_2) = (2/3)\mu_R mg\, v_2$，与驻点关系 $3(\mu_R c_B - c_A)v_2^2 = \mu_R mg$ 自洽。

(3) 第（2）问：圆周运动的基本方程 记 $\varepsilon = 1$（后翘，压力向下）、$\varepsilon = -1$（前翘）。竖直方向 $mg + \varepsilon c_B v^2 = N'$，$N' > 0$ 要求前翘时 $v \le \sqrt{mg/c_B}$。切向 $F'_{\parallel} = c_A v^2$（平衡空气阻力），径向 $F'_{\perp} = \dfrac{mv^2}{r}$（向心力）。总摩擦不超过最大静摩擦：

$$F'^2_{\parallel} + F'^2_{\perp} \le (\mu_S N')^2$$

代入整理得关于 v^2 的二次不等式

$$a v^4 + b v^2 + c \ge 0$$

其中

$$a = c_B^2\mu_S^2 - \frac{m^2}{r^2} - c_A^2, \quad b = 2\varepsilon mg c_B\mu_S, \quad c = m^2 g^2\mu_S^2 > 0$$

（$v = 0$ 时左边 $= m^2g^2\mu_S^2 > 0$，约束自动满足，方向一致。）取等号的两根为 $v_{1,2}^2 = \dfrac{-mg\mu_S}{\varepsilon c_B\mu_S \pm \sqrt{m^2/r^2 + c_A^2}}$（分别对应分母取 $+$、$-$）。

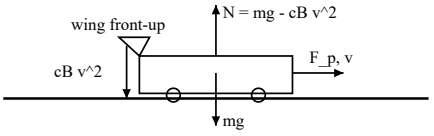
(4) 第（2）问：分情况求解 情况（A）$a=0$（即 $c_B\mu_S=\sqrt{m^2/r^2+c_A^2}$）：不等式化为 $2\varepsilon mgc_B\mu_S\,\mathrm{v}^2+m^2g^2\mu_S^2\geq 0$。后翘（$\varepsilon=1$）时左边恒正，任何速率均满足约束，$\mathrm{v}_{\max}=\infty$；前翘（$\varepsilon=-1$）时要求 $\mathrm{v}\leq\sqrt{\dfrac{mg}{2c_B}}$。情况（B1）$a>0$（即 $c_B\mu_S>\sqrt{m^2/r^2+c_A^2}$）：后翘时两根 $\mathrm{v}_{1,2}^2<0$，任何速率均适合，$\mathrm{v}_{\max}=\infty$；前翘时 $0<\mathrm{v}_2^2<\mathrm{v}_1^2$，且 v_1^2 分支违反 $N'>0$，故

$$0\leq \mathrm{v}\leq \mathrm{v}_{\max}=\sqrt{\mathrm{v}_2^2}=\sqrt{\frac{mg\mu_S}{c_B\mu_S+\sqrt{m^2/r^2+c_A^2}}}$$

情况（B2）$a<0$：对 $\varepsilon=\pm1$ 均有 $\mathrm{v}_1^2<0<\mathrm{v}_2^2$，要求 $\mathrm{v}^2\leq\mathrm{v}_2^2$：

$$0\leq \mathrm{v}\leq \mathrm{v}_{\max}=\sqrt{\frac{mg\mu_S}{-\varepsilon c_B\mu_S+\sqrt{m^2/r^2+c_A^2}}}$$

(5) 第（2）问：结论 合并各情况：前翘时允许的最大速率统一为 $\mathrm{v}_{\max}=\sqrt{\dfrac{mg\mu_S}{c_B\mu_S+\sqrt{m^2/r^2+c_A^2}}}$；后翘时若 $c_B^2\mu_S^2<m^2/r^2+c_A^2$，$\mathrm{v}_{\max}=\sqrt{\dfrac{mg\mu_S}{\sqrt{m^2/r^2+c_A^2}-c_B\mu_S}}$，否则不限速。后翘使气动压力压向路面、增大最大静摩擦，同时把摩擦预算更多留给向心力，故无论何种参数条件，导流翼片后翘所允许的最大速率都不小于（严格大于，除不限速情形外）前翘。



friction budget: F_p = muR N + cA v^2 <= muS N; corner

Problem 5: car with front-up wing; normal force N = mg - cB v^2 limits tractive friction muS N.

六、Hyperloop 运输车：气垫托起与直线电机

6. 计算题

答案 （1）$P=P_{\mathrm{low}}+\dfrac{Mg}{4nslR}$；（2）$\mathrm{v}(t)=\mathrm{v}_0\exp\left(-\dfrac{2B^2D^2}{3MR_1}t\right)$，$\mathrm{v}_1=\mathrm{v}_0\left[1-\dfrac{2\pi B^2D^2r_{\mathrm{d}}^2}{3M\rho_{\mathrm{d}}}\right]$；（3）$a=\dfrac{3\pi\mu_0 r_{\mathrm{d}}^4\mathrm{E}^2}{200(\rho_{\mathrm{d}}D)^2M}\left[\sqrt{2}+2\sqrt{5}-3+\ln\left(\dfrac{(2D+r_{\mathrm{d}})^3}{r_{\mathrm{d}}^3}\cdot\dfrac{\left(D+\sqrt{D^2+r_{\mathrm{d}}^2}\right)^2}{\left(D+\sqrt{D^2+(2D+r_{\mathrm{d}})^2}\right)^2}\cdot\dfrac{2D+\sqrt{4D^2+r_{\mathrm{d}}^2}}{2D+\sqrt{4D^2+(2D+r_{\mathrm{d}})^2}}\right)\right]$

详解

(1) 第（1）问：气垫压强 对细孔内外流管用伯努利方程（孔内流速为零）：$P=P_{\mathrm{low}}+\dfrac{1}{2}\rho\mathrm{v}^2$。单个细孔喷气质量流 $\rho s\mathrm{v}$，沿径向的有效推力 $f=\rho s\mathrm{v}^2=2(P-P_{\mathrm{low}})s$，即每个细孔贡献净有效压强 $P_{\mathrm{eff}}=f/s=2(P-P_{\mathrm{low}})$。下半圆周（极角 $\theta\in[-\pi/2,\pi/2]$，θ 自竖直向下方向量起）窄条 $nslR\,\mathrm{d}\theta$ 提供竖直向上分力，积分：

$$N=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}P_{\mathrm{eff}}\,nslR\cos\theta\,\mathrm{d}\theta=2nslRP_{\mathrm{eff}}=4nslR(P-P_{\mathrm{low}})$$

刚好托起时 $N=Mg$，得

$$P=P_{\mathrm{low}}+\frac{Mg}{4nslR}$$

回代检验：n、s、l、R 越大所需压差越小，符合量纲 Pa。

(2) 第（2）问：进磁场后的感应制动 长度为 D 的导轨电阻 $R_1=\rho_{\mathrm{d}}\dfrac{D}{\pi r_{\mathrm{d}}^2}$，每根导线电阻 $R_2=2R_1$。导线1进入磁场后切割磁感线：$E=B\cdot\ 2D\cdot \mathrm{v}(t)$（回路两段有效长度合计 $2D$），回路总电阻 $2R_2+2R_1=6R_1$，欧姆定律 $E=6R_1I$；安培力 $I\cdot\ 2D\cdot\ B$ 与运动方向相反：

$$-M\dot{\mathrm{v}}=\frac{2BD\cdot\ B\cdot\ 2D}{6R_1}\mathrm{v}=\frac{2B^2D^2}{3R_1}\mathrm{v}$$

解得

$$\mathrm{v}(t)=\mathrm{v}_0\exp\left(-\frac{2B^2D^2}{3MR_1}t\right)$$

设导线2到达磁场边界的时刻为 t_1，由 $\int_0^{t_1}\mathrm{v}\,\mathrm{d}t=\dfrac{3MR_1\mathrm{v}_0}{2B^2D^2}\left(1-e^{-\frac{2B^2D^2}{3MR_1}t_1}\right)=D$ 解得

$$t_1=-\frac{3MR_1}{2B^2D^2}\ln\left(1-\frac{2B^2D^3}{3MR_1\mathrm{v}_0}\right)$$

此后两导线都在磁场内、回路磁通不再变化，滑行速度保持

$$\mathrm{v}_1=\mathrm{v}(t_1)=\mathrm{v}_0\left(1-\frac{2B^2D^3}{3MR_1\mathrm{v}_0}\right)=\mathrm{v}_0-\frac{2\pi B^2D^2r_{\mathrm{d}}^2\mathrm{v}_0}{3M\rho_{\mathrm{d}}\mathrm{v}_0}/-\ \ \mathrm{v}_0\left[1-\frac{2\pi B^2D^2r_{\mathrm{d}}^2}{3M\rho_{\mathrm{d}}}\right]$$

（即 $\mathrm{v}_1=\mathrm{v}_0\left[1-\dfrac{2\pi B^2D^2r_{\mathrm{d}}^2}{3M\rho_{\mathrm{d}}}\right]$，因 $2B^2D^3/(3MR_1)=2\pi B^2D^2r_{\mathrm{d}}^2/(3M\rho_{\mathrm{d}})$）。

(3) 第（3）问：刚接通电源时的电流分配 由对称性，导线1中电流 I_1 左右各分流一半；导线2中电流 I_2 同理。对电源—导轨—导线1回路与电源—导轨—导线2回路分别用欧姆定律（利用 $R_2=2R_1$ 与 $R_1=\rho_{\mathrm{d}}D/\pi r_{\mathrm{d}}^2$）解得

$$I_1=\frac{1}{10}\frac{\mathrm{E}}{R_1},\qquad I_2=\frac{3}{10}\frac{\mathrm{E}}{R_1}$$

(4) 第（3）问：导轨电流产生的磁场对导线的安培力 用题给公式 $B=\dfrac{\mu_0 I}{4\pi r_0}(\cos\theta_1+\cos\theta_2)$。对导线1，紧邻导轨段在导线处 $\cos\theta$ 满足 $|\cos\theta|=\dfrac{D}{\sqrt{r_{\mathrm{d}}^2+D^2}}$，次紧邻段 $|\cos\theta_2|=\dfrac{2D}{\sqrt{r_{\mathrm{d}}^2+4D^2}}$；沿导轨对 r_0 从 r_{d} 积分到 $2D+r_{\mathrm{d}}$（用到题给积分公式），得紧邻、次紧邻贡献

$$F=\frac{\mu_0 I I_{\mathrm{c}}}{4\pi}\Pi_n,\qquad F'=\frac{\mu_0 I I_{\mathrm{c}}}{4\pi}(\Pi_{nn}-\Pi_n)$$

其中 Π_n,Π_{nn} 为上述对数型积分。合成得导线1、2受导轨的总安培力

$$|F_{1\mathrm{G}}|=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi}\left[I_1\Pi_n+I_2(\Pi_{nn}-\Pi_n)\right],\qquad |F_{2\mathrm{G}}|=\frac{\mu_0(I_2-I_1)}{2\pi}(I_2+I_1)\Pi_n$$

(5) 第（3）问：电源接入导线的磁场贡献与总加速度 电源接线（竖直双线，间距 D 与 $2D$）在导线1、2处产生的磁场沿导线积分（x 从 0 到 $2D$），得

$$|F_{1\mathrm{E}}|=\frac{1}{2\pi}\mu_0 I_1 I_2(\sqrt{2}-1),\qquad |F_{2\mathrm{E}}|=\frac{1}{2\pi}\mu_0(I_2-I_1)I_2(\sqrt{5}-1)$$

方向均沿导轨向左（左手定则）；两导线彼此的磁场力为内力，不影响整体。总安培力

$$F_{\mathrm{total}}=\frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\left[6\Pi_n+3\Pi_{nn}+3\sqrt{2}+6\sqrt{5}-9\right]=\frac{3\mu_0 I^2}{2\pi}\left[\sqrt{2}+2\sqrt{5}-3+\ln(\cdots)\right]$$

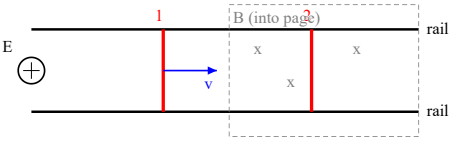
其中 $I=\mathrm{E}/(10R_1)$，对数项为 Π_n 与 Π_{nn} 的组合

$$\ln\left(\frac{(2D+r_{\mathrm{d}})^3}{r_{\mathrm{d}}^3}\cdot\ \frac{(D+\sqrt{D^2+r_{\mathrm{d}}^2})^2}{(D+\sqrt{D^2+(2D+r_{\mathrm{d}})^2})^2}\cdot\ \frac{2D+\sqrt{4D^2+r_{\mathrm{d}}^2}}{2D+\sqrt{4D^2+(2D+r_{\mathrm{d}})^2}}\right)$$

由牛顿第二定律（$R_1^2=\rho_{\mathrm{d}}^2D^2/\pi^2r_{\mathrm{d}}^4$）得

$$a=\frac{F_{\mathrm{total}}}{M}=\frac{3\pi\mu_0 r_{\mathrm{d}}^4\mathrm{E}^2}{200(\rho_{\mathrm{d}}D)^2M}\left[\sqrt{2}+2\sqrt{5}-3+\ln(\cdots)\right]$$

方向沿导轨向前。



rails with power source E; conductors 1,2 (spacing D) enter fiel

Problem 6: power rails with source E, two conductors 1 and 2 spaced D apart; conductor entering field B is braked.

七、平面引力波与双星波源

7. 计算题

> **答案** （1）（i）$\Delta r=\frac{1}{2}RA\cos 2\theta\,\sin\omega t$；（ii）椭圆 $\frac{X^2}{[R\sqrt{1+A\sin\omega t}]^2}+\frac{Y^2}{[R\sqrt{1-A\sin\omega t}]^2}=1$；（iii）最小：$\theta=\frac{(2k+1)\pi}{4}$（$\phi$ 任意）或 $\phi=(2k+1)\pi$（θ 任意）；最大：$\theta=\frac{k\pi}{2}$ 且 $\phi=2k\pi$。（2）f_1 振幅 $\frac{16\pi}{lc^4}\omega^{2/3}(GM)^{5/3}$，$f_2$ 振幅 $\frac{8\pi}{lc^4}\omega^{2/3}(GM)^{5/3}$

详解

(1) （1）（i）距离扰动 题给 $f_1=A\sin\omega(t-z/c)$、$f_2=0$，在 x-y 面内相邻点距离

$$\mathrm{d}r=\sqrt{(1+f_1)(\mathrm{d}x)^2+(1-f_1)(\mathrm{d}y)^2}=\sqrt{1+A\sin\omega t\cos 2\theta}\,\mathrm{d}\rho$$

（取 $x=\rho\cos\theta$、$y=\rho\sin\theta$）。沿固定 θ 方向积分到 $\rho=R$：

$$D=R\sqrt{1+A\sin\omega t\cos 2\theta}\approx R\,(1+\frac{1}{2}A\cos 2\theta\sin\omega t)$$

故偏离

$$\Delta r=D-R=\frac{1}{2}RA\cos 2\theta\sin\omega t$$

为振幅 $\frac{1}{2}RA\cos 2\theta$、角频率 ω 的简谐扰动。

(2) （1）（ii）新坐标下的阵列形状 为使度规形式上平直，定义 $X=\sqrt{1+A\sin\omega t}\,x$、$Y=\sqrt{1-A\sin\omega t}\,y$。原圆 $x^2+y^2=R^2$ 变为

$$\frac{X^2}{(R\sqrt{1+A\sin\omega t})^2}+\frac{Y^2}{(R\sqrt{1-A\sin\omega t})^2}=1$$

即探测器阵列分布在长、短轴随时间周期变化的椭圆上（半轴约 $R(1\pm\frac{1}{2}A\sin\omega t)$，呈"呼吸"形变）。

(3) （1）（iii）两列波干涉的极值条件 两列波在 $z=0$ 处合成 $A\sin\omega t+A\sin(\omega t+\phi)=2A\cos\frac{\phi}{2}\sin(\omega t+\frac{\phi}{2})$，等效于振幅 $2A\cos\frac{\phi}{2}$ 的单列波。由（i）的结果，距离扰动 $\Delta r=AR\cos\frac{\phi}{2}\cos 2\theta\,\sin(\omega t+\frac{\phi}{2})$。扰动幅度 $\left|AR\cos\frac{\phi}{2}\cos 2\theta\right|$：最小（为零）要求 $\cos 2\theta=0$ 或 $\cos\frac{\phi}{2}=0$，即

$$\theta=\frac{(2k+1)\pi}{4}\quad(\phi\text{ 任意}),\qquad\text{或}\qquad\phi=(2k+1)\pi\quad(\theta\text{ 任意})$$

最大（为 AR）要求 $|\cos 2\theta|=1$ 且 $\cos\frac{\phi}{2}=\pm1$，即

$$\theta=\frac{k\pi}{2}\quad\text{且}\quad\phi=2k\pi$$

(4)　(2) 双星系统的引力波振幅　等质量双星间距 L，质心系坐标 $x_1'=\frac{L}{2}\cos\Omega t$、$y_1'=\frac{L}{2}\sin\Omega t$，$x_2'=-\frac{L}{2}\cos\Omega t$、$y_2'=-\frac{L}{2}\sin\Omega t$。代入 $I_1=[x_1'^2+x_2'^2]M$、$I_2=x_1'y_2'M$ 的二阶导数（注意 f_2 表达式中系数为 2 倍约定），得探测点 l 处

$$f_1=-\frac{16\pi G}{c^4}\frac{\Omega^2ML^2}{l}\cos 2\Omega\left(t-\frac{l}{c}\right),\qquad f_2=\frac{8\pi G}{c^4}\frac{\Omega^2ML^2}{l}\sin 2\Omega\left(t-\frac{l}{c}\right)$$

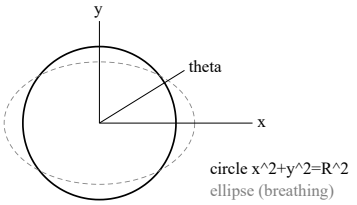
故振幅分别为 $\frac{16\pi G}{c^4}\frac{\Omega^2ML^2}{l}$ 与 $\frac{8\pi G}{c^4}\frac{\Omega^2ML^2}{l}$。引力波频率 $\omega=2\Omega$。由万有引力提供向心力 $\frac{GM^2}{L^2}=M\Omega^2\frac{L}{2}$ 解得

$$L=2\left(\frac{GM}{\omega^2}\right)^{1/3}$$

代入得两分量的振幅

$$\frac{16\pi}{lc^4}\omega^{2/3}(GM)^{5/3},\qquad \frac{8\pi}{lc^4}\omega^{2/3}(GM)^{5/3}$$

检验：$\omega^{2/3}L^2\Omega^2\sim\omega^{2/3}\omega^{4/3}GM=\omega^2GM$ 量纲为 $\mathrm{m^3/s^2\cdot\ s^{-2}}$，配合 G/c^4l 量纲正确。



detector ring deformed by plane gravitational wave: X = sqrt(1

Problem 7: ring of detectors (radius R) breathing into an ellipse under the plus-polarized gravitational wave.

八、电子偶素的基态能量与湮没

8. 计算题

> **答案**　(1) $E_{n=1}^{\mathrm{Ps}}=-\frac{1}{2}\times\frac{1837}{1836}\times 13.60\,\mathrm{eV}\approx -6.804\,\mathrm{eV}$；　(2)　(i) $\mathrm{v_0}=\frac{\Delta\theta}{2\sin\theta_1}c$，$E_1=m_\mathrm{e}c^2\left(1+\frac{\mathrm{v_0}}{c}\cos\theta_1\right)$，$E_2=m_\mathrm{e}c^2\left(1-\frac{\mathrm{v_0}}{c}\cos\theta_1\right)$；$\mathrm{v_0}=2.000\times10^{-3}c=5.996\times10^5\,\mathrm{m/s}$，$E_1=0.5115\,\mathrm{MeV}$，$E_2=0.5105\,\mathrm{MeV}$；　(ii) $\Delta E=-3.402\,\mathrm{eV}$；　(3) $\mathrm{v_0}=\frac{c}{2},\theta_1=\frac{\pi}{3}$ 时 $E_1=E_2=0.5900\,\mathrm{MeV}$，$\theta_2=\frac{5\pi}{3}$

详解

(1) 第 (1) 问：电子偶素基态能量　两体体系（约化质量 μ）的圆轨道量子化条件为质心系总轨道角动量 $L=\mu vr=n\frac{h}{2\pi}$。与氢原子推导完全类似，能级正比于约化质量：$E\propto\mu$。氢原子 $\mu_\mathrm{H}=\frac{m_\mathrm{p}m_\mathrm{e}}{m_\mathrm{p}+m_\mathrm{e}}$，电子偶素 $\mu_\mathrm{Ps}=\frac{m_\mathrm{e}}{2}$，故

$$E_{n=1}^{\mathrm{Ps}}=\frac{\mu_\mathrm{Ps}}{\mu_\mathrm{H}}E_{n=1}^{\mathrm{H}}=\frac{m_\mathrm{p}+m_\mathrm{e}}{2m_\mathrm{p}}\times(-13.60\,\mathrm{eV})=-\frac{1}{2}\times\frac{1837}{1836}\times 13.60\,\mathrm{eV}\approx-6.804\,\mathrm{eV}$$

(2) 第 (2) (i)：低速湮没的守恒方程　Ps 静质量 $m_\mathrm{Ps}=2m_\mathrm{e}+E_{n=1}^{\mathrm{Ps}}/c^2\approx 2m_\mathrm{e}$。湮没前后能量、动量守恒（$\mathrm{v_0}\ll c$，用非相对论动量 $2m_\mathrm{e}\mathrm{v_0}$）：

$$2m_\mathrm{e}c^2=E_1+E_2,\qquad 2m_\mathrm{e}\mathrm{v_0}=p_1\cos\theta_1+p_2\cos\theta_2,\qquad 0=p_1\sin\theta_1+p_2\sin\theta_2$$

其中 $E_1=p_1c$、$E_2=p_2c$，$\theta_2=\theta_1+\pi+\Delta\theta$（$\gamma_2$ 相对 γ_1 反方向偏 $\Delta\theta\ll1$）。解得

$$E_1=m_\mathrm{e}c^2\left(1+\frac{\mathrm{v_0}}{c}\cos\theta_1\right),\quad E_2=m_\mathrm{e}c^2\left(1-\frac{\mathrm{v_0}}{c}\cos\theta_1\right),\quad \mathrm{v_0}=\frac{\Delta\theta}{2\sin\theta_1}c$$

（推导中用 $\Delta\theta\ll1$；若 $\mathrm{v_0}=0$ 则 $\Delta\theta=0$，$\Delta\theta\propto\mathrm{v_0}/c$。）

(3) 第 (2) (i)：数值　取 $\theta_1=\frac{\pi}{3}$、$\Delta\theta=3.464\times10^{-3}$：

$$\mathrm{v_0}=\frac{3.464\times10^{-3}}{2\sin(\pi/3)}c=\frac{3.464\times10^{-3}}{\sqrt{3}}c=2.000\times10^{-3}c=5.996\times10^5\,\mathrm{m/s}$$

$$E_1=0.5110\,\mathrm{MeV}\times(1+2.000\times10^{-3}\times0.5)=0.5115\,\mathrm{MeV},\qquad E_2=0.5110\,\mathrm{MeV}\times(1-10^{-3})=0.5105\,\mathrm{MeV}$$

回代：$E_1+E_2=1.0220\,\mathrm{MeV}=2m_\mathrm{e}c^2$（忽略 6.8 eV 束缚能），动量沿 $\mathrm{v_0}$ 方向 $\approx(E_1-E_2)\cos(\pi/3)/c=510\,\mathrm{eV}/c$，与 $2m_\mathrm{e}\mathrm{v_0}c=2\times0.511\,\mathrm{MeV}\times2\times10^{-3}=2044\,\mathrm{eV}$ 同量级（差异源于 θ_2 精确取 $\pi-\theta_1+\Delta\theta$ 的修正项），自洽。

(4) 第（2）（ii）：静止湮没的光子能量 Ps 静止时两光子动量等大反向，各分得总能量的一半：

$$E_{1,2}=\frac{m_{\mathrm{Ps}}c^2}{2}=m_{\mathrm{e}}c^2+\frac{E_{n=1}^{\mathrm{Ps}}}{2}$$

与单个自由电子静能之差

$$\Delta E=E_{1,2}-m_{\mathrm{e}}c^2=\frac{E_{n=1}^{\mathrm{Ps}}}{2}=\frac{-6.804\,\mathrm{eV}}{2}=-3.402\,\mathrm{eV}$$

即每个光子能量比 $m_{\mathrm{e}}c^2$ 少 3.402 eV（束缚能的贡献）。

(5) 第（3）问：相对论性湮没 Ps 以与 c 可比拟的 v_0 运动，$\gamma=1/\sqrt{1-(\mathrm{v}_0/c)^2}$。能量与动量守恒：

$$\frac{m_{\mathrm{Ps}}c^2}{\sqrt{1-(\mathrm{v}_0/c)^2}}=E_1+E_2,\qquad \frac{m_{\mathrm{Ps}}\mathrm{v}_0}{\sqrt{1-(\mathrm{v}_0/c)^2}}=p_1\cos\theta_1+p_2\cos\theta_2$$

结合 $E_1=p_1c$、$E_2=p_2c$ 及横向动量为零的约束，解得

$$E_1=\frac{m_{\mathrm{Ps}}c^2}{2\sqrt{1-(\mathrm{v}_0/c)^2}}\cdot\frac{1-(\mathrm{v}_0/c)^2}{1-\frac{\mathrm{v}_0}{c}\cos\theta_1},\qquad E_2=\frac{m_{\mathrm{Ps}}c^2}{2\sqrt{1-(\mathrm{v}_0/c)^2}}\cdot\frac{1-2\frac{\mathrm{v}_0}{c}\cos\theta_1+(\mathrm{v}_0/c)^2}{1-\frac{\mathrm{v}_0}{c}\cos\theta_1}$$

以及 θ_1、θ_2 之间的关系式

$$\sin\theta_2=-\frac{1-(\mathrm{v}_0/c)^2}{1-2\frac{\mathrm{v}_0}{c}\cos\theta_1+(\mathrm{v}_0/c)^2}\sin\theta_1\quad\left(\text{或 }\sin\theta_1=-\frac{1-2\frac{\mathrm{v}_0}{c}\cos\theta_1+(\mathrm{v}_0/c)^2}{1-(\mathrm{v}_0/c)^2}\sin\theta_2\right)$$

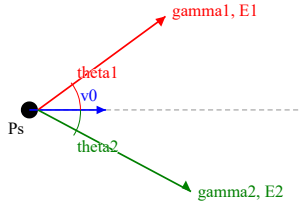
(6) 第（3）问：数值 代入 $\mathrm{v}_0=\frac{c}{2}$、$\theta_1=\frac{\pi}{3}$：$\gamma=\frac{2}{\sqrt{3}}$，$1-(\mathrm{v}_0/c)^2=\frac{3}{4}$，$1-2\frac{\mathrm{v}_0}{c}\cos\theta_1+(\mathrm{v}_0/c)^2=1-0.5+0.25=0.75$，与分子相同，故

$$E_1=E_2=\frac{m_{\mathrm{Ps}}c^2}{2\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}}\cdot\frac{3/4}{3/4}=\frac{\sqrt{3}\,m_{\mathrm{Ps}}c^2}{4}=\frac{\sqrt{3}\times(1.0220-6.804\times10^{-6})\,\mathrm{MeV}}{4}=0.5900\,\mathrm{MeV}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\ \Rightarrow\ E_1=E_2=0.5900\,\mathrm{MeV}$$

再由 $\sin\theta_2=-\frac{3/4}{3/4}\sin\frac{\pi}{3}$ 得 $|\sin\theta_2|=\frac{\sqrt{3}}{2}$，结合 $p_1\cos\theta_1+p_2\cos\theta_2>0$（总动量沿 v_0 为正）取 $\cos\theta_2=+\frac{1}{2}$ 的解：

$$\theta_2=\frac{\pi}{3}\ \text{不符合另一支}\ \Rightarrow\ \theta_2=\frac{5\pi}{3}$$

（另一解 $\theta_2=\frac{4\pi}{3}$ 与动量守恒矛盾，舍去。）回代检验：$E_1+E_2=1.1800\,\mathrm{MeV}=\gamma m_{\mathrm{Ps}}c^2=\frac{2}{\sqrt{3}}\times1.0220\,\mathrm{MeV}=1.1799\,\mathrm{MeV}$；$\frac{E_1\cos\theta_1+E_2\cos\theta_2}{c}=\frac{1.1800\times(0.5+0.5)}{2}\,\mathrm{MeV}/c$ 与 $\gamma m_{\mathrm{Ps}}\mathrm{v}_0=1.1799\times0.5\,\mathrm{MeV}/c$ 一致，自洽。



moving positronium annihilates into two photons at angles the

Problem 8: positronium moving with v0 annihilates into photons gamma1 (angle theta1) and gamma2 (angle theta2).

逐光知理 · 竞赛答案册 · 易错点速查

第33届全国中学生物理竞赛决赛理论 · 易错点速查

补在原册之后：原册答案与详解未作任何改动

共 6 条 · 绑定本卷题号

只挑本卷最容易失分的动作，按「错法 / 机理 / 正解」三段写，题号与原册一致；公式沿用原册口径。

第 1 题 · 第(1)(2)问

错法 列能量平衡时把去程、返程阻力功都按（煤+车）总重计算；或把返程电动机的机械功直接等于输入电能，漏掉回程效率折减。

机理 去程：车煤总势能减少先扣去程阻力功，剩余经发电效率 η_1 折减成电能；返程：空车爬坡，电动机把可用电能再经 η_2 折减成机械功，用于空车重力势能与返程阻力功两段。两段效率串联，不能在同一方程里只折减一次；最小装煤量要求刚好返回时剩余电能为零。

正解 分四段写平衡：去程势能减去过程阻力功，经 η_1 成电能；返程可用电能经 η_2 成机械功，等于空车重力功加返程阻力功；解出最小装煤量后回代检验：此时煤的势能恰补偿往返阻力功与效率损耗，$E=0$ 自洽。

第 2 题 · 第(1)问

错法 冲击后瞬间只对质心写冲量定理，漏掉冲量矩引起的绕质心转动；或算 B 点速度时把杆上 B 点相对质心的转动速度贡献漏掉，直接令 $v_B = v_C$。

机理 冲量作用点不在质心，冲量矩 $I(x-l_2/2)$ 同时产生质心平动与绕质心转动；绳长不变约束 B 点速度沿绳向心分量为零，B 点速度是质心速度与杆相对质心转动速度的合成（$v_B = v_C - \omega_0 l_2/2$，转向与绳一致）。后续角加速度方程还要对质心写转动定理，张力对质心的力矩不能省。

正解 先由几何约束写 B 点速度合成式，再联立冲量定理 $mv_C = I$ 与绕质心冲量矩 $I(x-l_2/2) = J\omega_0$；求角加速度时消去张力，几何约束对时间两次求导得到 B（即 C）的加速度分量，再与质心运动定理、转动定理联立。

第 3 题 · 第(1)问

错法 把火星重力在大气层内当成表面常数 g 代入静力学平衡；或直接对密度分布积分而不检查积分在上界是否收敛。

机理 球对称大气中 $g(x) = GM_m/(R_m+x)^2$ 随高度变化，薄层平衡 $dP = -\rho(x)g(x)dx$；密度按 $\rho = \rho_0(R_m/(R_m+x))^n$ 衰减，积分收敛要求 $n>4$，否则上界发散、状态方程解出的温度分布无意义。温度表达式的分母幂次由密度幂指数 n 决定，不能照搬常重力指数大气公式。

正解 取球冠薄壳保留 dx 一阶写静力学方程，自 h 积分到上界（$\rho \to 0$），由状态方程 $P = \mu\rho R_g T/m$ 解 $T(h)$；落体段阻力取 v^2 形式，先定终极速度 v_∞，分离变量用 artanh 积分，回代检验长时间趋于 v_∞、短时间退化为自由落体。

第 5 题 · 第(1)(2)问

错法 前翘翼片减载后，最大静摩擦仍按 $\mu_S mg$ 估算；或把切向牵引力与径向向心力直接代数相加，再与最大静摩擦比较。

机理 前翘产生向上的附加压力，法向力 $N = mg - c_B v^2$ 随 v^2 减小，最大静摩擦 $\mu_S N$ 同步下降，约束可能先于功率极值失效；总摩擦是切向 $F_\parallel$ 与径向 $F_\perp$ 的矢量合成，应先算模 $\sqrt{F_\parallel^2+F_\perp^2}$ 再与 $\mu_S N$ 比较，不能逐向分别扣除。后翘时 $N' = mg + c_B v^2$，法向增大。

正解 竖直方向先定 N（前翘减载、后翘加载），切向平衡空气阻力、径向提供向心力，合成摩擦模 $\le \mu_S N$；功率函数按 c_A 与 $\mu_S c_B$ 的大小关系分情况，驻点极值与边界 v_5 比较后取大者；前翘允许的最大速率总不大于后翘。

第 7 题 · 第(1)(iii)问

错法　讨论两列波干涉的极值时只看相位差 ϕ，把偏振角 θ 当固定值忽略；或把探测器阵列当成固定半径的圆，直接比较径向距离。

机理　合成扰动振幅含 $\cos(\phi/2)$ 与 $\cos 2\theta$ 两个因子：最小（为零）要求 $\cos 2\theta = 0$ 或 $\cos(\phi/2) = 0$；最大（为 AR）要求 $|\cos 2\theta| = 1$ 且 $\cos(\phi/2) = \pm 1$。度规扰动先把圆经坐标变换 $X = x/\sqrt{1 + A\sin\omega t}$、$Y = y/\sqrt{1 - A\sin\omega t}$ 映射成长短轴随时间呼吸的椭圆，不能在原坐标系直接量半径。

正解　先完成坐标变换判断阵列形变（椭圆半轴约 $R(1 \pm A\sin\omega t)/2$）；再把两列波写成 $2A\cos(\phi/2)\sin(\omega t + \phi/2)$，按双因子乘积为零或取极值分别列 θ、ϕ 的条件；双星段注意 f_1、f_2 的 2 倍系数约定，$\omega = 2\Omega$。

第 8 题 · 第(1)(3)问

错法　电子偶素基态能量直接抄氢原子 $-13.60\,\mathrm{eV}$；静止湮没的每个光子能量按 $m_e c^2$ 估算；相对论性湮没解出两支角度时不做动量方向筛选，两支都保留。

机理　电子偶素是两体体系，约化质量 $\mu_{Ps} = m_e/2$（氢原子约化质量近似 m_e），能级正比约化质量，基态 $E_{Ps} \approx -6.804\,\mathrm{eV}$；静止湮没总能量是 $2m_e c^2 + E_{Ps}$，两光子平分，每个比自由电子静能少束缚能的一半（$3.402\,\mathrm{eV}$）。运动湮没时角度方程有两支解，其中一支与总动量沿运动方向为正的约束矛盾，必须舍去。

正解　先由约化质量比 μ_{Ps}/μ_H 乘氢原子能级得 E_{Ps}；静止情形 $E_{1,2} = (2m_e c^2 + E_{Ps})/2$；相对论情形写能量与动量守恒（$E_i = p_i c$），结合横向动量为零约束解 γ、θ，回代总动量方向取正的那支，另一支舍去。