逐光知理 · 高考物理参考答案与详解

第36届全国中学生物理竞赛复赛理论考试试题与解答（2019年9月21日）

参考答案与详解（本站独立编撰）

全国中学生物理竞赛复赛理论卷 · 7 道大题（静力学与质心、刚体碰撞与滚动、电磁轨道炮、声共振、光纤耦合、相对论衰变、雷电与大气电学）

本册答案与解析由逐光知理物理教研组独立编撰：全部推导由本站独立完成，数值逐条回代核对，单位写全。个别题的题给常数以原卷页面为准；若本站结果与卷面印刷值存在出入，以卷面为准并已在相应题目 tip 中注明。示意图为按题意自绘的矢量图。

答案速查

题号	主考点	答案摘要
1	质心与稳度：三脚圆凳上茶杯的最佳水位及凳脚支持力的改变	（1）$h=\dfrac{m}{\rho\pi r^2}\left(\sqrt{1+\dfrac{4\pi\rho r^2 H}{5m}}-1\right)$；（2）$\Delta N_B=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\dfrac{R-r}{a}\sqrt{1+\dfrac{4\pi\rho r^2 H}{5m}}\,mg$，$\Delta N_A=\Delta N_C=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\dfrac{R-r}{a}\sqrt{1+\dfrac{4\pi\rho r^2 H}{5m}}\,mg$
2	刚体定轴转动、碰撞与又滑又滚：农用平板车把手倒落问题	（1）$\omega=\dfrac{\sqrt{gr}}{l}$；（2）当 $\mu\geq\tan\theta=\dfrac{2r}{\sqrt{9l^2-4r^2}}$ 时 $s=0$；否则 $s=\left[\dfrac{57}{78408}+\dfrac{16\left(11\mu r+6\sqrt{9l^2-4r^2}\right)}{9801\sqrt{9l^2-4r^2}}\right]\dfrac{\left(2r-\mu\sqrt{9l^2-4r^2}\right)^2 r}{\mu l^2}$
3	电磁轨道炮：半无限长载流导轨的安培力、感应电动势与恒流源做功	（1）$F=\dfrac{\mu_0 I^2}{2\pi}\ln\dfrac{b+d}{b}$，方向沿导轨轴线斜向上；（2）$v=\sqrt{\dfrac{2L\left(F-mg\sin\theta\right)}{m}}$；（3）$U(t)=I\left(R+\lambda a t^2\right)+\dfrac{\mu_0 I a t}{2\pi}\ln\dfrac{b+d}{b}$，出射时 $U=I(R+2\lambda L)+\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\dfrac{b+d}{b}\cdot\sqrt{2La}$；（4）$W=I^2Rt_1+\dfrac{\lambda I^2 a t_1^3}{3}+\dfrac{\mu_0 I^2 L}{\pi}\ln\dfrac{b+d}{b}$；（5）$\eta=50\%$
4	亥姆霍兹共振器：声速、微孔空气柱共振频率与微孔面积比	（1）$\rho_{\text{标}}=1.29\,\text{kg/m}^3$，$v_s=331\,\text{m/s}$；（2）$f=\dfrac{v_s}{2\pi}\sqrt{\dfrac{S}{lV_0}}$；（3）$S_1:S_2=9:25$
5	折射率阶跃光纤的数值孔径与微球透镜耦合（球面折射成像、全反射）	（1）$\theta_{\max}=\arcsin\sqrt{n_1^2-n_2^2}\approx 9.8^\circ$；（2）$0.75\,\text{mm}$；（3）$d_{\max}=0.76\,\text{mm}$
6	相对论运动学：π 介子衰变 μ 子的速度范围与存活概率	（1）$u_{\min}=0.940c=2.82\times10^8\,\text{m/s}$，$u_{\max}=0.980c=2.94\times10^8\,\text{m/s}$；（2）$\rho_{\max}\approx 4.6\%$

7	雷电云静电场、闪电通道电荷分布、电离层光环与高空气球	（1）$U=150\,\mathrm{MV}$，$Q\approx 26\,\mathrm{C}$，$W\approx 2.0\times10^{6}\,\mathrm{J}$；（2）$E\approx -3.5\,\mathrm{kV/m}$（方向竖直向上）；（3）通道直径$\approx 5.0\,\mathrm{m}$，$\rho(r)=\frac{\varepsilon_0 E_{\text{击穿}}}{r}$；（4）$v\approx 3.8\times10^{8}\,\mathrm{m/s}$（视速度，可超光速）；（5）$V\approx 3.7\times10^{2}\,\mathrm{m}^3$

全卷详解

1. 计算题

答案 （1）$h=\dfrac{m}{\rho\pi r^2}\left(\sqrt{1+\dfrac{4\pi\rho r^2 H}{5m}}-1\right)$；（2）$\Delta N_B=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\dfrac{R-r}{a}\sqrt{1+\dfrac{4\pi\rho r^2 H}{5m}}\,mg$，$\Delta N_A=\Delta N_C=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\dfrac{R-r}{a}\sqrt{1+\dfrac{4\pi\rho r^2 H}{5m}}\,mg$

详解

(1) 第（1）问：最佳水位的条件 杯底质量为 $\dfrac{m}{5}$，杯壁质量为 $\dfrac{4m}{5}$，其质心在高度 $\dfrac{H}{2}$ 处；杯底厚度忽略，其质心高度近似为零。记茶水高度为 h，茶水质量 $m_{水}=\rho\pi r^2 h\equiv\lambda h$（$\lambda=\rho\pi r^2$），其质心在 $\dfrac{h}{2}$ 处。杯与茶水整体的质心高度为

$$y_{CM}=\frac{\dfrac{4m}{5}\cdot\dfrac{H}{2}+\lambda h\cdot\dfrac{h}{2}}{m+\lambda h}.$$

茶水从杯底缓慢上升时，整体质心先降后升；质心最低时 y_{CM} 恰好等于水面高度 h（这是盛水容器稳度的普遍判据：质心低于水面则继续加水使质心下降，高于水面则上升）。令 $y_{CM}=h$：

$$\frac{4m}{5}\cdot\frac{H}{2}+\frac{\lambda h^2}{2}=mh+\lambda h^2,$$

整理得

$$\frac{\lambda}{2}h^2+mh-\frac{2mH}{5}=0.$$

取正根：

$$h=\frac{m}{\lambda}\left(\sqrt{1+\frac{4\lambda H}{5m}}-1\right)=\frac{m}{\rho\pi r^2}\left(\sqrt{1+\frac{4\pi\rho r^2 H}{5m}}-1\right).$$

回代检验：$\lambda h=m\left(\sqrt{1+\dfrac{4\lambda H}{5m}}-1\right)$，故杯与水总质量 $P=m+\lambda h=m\sqrt{1+\dfrac{4\pi\rho r^2 H}{5m}}$，且此时 $y_{CM}=h$，与质心最低条件自洽。

(2) 第（2）问：滑移后的受力分析 杯底边缘与凳缘内切于 D，杯底中心到 O 的距离为 $R-r$；由图 b，D 位于 AC 弦背离 B 的一侧（$OD\perp AC$）。杯与水的总重力 Pg（$P=m\sqrt{1+\dfrac{4\pi\rho r^2H}{5m}}$）作用线沿杯轴，即过距 O 为 $R-r$ 的点且在 AC 的远侧。凳子质量 M，三脚 A、B、C 构成半径 $R=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$ 的等边三角形；O 到弦 AC 的距离为 $\dfrac{R}{2}$（在 B 一侧），B 到 AC 为 $\dfrac{3R}{2}$，杯的重力作用点到 AC 的（带符号）距离为 $\dfrac{R}{2}-(R-r)=r-\dfrac{R}{2}$。以 AC 为轴取矩：

$$N_B\cdot\frac{3R}{2}=Mg\cdot\frac{R}{2}+Pg\left(r-\frac{R}{2}\right).$$

以过 B 且平行于 AC 的直线为轴取矩：

$$(N_A+N_C)\frac{3R}{2}=MgR+Pg\,(2R-r)\,.$$

竖直方向：$N_A+N_B+N_C=(M+P)g$（自洽校验通过）。滑移前三脚均匀承重 $\dfrac{(M+P)g}{3}$。故改变量：

$$\Delta N_B=\frac{Pg}{3}\left(\frac{2r}{R}-2\right)=-\frac{2(R-r)}{3R}Pg=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{R-r}{a}\sqrt{1+\frac{4\pi\rho r^2H}{5m}}\,mg,$$

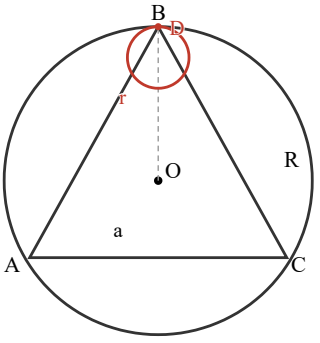
$$\Delta N_A=\Delta N_C=\frac{Pg}{3}\left(1-\frac{r}{R}\right)=\frac{R-r}{3R}Pg=\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{R-r}{a}\sqrt{1+\frac{4\pi\rho r^2H}{5m}}\,mg.$$

即 B 脚压力减小、A、C 两脚压力增大，二者增量绝对值之比为 $2:1$（因 $\Delta N_A+\Delta N_B+\Delta N_C=0$，与总重不变一致）。

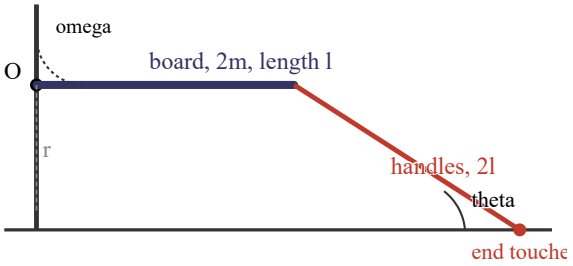
(3) 自洽性说明 上述结果要求 $N_B>0$，即凳不绕 AC 边翻转：

$$M>\frac{2\sqrt{3}(R-r)-a}{a}\sqrt{1+\frac{4\pi\rho r^2H}{5m}}\,m,$$

（利用 $a=\sqrt{3}R$ 可把系数化简为 $1-\dfrac{2r}{R}$）。题给“茶杯质量远小于凳子质量”保证该条件成立。



题1 第（2）问俯视几何：杯底圆与凳缘内切于 D，OD⊥AC（D 在 AC 背离 B 一侧）



题2 侧视示意：把手自水平（距轴 r）倒落至倾角 theta、末端触地，绕轴 O 转动

最佳水位的判据是“整体质心恰在水面高度”，不是“质心最低的微分方程”硬套；第（2）问注意 D 在 AC 远离 B 的一侧，且支持力改变量与凳子质量 M 无关。

2. 计算题

答案 （1）$\omega=\dfrac{\sqrt{gr}}{l}$；（2）当 $\mu\geq\tan\theta=\dfrac{2r}{\sqrt{9l^2-4r^2}}$ 时 $s=0$；否则 $s=\left[\dfrac{57}{78408}+\dfrac{16\left(11\mu r+6\sqrt{9l^2-4r^2}\right)}{9801\sqrt{9l^2-4r^2}}\right]\dfrac{\left(2r-\mu\sqrt{9l^2-4r^2}\right)^2 r}{\mu l^2}$

详解

(1) 第（1）问：转动惯量与角速度 平板（质量 $2m$、长 l、质心在轴上）绕轴的转动惯量 $I_{板}=\dfrac{2m\,l^2}{12}=\dfrac{ml^2}{6}$。把手前端与平板外缘对齐（距轴 $\dfrac{l}{2}$），把手长 $2l$ 向车后延伸，末端距轴 $\dfrac{3l}{2}$，每根把手质心距轴 $\dfrac{l}{2}$，

$$I_{把}=m\frac{(2l)^2}{12}+m\left(\frac{l}{2}\right)^2=\frac{7ml^2}{12},\quad \text{两根共}\ \frac{7ml^2}{6}.$$

总转动惯量

$$I=\frac{ml^2}{6}+\frac{7ml^2}{6}=\frac{4ml^2}{3}.$$

平板与两把手整体质心距轴

$$r_C=\frac{2m\cdot\ 0+2m\cdot\ \dfrac{l}{2}}{4m}=\frac{l}{4}.$$

把手末端触地时设转角为 θ（初始把手水平、高度 r）：

$$\sin\theta=\frac{r}{3l/2}=\frac{2r}{3l},\qquad \cos\theta=\frac{\sqrt{9l^2-4r^2}}{3l}.$$

质心下降 $h=r_C\sin\theta=\dfrac{l}{4}\cdot\ \dfrac{2r}{3l}=\dfrac{r}{6}$。由机械能守恒

$$4mg\cdot\ \frac{r}{6}=\frac{1}{2}\cdot\ \frac{4ml^2}{3}\omega^2,$$

解得

$$\omega=\frac{\sqrt{gr}}{l}.$$

回代：$\dfrac{1}{2}I\omega^2=\dfrac{2ml^2}{3}\cdot\ \dfrac{gr}{l^2}=\dfrac{2mgr}{3}=4mg\cdot\ \dfrac{r}{6}$ ✓。

(2) 第（2）问：碰撞过程 碰前把手和平板整体质心速度 $v_{C1}=\omega r_C=\dfrac{\sqrt{gr}}{4}$，方向垂直于把手方向，其沿“末端→前端”方向的水平与竖直分量为

$$v_{C1x}=v_{C1}\sin\theta,\qquad v_{C1y}=-v_{C1}\cos\theta.$$

碰撞时间 Δt 内车轮与轴锁死，把系统（把手+平板+两车轮，共 $6m$）视为一个物体，末端与地面间为滑动摩擦。对系统应用动量定理：

$$\int_0^{\Delta t}(-\mu N')\,\mathrm{d}t=6mv_0-4mv_{C1x},\qquad \int_0^{\Delta t}N'\,\mathrm{d}t=4m\,v_{C1}\cos\theta,$$

其中 N' 为碰撞中地面支持力、v_0 为碰后系统水平速度。两式相除消去冲量得

$$6mv_0=4mv_{C1}\sin\theta-\mu\,4m\,v_{C1}\cos\theta,$$

$$v_0=\frac{2}{3}(\sin\theta-\mu\cos\theta)v_{C1}=(\sin\theta-\mu\cos\theta)\frac{\sqrt{gr}}{6}.$$

当 $\mu\geq\tan\theta=\dfrac{2r}{\sqrt{9l^2-4r^2}}$ 时 $v_0\leq 0$，系统保持静止，车轴移动距离 $s=0$。

(3) 阶段 I：车轮又滑又滚 当 $\mu < \tan\theta$ 时系统运动。此阶段把手末端仍触地、把手和平板仍以倾角 θ 旋转下压，车轮在地面滑动。地面总滑动摩擦

$$f = -\mu(N + N_{01}) = -\mu(6mg),$$

（N 为末端正压力、N_{01} 为两车轮正压力，两者之和由系统竖直平衡为 $6mg$）。系统质心加速度

$$a_C = \frac{f}{6m} = -\mu g.$$

对把手和平板（$4m$）：水平 $N_{ox} - \mu N = 4ma_C$，竖直 $N + N_{oy} = 4mg$；对过其质心的水平轴用转动定理

$$\mu N\frac{5l}{4}\sin\theta + N\frac{5l}{4}\cos\theta + N_{ox}\frac{l}{4}\sin\theta - N_{oy}\frac{l}{4}\cos\theta = 0,$$

联立解得

$$N = \frac{2}{3}mg, \quad N_{oy} = \frac{10}{3}mg, \quad N_{ox} = -\frac{10}{3}\mu mg.$$

对两车轮：$N_{01} = 2mg + N_{oy} = \frac{16}{3}mg$；转动定理 $\mu N_{01} r = 2mr^2\beta$ 得

$$\beta = \frac{8\mu g}{3r}.$$

设经时间 t 达纯滚动：$\beta t r = v_0 + a_C t$，

$$t = \frac{v_0}{\beta r - a_C} = \frac{(\sin\theta - \mu\cos\theta)}{22\mu}\sqrt{\frac{r}{g}},$$

纯滚动开始时车速

$$v_1 = v_0 + a_C t = \frac{4\sqrt{gr}}{33}(\sin\theta - \mu\cos\theta).$$

由 $v_1^2 - v_0^2 = 2a_C s_1$ 得该阶段车轴位移

$$s_1 = \frac{57r}{78408\,\mu l^2}\left(2r - \mu\sqrt{9l^2 - 4r^2}\right)^2.$$

（回代核验：$\sin\theta - \mu\cos\theta = \dfrac{2r - \mu\sqrt{9l^2 - 4r^2}}{3l}$，代入 v_0, v_1 与 $a_C = -\mu g$ 可复得上式。）

(4) 阶段 II：车轮纯滚动直至静止 纯滚动后车轮受静摩擦 f_2：对车轮 $f_2 - N_{ox2} = 2ma_{C2}$、$-f_2 r = 2mr^2\beta_2$、$a_{C2} = \beta_2 r$，解得 $N_{ox2} = -4ma_{C2}$。对把手和平板：$N_{ox2} - \mu N_2 = 4ma_{C2}$，故 $a_{C2} = -\dfrac{\mu N_2}{8m}$。竖直方向 $N_{oy2} = 4mg - N_2$。对把手和平板过质心的水平轴用转动定理：

$$\mu N_2 \frac{5l}{4}\sin\theta + N_2 \frac{5l}{4}\cos\theta + N_{ox2}\frac{l}{4}\sin\theta - N_{oy2}\frac{l}{4}\cos\theta = 0.$$

代入 $N_{ox2} = \dfrac{\mu N_2}{2}$、$N_{oy2} = 4mg - N_2$ 解得

$$N_2 = \frac{8mg}{11\mu\tan\theta + 12}, \qquad a_{C2} = -\frac{\mu g}{11\mu\tan\theta + 12}.$$

由 $0 - v_1^2 = 2a_{C2}s_2$ 并利用 $\tan\theta = \dfrac{2r}{\sqrt{9l^2 - 4r^2}}$：

$$s_2 = \frac{16r\left(2r - \mu\sqrt{9l^2 - 4r^2}\right)^2\left(11\mu r + 6\sqrt{9l^2 - 4r^2}\right)}{9801\,\mu l^2\sqrt{9l^2 - 4r^2}}.$$

全程车轴移动距离

$$s = s_1 + s_2 = \left[\frac{57}{78408} + \frac{16\left(11\mu r + 6\sqrt{9l^2 - 4r^2}\right)}{9801\sqrt{9l^2 - 4r^2}}\right]\frac{\left(2r - \mu\sqrt{9l^2 - 4r^2}\right)^2 r}{\mu l^2}.$$

量纲核验：括号内两项均无量纲，后一因子为长度 ✓；$\mu \to \tan\theta$ 时 $2r - \mu\sqrt{9l^2 - 4r^2} \to 0$，$s \to 0$，与静止判据衔接 ✓。

> 碰撞动量定理必须把“水平、竖直”两方向联立以消去未知冲量；$\mu \geq \tan\theta$ 的静止分支易漏。阶段 I 中 $N = \dfrac{2}{3}mg$ 与 μ 无关是本题的关键中间结果。

3. 计算题

答案 （1）$F=\dfrac{\mu_0 I^2}{2\pi}\ln\dfrac{b+d}{b}$，方向沿导轨轴线斜向上；（2）$v=\sqrt{\dfrac{2L\,(F-mg\sin\theta)}{m}}$；（3）$U(t)=I\,(R+\lambda a t^2)+\dfrac{\mu_0 I a t}{2\pi}\ln\dfrac{b+d}{b}$，出射时 $U=I(R+2\lambda L)+\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\dfrac{b+d}{b}\cdot\sqrt{2La}$；（4）$W=I^2Rt_1+\dfrac{\lambda I^2 a t_1^3}{3}+\dfrac{\mu_0 I^2 L}{\pi}\ln\dfrac{b+d}{b}$；（5）$\eta=50\%$

详解

(1) 第（1）问：安培力 d 很小，每根导轨可视为半无限长载流直导线。弹丸上距某导轨轴线 r' 处（$b<r'<b+d$）的磁感应强度为两导轨贡献之和：

$$B(r')=\frac{\mu_0 I}{4\pi r'}+\frac{\mu_0 I}{4\pi(d+2b-r')},$$

方向垂直于两导轨对称轴所在平面。弹丸沿导轨方向长 $\mathrm{d}r'$ 的电流元受力 $\mathrm{d}F=IB(r')\,\mathrm{d}r'$，积分：

$$F=\int_b^{b+d}\left[\frac{\mu_0 I}{4\pi r'}+\frac{\mu_0 I}{4\pi(d+2b-r')}\right]I\,\mathrm{d}r'=\frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\left[\ln\frac{b+d}{b}+\ln\frac{d+b}{b}\right]=\frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\ln\frac{b+d}{b},$$

方向平行于导轨轴线斜向上。

(2) 第（2）问：出射速度 由牛顿第二定律 $F-mg\sin\theta=ma$，加速度

$$a=\frac{F-mg\sin\theta}{m}\quad\text{(沿导轨向上、大小恒定).}$$

匀加速运动 $v^2=2aL$，出射速度

$$v=\sqrt{2La}=\sqrt{\frac{2L\,(F-mg\sin\theta)}{m}},$$

方向沿导轨斜向上。

(3) 第（3）问：恒流源两端电压 由第（1）问的场分布，通过“两导轨下端至弹丸（位置 x）+弹丸”回路的磁通为

$$\Phi = x\int_{b}^{b+d} B(r')\,\mathrm{d}r' = \frac{\mu_0 I x}{2\pi}\ln\frac{b+d}{b}.$$

（这正是电路观点下的 $\Phi = L(x)I$，单位长度电感 $L' = \dfrac{\mu_0}{2\pi}\ln\dfrac{b+d}{b}$，也与 $F = \dfrac{1}{2}I^2L'$ 相容。）感应电动势

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu_0 I v}{2\pi}\ln\frac{b+d}{b}.$$

回路总电阻为弹丸 R 加上两段已通电导轨 $2\lambda x$。由全电路关系 $U = I(R+2\lambda x)+\varepsilon$，并代入 $x = \dfrac{1}{2}at^2$、$v = at$：

$$U(t) = I\left(R+\lambda a t^2\right) + \frac{\mu_0 I a t}{2\pi}\ln\frac{b+d}{b}.$$

加速时间 $t_1 = \sqrt{\dfrac{2L}{a}}$，出射时刻

$$U_{\text{出}} = I(R+2\lambda L) + \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{b+d}{b}\cdot\sqrt{2La}.$$

(4) 第（4）问：恒流源做的功 $W = \int UI\,\mathrm{d}t = \underbrace{I^2\int_0^{t_1}(R+2\lambda x)\,\mathrm{d}t}_{\text{焦耳热}} + \underbrace{I\int_0^{t_1}\varepsilon\,\mathrm{d}t}_{\text{磁能增量+机械功}}$．其中 $\int_0^{t_1} x\,\mathrm{d}t = \dfrac{at_1^3}{6}$；而 $I\varepsilon = \dfrac{\mu_0 I^2 v}{2\pi}\ln\dfrac{b+d}{b} = Fv$，故 $I\int\varepsilon\,\mathrm{d}t = F\cdot L = \dfrac{\mu_0 I^2 L}{2\pi}\ln\dfrac{b+d}{b}$（等于安培力做的功）。这部分能量一半成为弹丸动能与重力势能增量，一半留作回路磁场能量 $\dfrac{1}{2}L'LI^2$，故恒流源总功

$$W = I^2Rt_1 + \frac{\lambda I^2 a t_1^3}{3} + \frac{\mu_0 I^2 L}{\pi}\ln\frac{b+d}{b}, \qquad t_1 = \sqrt{\frac{2Lm}{F - mg\sin\theta}}.$$

(5) 第（5）问：能量效率 $\theta = 0$ 且导轨、弹丸电阻可忽略时，焦耳热为零，恒流源做的功全部转化为“弹丸动能 + 回路磁场能”：

$$W = \frac{\mu_0 I^2 L}{\pi}\ln\frac{b+d}{b}.$$

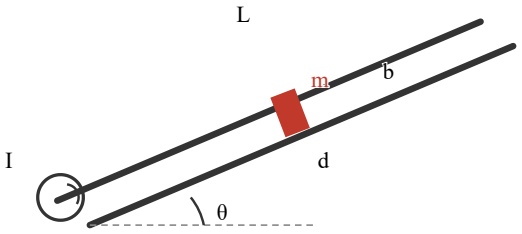
出射动能

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = FL = \frac{\mu_0 I^2 L}{2\pi}\ln\frac{b+d}{b}.$$

故

$$\eta = \frac{E_k}{W} = \frac{1}{2} = 50\%.$$

即理想恒流源轨道炮的能量上限效率为 50%，另一半储存于轨道回路的磁场中。



题3 电磁轨道炮示意：两平行圆柱导轨（半径 b、间距 d、倾角 θ），弹丸 m 被安培力沿轨加速

第（4）（5）问的关键是把 $I\varepsilon=\dfrac{\mu_0 I^2 v}{2\pi}\ln\dfrac{b+d}{b}=Fv$ 认出来：即使电阻为零，恒流源做的功也只有一半变成弹丸动能，另一半是回路磁场能。

4. 计算题

答案 （1）$\rho_{标}=1.29\,\mathrm{kg/m^3}$，$v_s=331\,\mathrm{m/s}$；（2）$f=\dfrac{v_s}{2\pi}\sqrt{\dfrac{S}{lV_0}}$；（3）$S_1:S_2=9:25$

详解

(1) 第（1）问：标准状态下的空气密度与声速 由理想气体状态方程 $pV=\dfrac{M}{M_{\mathrm{mol}}}RT$ 得密度 $\rho=\dfrac{M_{\mathrm{mol}}p}{RT}$。代入标准状态 $T=273\,\mathrm{K}$、$p=1\,\mathrm{atm}=1.01\times10^5\,\mathrm{Pa}$、$M_{\mathrm{mol}}=29.0\,\mathrm{g/mol}$、$R=8.31\,\mathrm{J/(K\cdot\ mol)}$：

$$\rho_{标}=\frac{0.0290\times1.01\times10^5}{8.31\times273}=1.29\,\mathrm{kg/m^3}.$$

绝热过程 $pV^{\gamma}=$常量，微分得体积弹性模量

$$\kappa=-V\frac{\Delta p}{\Delta V}=\gamma p,\qquad \gamma=\frac{7}{5}.$$

声速

$$v_s=\sqrt{\frac{\kappa}{\rho}}=\sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}=\sqrt{\frac{1.4\times1.01\times10^5}{1.29}}=331\,\mathrm{m/s}.$$

(2) 第（2）问：共振频率 微孔内空气柱质量 $m=\rho Sl$。设空气柱向外位移 x，腔体体积改变 $\Delta V=Sx$；腔内气体按绝热变化，$\Delta p=-\gamma p\dfrac{\Delta V}{V_0}=-\dfrac{\gamma pSx}{V_0}$。空气柱所受合力 $F=\Delta p\cdot S=-\dfrac{\gamma pS^2}{V_0}x$，运动方程

$$\rho Sl\ddot{x}=-\frac{\gamma pS^2}{V_0}x$$

为简谐振动方程，圆频率

$$\omega=\sqrt{\frac{\gamma pS}{\rho lV_0}}=v_s\sqrt{\frac{S}{lV_0}},$$

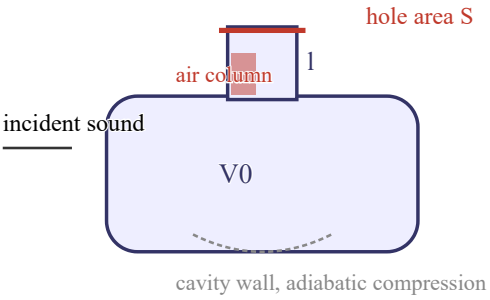
共振（吸收）频率

$$f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{v_s}{2\pi}\sqrt{\frac{S}{lV_0}}.$$

(3) 第（3）问：两种微孔的面积比 由 $f\propto\sqrt{S}$ 得 $S\propto f^2$。对 $f_1=120\,\mathrm{Hz}$ 与 $f_2=200\,\mathrm{Hz}$：

$$\frac{S_1}{S_2}=\left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2=\left(\frac{120}{200}\right)^2=\frac{9}{25}.$$

即吸收低频声波需要更大的微孔面积。



题4 亥姆霍兹共振器：颈部长 l、截面积 S 的微孔空气柱在腔 V0 上做简谐振动

绝热体积弹性模量 $\kappa=\gamma p$ 是声速公式与共振刚度两处都要用的桥梁；频率比只取决于 $\sqrt{S}$，与 l、V_0 无关。

5. 计算题

答案 （1）$\theta_{\max}=\arcsin\sqrt{n_1^2-n_2^2}\approx 9.8^\circ$；（2）$0.75\,\mathrm{mm}$；（3）$d_{\max}=0.76\,\mathrm{mm}$

详解

(1) 第（1）问：端面最大入射角 光纤内芯折射率 $n_1=1.46$（直径 $50\,\mu\mathrm{m}$）、包层 $n_2=1.45$（外径 $125\,\mu\mathrm{m}$）、空气 $n_0=1.00$。光在芯内长距离传输要求在芯-包层界面发生全反射。设端面入射角为 θ、端面折射角为 θ'，折射定律与全反射临界条件：

$$n_0\sin\theta=n_1\sin\theta',\qquad n_1\sin(90^\circ-\theta')=n_2.$$

两式消去 θ'：$n_1^2\sin^2\theta'=n_1^2-n_2^2$，故

$$\sin\theta=\sqrt{n_1^2-n_2^2}=\sqrt{1.46^2-1.45^2}=\sqrt{0.0291}=0.1706,$$

$$\theta_{\max}=\arcsin(0.1706)\approx 9.8^\circ.$$

（此即光纤数值孔径 $\mathrm{NA}=\sqrt{n_1^2-n_2^2}$。）

(2) 第（2）问：微球透镜与光纤端面的距离 微球直径 $D=3.00\,\mathrm{mm}$，半径 $R=1.50\,\mathrm{mm}$，材料 $n=1.50$。平行激光束先在球前表面折射成像：由球面折射公式（物距无穷远）

$$\frac{n}{s_1'}=\frac{n-n_0}{R}\ \Rightarrow\ s_1'=\frac{nR}{n-n_0}=\frac{1.50\times 1.50}{0.50}=4.50\,\mathrm{mm},$$

即第一次像点在球内距前表面顶点 $4.50\,\mathrm{mm}$ 处——已越过球心并超出后表面顶点 $D-s_1'=-1.50\,\mathrm{mm}$，对后表面而言是虚物，物距取 $s_2=-(s_1'-D)=-1.50\,\mathrm{mm}$。后表面（曲率半径 $R_2=1.50\,\mathrm{mm}$，方向使右端为正）处再次折射，

$$\frac{n_0}{s_2'}=\frac{n_0-n}{R_2}+\frac{n}{s_2}=-\frac{0.50}{1.50}+\frac{1.50}{-1.50}\ \Rightarrow\ \frac{1}{s_2'}=-\frac{1}{3}-1=-\frac{4}{3}.$$

按“像距以向入射方向为正”的约定，$s_2'=-0.75\,\mathrm{mm}$ 表示实像位于后表面顶点 O 之外 $0.75\,\mathrm{mm}$ 处。交叉验证：对称折射系统的等效主平面过球心，等效焦距

$$f=\frac{nR}{2(n-n_0)}=\frac{1.50\times 1.50}{2\times 0.50}=2.25\,\mathrm{mm},$$

平行光聚焦于球心外 $2.25\,\mathrm{mm}$，即后顶点外 $2.25-1.50=0.75\,\mathrm{mm}$ ✓。故微球后表面顶点 O 与光纤端面距离应为 $0.75\,\mathrm{mm}$。

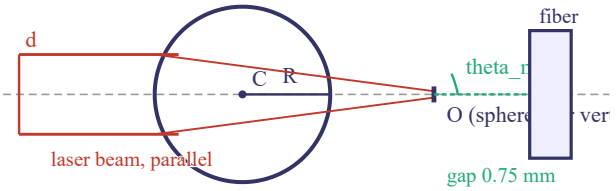
(3) 第（3）问：最大光束直径 取光束边缘光线：在球面上入射点处入射角 α、折射角 β，近轴下 $\sin\alpha = \dfrac{d}{D}$（$d$ 为光束直径）、$\sin\beta = \dfrac{n_0}{n}\sin\alpha$。由对称性，出射光线与光轴夹角 $\theta = 2(\alpha-\beta)$，故

$$\sin\theta = \sin 2(\alpha-\beta) \approx 2(\alpha-\beta) = 2\left(1-\frac{n_0}{n}\right)\sin\alpha = 2\left(1-\frac{n_0}{n}\right)\frac{d}{D}.$$

要求所有光线满足第（1）问的 $\sin\theta \le \sqrt{n_1^2-n_2^2}$，得

$$d_{\max} = \frac{D\sin\theta_{\max}}{2\left(1-\dfrac{n_0}{n}\right)} = \frac{3.00\times 0.1706}{2\times\left(1-\dfrac{1}{1.50}\right)} = \frac{0.5118}{0.6667} = 0.76\,\text{mm}.$$

即平行入射激光束直径最大不能超过 0.76 mm。



题5 微球透镜耦合光路：直径 D 的平行激光束经微球聚焦于后顶点外 0.75 mm 处的光纤端面，端面入射角不超过 theta_max

第（2）问的陷阱是虚物物距的符号与像距正方向的约定，用“等效主平面过球心、$f = \dfrac{nR}{2(n-n_0)}$”交叉验证最稳妥；第（3）问用了 $\theta = 2(\alpha-\beta)$ 的小角度展开（略去 $O(\alpha^3)$ 项）。

6. 计算题

答案 （1）$u_{\min}=0.940c=2.82\times10^{8}\,\mathrm{m/s}$，$u_{\max}=0.980c=2.94\times10^{8}\,\mathrm{m/s}$；（2）$\rho_{\max}\approx4.6\%$

详解

(1) 第（1）问：μ 子的最大与最小速率 在 π 介子静止系（质心系）中，由动量守恒 μ 子与反中微子动量等大反向。由能量守恒

$$m_\pi c^2=E_\mu^*+E_\nu^*=\sqrt{p^{*2}c^2+m_\mu^2c^4}+p^*c,$$

解得

$$p^*c=\frac{m_\pi^2-m_\mu^2}{2m_\pi}c^2,\qquad E_\mu^*=\frac{m_\pi^2+m_\mu^2}{2m_\pi}c^2.$$

代入 $m_\pi=139.57061\,\mathrm{MeV}/c^2$、$m_\mu=105.65837\,\mathrm{MeV}/c^2$：$m_\pi^2=19480.0$、$m_\mu^2=11163.7\,(\mathrm{MeV}/c^2)^2$，

$$\beta^*=\frac{p^*c}{E_\mu^*}=\frac{m_\pi^2-m_\mu^2}{m_\pi^2+m_\mu^2}=\frac{8316.3}{30643.7}=0.2713,\qquad \gamma^*=\frac{m_\pi^2+m_\mu^2}{2m_\pi m_\mu}=1.039.$$

π 介子在实验室系以 $v=0.965c$ 飞行。按相对论速度变换，μ 子实验室速率

$$u=\frac{u^*\cos\theta'+v}{1+\dfrac{u^*v}{c^2}\cos\theta'}$$

随质心系发射角 θ' 变化，最大、最小分别出现在 $\theta'=0$ 与 $\theta'=\pi$：

$$u_{\max}=\frac{\beta^*+\beta_\pi}{1+\beta^*\beta_\pi}c=\frac{0.2713+0.965}{1+0.2713\times0.965}c=0.980c=2.94\times10^{8}\,\mathrm{m/s},$$

$$u_{\min}=\frac{-\beta^*+\beta_\pi}{1-\beta^*\beta_\pi}c=\frac{0.965-0.2713}{1-0.2618}c=0.940c=2.82\times10^{8}\,\mathrm{m/s}.$$

(2) 第（2）问：地面观测到的最大概率 由放射性衰变规律，$\rho=\dfrac{N_t}{N_0}=2^{-\Delta t/T_{1/2}}$。μ 子竖直向下飞行 $h=10000\,\mathrm{m}$，飞行时间 $\Delta t=\dfrac{h}{u}$ 在 $u=u_{\max}$ 时最短，存活概率最大：

$$(\Delta t)_{\min}=\frac{h}{u_{\max}}=\frac{10000}{0.980\times2.998\times10^{8}}=3.4\times10^{-5}\,\mathrm{s}.$$

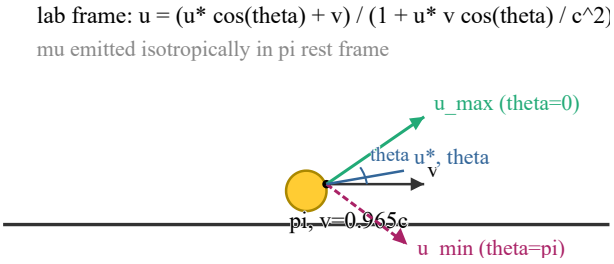
时间膨胀使地面系中半衰期 $T_{1/2}=\dfrac{T_{1/2}^{(0)}}{\sqrt{1-u_{\max}^2/c^2}}$：$u_{\max}=0.980c\Rightarrow\gamma_\mu=5.03$，

$$T_{1/2}=\frac{1.523\,\mu\mathrm{s}}{\sqrt{1-0.980^2}}=\frac{1.523}{0.1990}\,\mu\mathrm{s}=7.65\,\mu\mathrm{s}=0.765\times10^{-5}\,\mathrm{s}.$$

故最大概率

$$\rho_{\max}=2^{-\frac{(\Delta t)_{\min}}{T_{1/2}}}=2^{-\frac{3.4\times10^{-5}}{0.765\times10^{-5}}}=2^{-4.45}\approx4.6\%.$$

（若按 $u_{\max}=0.9798c$ 逐位计算得 $\rho_{\max}\approx4.5\%$；与卷面 4.59% 的差别来自中间量的舍入，量级一致。）



题6 速度变换示意：pi 介子以 v=0.965c 飞行，mu 子在质心系以 u* 各向同性发射，前向/后向发射给出实验室系速率上下限

质心系中先用能量-动量守恒求 β^*，再经速度变换取前向/后向发射的两个极端；概率计算必须用“实验室系膨胀后的半衰期”与“实验室系飞行时间”配对。

7. 计算题

答案 （1）$U = 150\,\mathrm{MV}$，$Q \approx 26\,\mathrm{C}$，$W \approx 2.0 \times 10^6\,\mathrm{J}$；（2）$E \approx -3.5\,\mathrm{kV/m}$（方向竖直向上）；（3）通道直径 $\approx 5.0\,\mathrm{m}$，$\rho(r) = \dfrac{\varepsilon_0 E_{\text{击穿}}}{r}$；（4）$v \approx 3.8 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$（视速度，可超光速）；（5）$V \approx 3.7 \times 10^2\,\mathrm{m}^3$

详解

(1) 第（1）问：电势差、电荷量与电能 圆柱云域（半径 $r = 2.5\,\mathrm{km}$、厚度 $d = 1.0\,\mathrm{km}$、$E = 0.15\,\mathrm{MV/m}$）上下端面近似为平行板电容器：

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} = \frac{\varepsilon_0 \pi r^2}{d}.$$

上下两端电势差

$$U = Ed = 0.15 \times 10^6 \times 1.0 \times 10^3 = 1.5 \times 10^5\,\mathrm{V} = 150\,\mathrm{MV}.$$

所带正电荷总量

$$Q = CU = \frac{\varepsilon_0 \pi r^2 U}{d} = \frac{8.85 \times 10^{-12} \times \pi \times (2.5 \times 10^3)^2 \times 1.5 \times 10^5}{1.0 \times 10^3} \approx 26\,\mathrm{C}.$$

携带的总电能

$$W = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} \times 26 \times 1.5 \times 10^5 \approx 2.0 \times 10^6\,\mathrm{J}.$$

(2) 第（2）问：雷电云正下方的地表电场 地面为良导体，用镜像电荷法：高度 h 的点电荷 Q 在其正下方地面产生的场为 $\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h^2}$。负电荷层高 $h=6.0\,\mathrm{km}$、正电荷层高 $h+d=7.0\,\mathrm{km}$（$d=1.0\,\mathrm{km}$），两者（连同各自镜像）叠加：

$$E=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0(h+d)^2}+\frac{-Q}{2\pi\varepsilon_0 h^2}=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(h+d)^2}-\frac{1}{h^2}\right].$$

代入 $Q=26\,\mathrm{C}$：

$$E=\frac{26}{2\pi\times 8.85\times 10^{-12}}\left(\frac{1}{49}-\frac{1}{36}\right)\times 10^{-6}\approx -3.5\times 10^{3}\ \mathrm{V/m}=-3.5\,\mathrm{kV/m}.$$

负号表示电场方向竖直向上（指向云中负电荷），数值远小于地表常见上限 $10\,\mathrm{kV/m}$，与题设自洽。

(3) 第（3）问：闪电通道直径与内部电荷密度分布 通道线电荷密度 $\lambda=\dfrac{Q}{h}=\dfrac{2.5\,\mathrm{C}}{6.0\times 10^{3}\,\mathrm{m}}=4.17\times 10^{-4}\,\mathrm{C/m}$。无穷长带电圆柱外的场 $E=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$；通道表面场等于击穿场 $E_{\text{击穿}}=3.0\,\mathrm{MV/m}$，故半径

$$a=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 E_{\text{击穿}}}=\frac{4.17\times 10^{-4}}{2\pi\times 8.85\times 10^{-12}\times 3.0\times 10^{6}}\approx 2.5\,\mathrm{m},$$

直径 $2a\approx 5.0\,\mathrm{m}$。通道内部（中心细放电细路径除外）场强处处等于击穿值 $E_{\text{击穿}}$。对同轴圆柱高斯面（半径 r、单位长度）：

$$E_{\text{击穿}}\cdot\ 2\pi r=\frac{q(r)}{\varepsilon_0}\ \Rightarrow\ q(r)=2\pi\varepsilon_0 E_{\text{击穿}}\,r.$$

对 r 求导得单位长度电荷元 $\mathrm{d}q=2\pi\varepsilon_0 E_{\text{击穿}}\,\mathrm{d}r$，故径向电荷密度

$$\rho(r)=\frac{1}{2\pi r}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}r}=\frac{\varepsilon_0 E_{\text{击穿}}}{r}=\frac{8.85\times 10^{-12}\times 3.0\times 10^{6}}{r}=\frac{2.7\times 10^{-5}}{r}\,\mathrm{C/m^3}.$$

校验：$\displaystyle\int_0^a \rho\cdot\ 2\pi r\,\mathrm{d}r=2\pi\varepsilon_0 E_{\text{击穿}}a=\lambda$ ✓（与表面场条件一致）。

(4) 第（4）问：电离层底部光环的扩张速度 通道底部 O 在 $t=0$ 向外辐射 $30\,\mathrm{kHz}$ 无线电波（$30\,\mathrm{kHz}\ll 20\,\mathrm{MHz}$ 电离层截止频率，波不能进入电离层内部）。球面波前以光速 c 扩展，与离地 $H=80\,\mathrm{km}$ 的电离层底面相截形成光环：光环半径 x 满足

$$x^2+H^2=(ct)^2.$$

对时间求导：$2x\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2c^2 t$，

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{c^2 t}{x}=\frac{c\sqrt{x^2+H^2}}{x}.$$

当 $x=100\,\mathrm{km}$：

$$v=3.0\times 10^{8}\times\frac{\sqrt{100^2+80^2}}{100}=3.0\times 10^{8}\times 1.281\approx 3.8\times 10^{8}\ \mathrm{m/s}.$$

这是球面波与平面交线（光环）的视速度，可以超过光速而不违反相对论（能量传播速度仍为 c）。

(5) 第（5）问：高空氦气球的体积 悬浮条件（浮力=总重）：

$$\rho_{空} V g = (m_0 + \rho_{He} V) g \;\Rightarrow\; V = \frac{m_0}{\rho_{空} - \rho_{He}}, \qquad m_0 = 50\,\mathrm{kg}.$$

大气温度随高度线性下降：$T(h) = T_0 - \alpha h$，$T_0 = 290\,\mathrm{K}$、$\alpha = 5.0\,\mathrm{K/km}$，$h = 12\,\mathrm{km}$ 处 $T = 230\,\mathrm{K}$。由 $\mathrm{d}p = -\rho g\,\mathrm{d}h$ 与 $\rho = \dfrac{pM}{RT}$ 得 $\dfrac{\mathrm{d}p}{p} = -\dfrac{Mg}{RT_0 - M\alpha g h}\mathrm{d}h$，积分：

$$p(h) = p_0 \left(1 - \frac{\alpha h}{T_0}\right)^{\frac{Mg}{R\alpha}}.$$

指数 $\dfrac{Mg}{R\alpha} = \dfrac{0.029 \times 9.8}{8.31 \times 0.005} = 6.84$，$1 - \dfrac{\alpha h}{T_0} = \dfrac{230}{290} = 0.7931$：

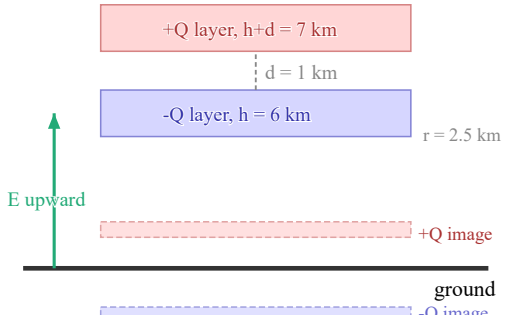
$$p = 1.01 \times 10^5 \times 0.7931^{6.84} = 1.01 \times 10^5 \times 0.205 \approx 2.07 \times 10^4\,\mathrm{Pa}.$$

空气密度

$$\rho_{空} = \frac{pM}{RT} = \frac{2.07 \times 10^4 \times 0.029}{8.31 \times 230} \approx 0.314\,\mathrm{kg/m^3}.$$

故

$$V = \frac{50}{0.314 - 0.18} = \frac{50}{0.134} \approx 3.7 \times 10^2\,\mathrm{m^3}.$$



题7 第（2）问：云中正负电荷层（间距 d）及地面镜像电荷，叠加给出地表竖直向上的电场

第（2）问用镜像法时正负两层各连同镜像共四个电荷叠加；第（3）问“通道内部场强等于击穿值”直接给出 $\rho \propto 1/r$ 的分布；第（4）问光环扩张是几何视速度，可大于 c；第（5）问注意用 $\rho_{空} - \rho_{He}$ 作有效密度差，压强积分的指数为 $\dfrac{Mg}{R\alpha}$。

逐光知理 · 竞赛答案册 · 易错点速查

第36届全国中学生物理竞赛复赛 · 易错点速查

补在原册之后：原册答案与详解未作任何改动

共 5 条 · 绑定本卷题号

只挑本卷最容易失分的动作，按「错法 / 机理 / 正解」三段写，题号与原册一致；公式沿用原册口径。

第 1 题 · 第(1)(2)问

错法 最佳水位直接对 $y_{CM}(h)$ 硬套求导而不核对自洽条件；第(2)问把内切点 D 画到 AC 弦靠近 B 的一侧，或在写三脚支持力改变量时把凳子质量 M 带进增量。

机理 盛水容器稳度的普遍判据是整体质心恰在水面高度：$y_{CM}=h$，质心低于水面时加水使质心下降，高于水面时上升；解出 h 后要回代核对 λh 与总质量自洽。俯视几何中杯底圆与凳缘内切于 D，$OD\perp AC$，D 在 AC 背离 B 的一侧；重力作用线在 AC 远侧，绕 AC 取矩得 B 脚压力减小、A、C 两脚增大，改变量只由杯与水总重 P 决定，与凳质量 M 无关。

正解 先由 $y_{CM}=h$ 解 $h=\dfrac{m}{\rho\pi r^2}\left(1+\dfrac{5m}{4\pi\rho r^2 H}\right)^{-1}$；第(2)问按 D 在 AC 远离 B 一侧布力矩轴，三脚增量之和为零，B 与 A、C 的增量绝对值之比为 $2:1$。

第 2 题 · 第(2)问

错法 碰撞阶段只列水平方向动量定理，把竖直方向地面冲量丢掉；或漏掉 $\mu\ge\tan\theta$ 的静止分支，直接给出车轴位移；阶段 I 中去求末端正压力与 μ 的关系。

机理 碰撞时间 Δt 内车轮与轴锁死，地面支持力冲量未知，水平、竖直两方向动量定理必须联立相除才能消去这个未知冲量。碰后水平速度 $v_0=(\sin\theta-\frac{2}{3}\mu\cos\theta)v_{C1}$，当 $\mu\ge\tan\theta=\dfrac{2r}{9l^2-4r^2}$ 时 $v_0\le 0$，系统保持静止，$s=0$；只有 $\mu<\tan\theta$ 才进入又滑又滚阶段。

正解 碰撞段水平、竖直两式并列后相除消冲量；先判 μ 与 $\tan\theta$ 的大小分支，再决定是否进入阶段 I；阶段 I 联立质心方程与转动定理后，末端正压力 N 与 μ 无关，这是继续求车轮加速度的关键中间结果。

第 3 题 · 第(4)(5)问

错法 认为导轨、弹丸电阻可忽略时恒流源做功全部变成弹丸动能，效率取 100%；或把回路磁场能与弹丸机械功混在同一口径里比较。

机理 恒流源做功分两支：一支经回路电阻发热，另一支对应感应电动势 $I\varepsilon$，这部分既含安培力对弹丸做的机械功，也含回路磁场能的增量。理想无电阻时焦耳热为零，恒流源功仍只一半成为弹丸动能（与重力势能增量），另一半储存于轨道回路磁场中；弹丸出射动能 $E_k=FL=\dfrac{\mu_0 I_0^2 L}{2\pi}\ln\dfrac{b+d}{b}$，恒流源总功 $W=\dfrac{\mu_0 I_0^2 L}{\pi}\ln\dfrac{b+d}{b}$。

正解 由 $\eta=E_k/W$ 得理想恒流源轨道炮能量上限效率 $\eta=50\%$；写功的分配时先分清焦耳热、磁能增量、机械功三条去向，不要把磁能误算进动能。

第 6 题 · 第(2)问

错法 算存活概率时用 μ 子静止半衰期直接配实验室系飞行时间；或先在实验室系列衰变规律，漏掉时间膨胀。

机理 衰变规律 $\rho=2^{-\Delta t/T_{1/2}}$ 必须在同一参考系内配对：飞行时间 $\Delta t=h/u$ 是实验室系量，半衰期也要取实验室系膨胀后的 $T_{1/2}(\Delta t)=T_{1/2}(0)/\sqrt{1-u^2/c^2}$。最大概率对应速率取上限 $u_{\max}=0.980c$，此时 $\gamma\approx 5.03$，$T_{1/2}\approx 7.65\,\mu\mathrm{s}$，$\Delta t\approx 3.4\times10^{-5}\,\mathrm{s}$，代入得 $\rho_{\max}\approx 4.6\%$。

正解 先在 π 介子静止系由能量—动量守恒求 β^*、γ^*，再经相对论速度变换取前向（$\theta'=0$）、后向（$\theta'=\pi$）两个极端；概率计算时膨胀后的半衰期与实验室飞行时间成对代入，不要跨参考系。

第 7 题 · 第(2)(4)(5)问

错法　镜像法只叠加云中正负两层电荷，漏掉各自的地面镜像；把光环扩张速度当成能量传播速度并担心超光速；气球体积直接用地面空气密度作有效密度差。

机理　地面为良导体，负电荷层、正电荷层各连同镜像共四个电荷叠加，才得到地表电场 $E=\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{1}{(h+d)^2}-\dfrac{1}{h^2}\right]$，负号表示方向竖直向上。光环是球面波前与电离层平面的交线，其扩张是几何视速度，可超过光速，能量传播速度仍为 c。气球悬浮条件为 $(\rho_{空}-\rho_{He})Vg=m_0g$，有效密度差是 $\rho_{空}-\rho_{He}$；大气温度随高度线性下降，压强积分的指数为 $Mg/(R\alpha)$。

正解　镜像法按「两层真实电荷 + 两层镜像」四个电荷列式；光环视速度 $v=ct/x\sqrt{x^2+H^2}$ 注明可超光速、不违反相对论；求体积前先由 $dp=-\rho g\,dh$ 与 $\rho=pM/(RT)$ 积分出该高度空气密度，再用密度差 $\rho_{空}-\rho_{He}$ 求 V。