逐光知理 · 高考物理参考答案与详解

第36届全国中学生物理竞赛决赛理论考试试题与解答

参考答案与详解（本站独立编撰）

2019年9月26日 · 决赛理论卷 · 六道计算大题（本册题号1—6对应原卷一至六题）

本册答案与解析由逐光知理物理教研组独立编撰：原卷为试题与解答合卷，但其解答正文以图片形式印刷、文本层大量缺失，本站依据卷面题干条件自行建模、独立推导并数值回代核对，未照录任何现成解答。个别小问因原卷印刷图形（如图c反应率曲线）读数存在误差，已在对应题目的存疑说明中注明，若与原卷印刷值不符以卷面为准。

答案速查

题号	主考点	答案摘要
1	刚体定轴转动惯量、纯滚动瞬时轴与质心运动定理	1）刚释放时角加速度 $\alpha_0=\dfrac{gmR_0}{2K}$；2）OB 首次竖直（转过 $\pi/6$）时 $\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\dfrac{gmR_0K}{J^2}$，$F_f=R_0\left[(\mu-\dfrac{m}{4})\alpha-\dfrac{\sqrt{3}}{4}m\omega^2\right]$，$F_N=\mu g+\dfrac{mR_0\omega^2-\sqrt{3}mR_0\alpha}{4}$，其中 $K=\dfrac{3}{2}MR_0^2+\dfrac{1}{2}MR_1^2+\dfrac{8}{3}mR_0^2$，$J=K-\dfrac{1}{2}mR_0^2$，$\omega^2=\dfrac{gmR_0}{2J}$，$\mu=M+2m$
2	介质中的稳恒电流场、极化面电荷与麦克斯韦-瓦格纳弛豫	1）$E_1=\dfrac{V_0\sigma_2}{r\left(\varphi_0\sigma_2+(\pi-\varphi_0)\sigma_1\right)}$，$E_2=\dfrac{V_0\sigma_1}{r\left(\varphi_0\sigma_2+(\pi-\varphi_0)\sigma_1\right)}$（均沿角向），$V_1=\dfrac{V_0\sigma_2\varphi}{D}$（$\varphi\le\varphi_0$），$V_2=V_0-\dfrac{V_0\sigma_1(\pi-\varphi)}{D}$（$\varphi\ge\varphi_0$），$D\equiv\varphi_0\sigma_2+(\pi-\varphi_0)\sigma_1$；2）$Q=\dfrac{\varepsilon_0 lV_0(\varepsilon_{r2}\sigma_1-\varepsilon_{r1}\sigma_2)\ln(b/a)}{\varphi_0\sigma_2+(\pi-\varphi_0)\sigma_1}$；3）$C_1=\dfrac{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}l\ln(b/a)}{\varphi_0}$，$C_2=\dfrac{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}l\ln(b/a)}{\pi-\varphi_0}$，$R_1=\dfrac{\varphi_0}{\sigma_1 l\ln(b/a)}$，$R_2=\dfrac{\pi-\varphi_0}{\sigma_2 l\ln(b/a)}$；4）$V(t)=V_0\dfrac{R_1\mathrm{e}^{-t/\tau_1}+R_2\mathrm{e}^{-t/\tau_2}}{R_1+R_2}$，$\tau_1=\varepsilon_0\varepsilon_{r1}/\sigma_1$，$\tau_2=\varepsilon_0\varepsilon_{r2}/\sigma_2$
3	万有引力、超导磁通守恒、磁悬浮与交流电桥测微重力	1）$\Delta g=\dfrac{G(\rho_{水}-\rho_0)V}{d^2}\approx-5.6\times10^{-3}\ \mathrm{m\cdot\ s^{-2}}$（地下湖使当地重力加速度减小）；2）i）$B_0=\dfrac{\mu_0 Ni_0}{2R}(1+\dfrac{\alpha}{2\sqrt{2}})$，$\beta=\dfrac{\dfrac{9\alpha}{2^{9/2}}-\dfrac{3}{4}}{(1+\dfrac{\alpha}{2\sqrt{2}})R^2}$；ii）$I_0=-\dfrac{\pi D^2B_0}{4L}$；iii）$g_0=\dfrac{3\pi^2\mu_0^2\alpha N^2i_0^2D^4(1+\dfrac{\alpha}{2\sqrt{2}})}{2^{17/2}R^3Lm}$；3）$\Delta g=\dfrac{8\varepsilon_0AV_C}{md^2}\Delta V$
4	理想气体状态方程、绝热与等压过程、热力学第一定律与熵变	1）$m\approx0.703$ g，输出功率增加到约 1.44 倍；2）$m'\approx0.634$ g，约 1.29 倍；3）绝热压缩外界做功 $W_1\approx14.2$ J，等压冷却外界做功 $W_2\approx6.3$ J，总功 ≈20.5 J；绝热过程熵变 $\Delta S_1=0$，等压冷却熵变 $\Delta S_2\approx-6.6\times10^{-2}\ \mathrm{J\cdot\ K^{-1}}$
5	圆孔衍射、透镜成像与折射光路、光压（梯度力）、麦克斯韦速率分布与光势阱	1）$D_{o1}\approx4.12\ \mu$m；2）两透镜间距 $l=18.9$ mm，$D_2=6.0$ mm；3）焦点到样品池底部内表面距离 ≈1.75 mm，光斑直径按衍射极限估计 $\approx1.6\ \mu$m（本站建模值，存疑）；4）$F_x\approx3.4\times10^{-13}$ N（约为重力的 8.3 倍），$F_y\approx8.6\times10^{-13}$ N（约为重力的 21 倍）；5）$v_{rms}\approx1.7\times10^{-3}\ \mathrm{m\cdot\ s^{-1}}$；6）$v_{max}\approx2.4\times10^{-3}\ \mathrm{m\cdot\ s^{-1}}$；7）$P(m)=P(2m)$，捕获概率相等

6	天文测距（竹竿测日、金星凌日）、太阳辐射与质子-质子链聚变、轨道演化	1）i）$\Phi = d/L$；iii）$\Phi \approx 0.0125\ \text{rad} \approx 0.72^\circ$；2）i）$r_{VE} \approx 0.723$；ii）$D_P/S \approx 7.8\times10^{-3}$，$\Phi \approx 9.9\times10^{-3}\ \text{rad} \approx 0.57^\circ$；iii）$S_{\text{日地}} = \dfrac{1.60\, r_{VE} H}{(1-r_{VE})\,\omega_{rel}\,\Delta t}$；iv）$\approx 1.7\times10^{8}$ km（本站建模近似，存疑）；3）i）1.75×10^{17} W；ii）$\approx 5.5\times10^{-5}$；iii）3.9×10^{26} W；iv）$\approx 5.8\times10^{3}$ K；4）i）$M \approx 2.0\times10^{30}$ kg，$\bar{\rho} \approx 1.4\times10^{3}\ \text{kg}\cdot\ \text{m}^{-3}$；ii）约 2.4×10^{3} 年，约 2×10^{6} 倍；5）i）$\approx 3.6\times10^{38}$ 个/秒；ii）$\approx 7.5\times10^{10}$ 年，$P_{pp} \approx 4.2\times10^{-19}\ \text{s}^{-1}$；iii）$\approx 6.4\times10^{14}\ \text{m}^{-2}\cdot\ \text{s}^{-1}$；iv）$\approx 4.3\times10^{9}\ \text{kg}\cdot\ \text{s}^{-1}$；6）$T_{min}$ 量级 10^{6}—10^{7} K（读图存疑）；7）$E_\nu \le 0.49$ MeV，相对误差 $< 3.7\%$；8）i）$\Delta M \approx 1.4\times10^{25}$ kg；ii）$\Delta T \approx +530$ s

第一题　缺损一根辐条的轮子在地面上的纯滚动

1. 计算题

答案　1）刚释放时角加速度 $\alpha_0 = \dfrac{gmR_0}{2K}$；2）OB 首次竖直（转过 $\pi/6$）时 $\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\dfrac{gmR_0K}{J^2}$，$F_f = R_0\left[(\mu - \dfrac{m}{4})\alpha - \dfrac{\sqrt{3}}{4}m\omega^2\right]$，$F_N = \mu g + \dfrac{mR_0\omega^2 - \sqrt{3}mR_0\alpha}{4}$，其中 $K = \dfrac{3}{2}MR_0^2 + \dfrac{1}{2}MR_1^2 + \dfrac{8}{3}mR_0^2$，$J = K - \dfrac{1}{2}mR_0^2$，$\omega^2 = \dfrac{gmR_0}{2J}$，$\mu = M + 2m$

详解

(1) 对 O 轴的转动惯量与质心位置　轮盘（匀质环形圆盘，内、外半径 R_1、R_0，质量 M）对过 O 且垂直轮面的轴的转动惯量为 $I_{\text{盘}} = \dfrac{1}{2}M(R_0^2 + R_1^2)$；两根辐条均可视为质量 m、长 R_0 的匀质细杆，一端固接于 O，每根 $I = \dfrac{1}{3}mR_0^2$，两根合计 $\dfrac{2}{3}mR_0^2$。故 $I_O = \dfrac{1}{2}M(R_0^2 + R_1^2) + \dfrac{2}{3}mR_0^2$。释放时两辐条与水平方向成 $\pm60^\circ$、所张角平分线水平：每根辐条质心位于离 O 为 $R_0/2$ 处，其水平投影为 $\dfrac{R_0}{2}\cos 60^\circ = \dfrac{R_0}{4}$，两辐条对称于水平线，故轮子质心 C 在水平线上：$x_C = \dfrac{2m\cdot\ R_0/4}{\mu} = \dfrac{mR_0}{2\mu}$，其中 $\mu = M + 2m$ 为轮子总质量。

(2) 第1）问：刚释放时的角加速度　刚释放时 $\omega = 0$，接触点 P（轮缘最低点，位于 O 正下方 R_0 处）速度为零、其切向加速度也为零，故可对瞬时轴 P 直接用转动定律。C 与 P 的水平距离为 $x_C = mR_0/(2\mu)$，重力对 P 轴的力矩大小 $\tau = \mu g\, x_C = \dfrac{gmR_0}{2}$，方向使轮子沿质心偏移方向纯滚动。轮子对 P 轴的转动惯量由平行轴定理求得：$I_P = I_C + \mu\,[x_C^2 + R_0^2] = I_O - \mu x_C^2 + \mu x_C^2 + \mu R_0^2 = I_O + \mu R_0^2$。记 $K \equiv I_O + \mu R_0^2 = \dfrac{3}{2}MR_0^2 + \dfrac{1}{2}MR_1^2 + \dfrac{8}{3}mR_0^2$，于是

$$\alpha_0 = \frac{\tau}{I_P(0)} = \frac{gmR_0/2}{K} = \frac{gmR_0}{2K}$$

（质心水平偏移 x_C 对 I_P 的正、负修正项 $-\mu x_C^2$ 与 $+\mu x_C^2$ 恰好相消，故 $I_P(0) = K$ 精确成立）。

(3) 第2）问之一：转过角度与角速度、角加速度 质心偏移使轮子向 $+x$ 方向纯滚动，辐条顺时针转动。初始位于 -60°（较低）的那根辐条（题中 OB）转过 $30^\circ=\pi/6$ 后首次到达竖直向下位置。设转角为 θ，两辐条方位角为 $-\theta\pm60^\circ$，质心相对 O 的坐标为 $x_C=\dfrac{mR_0\cos\theta}{2\mu}$，$y_C=-\dfrac{mR_0\sin\theta}{2\mu}$（$y$ 轴向上为正）。由平行轴定理，轮子对瞬时触地点 P 的转动惯量

$$I_P(\theta)=I_C+\mu\left[x_C^2+(R_0+y_C)^2\right]=I_O-\mu(x_C^2+y_C^2)+\mu x_C^2+\mu(R_0+y_C)^2=I_O+\mu R_0^2+2\mu R_0y_C=K-mR_0^2\sin\theta$$

机械能守恒：质心下降 $\Delta h=-y_C=\dfrac{mR_0\sin\theta}{2\mu}$，故

$$\frac{1}{2}I_P(\theta)\omega^2=\mu g\Delta h=\frac{gmR_0}{2}\sin\theta$$

将 I_P 代入并对 t 求导（注意 $\mathrm{d}I_P/\mathrm{d}t=-mR_0^2\cos\theta\cdot\ \omega$）：

$$I_P\alpha+\frac{1}{2}\omega^2I_P'=\frac{gmR_0}{2}\cos\theta\ \Rightarrow\ \alpha=\frac{\dfrac{gmR_0}{2}\cos\theta+\dfrac{mR_0^2}{2}\omega^2\cos\theta}{I_P}$$

在 $\theta=\pi/6$ 处：$\sin\theta=1/2$ 给出 $\omega^2=\dfrac{gmR_0}{2J}$，其中 $J\equiv I_P(\pi/6)=K-\dfrac{1}{2}mR_0^2$；$\cos\theta=\sqrt{3}/2$ 代入并利用 $J+\dfrac{mR_0^2}{2}=K$，得

$$\alpha=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\ \frac{gmR_0\left(J+\dfrac{mR_0^2}{2}\right)}{J^2}=\frac{\sqrt{3}\,gmR_0K}{4J^2}$$

方向仍为顺时针（继续加速滚动）。

(4) 第2）问之二：摩擦力与支持力 以地面为参考系，轮心 O 只有水平加速度 $a_O=\alpha R_0$（沿滚动方向）。质心相对 O 以角速度 ω、角加速度 α 转动（顺时针），相对加速度为切向 $\alpha(y_C,-x_C)$ 与向心 $-\omega^2(x_C,y_C)$ 之和。在 $\theta=\pi/6$ 处 $x_C=\dfrac{\sqrt{3}mR_0}{4\mu}$，$y_C=-\dfrac{mR_0}{4\mu}$，故

$$a_{Cx}=\alpha R_0+\alpha y_C-\omega^2x_C=\alpha R_0-\frac{\alpha mR_0}{4\mu}-\frac{\sqrt{3}mR_0\omega^2}{4\mu}$$

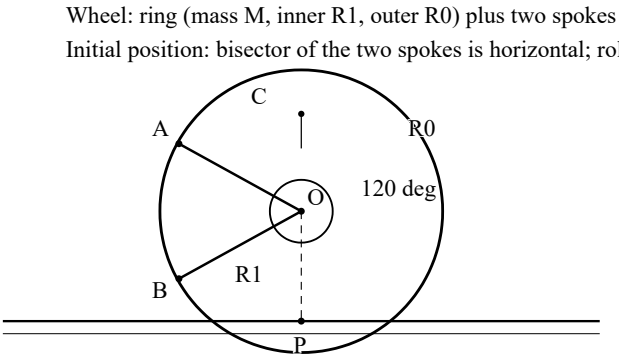
$$a_{Cy}=\alpha x_C-\omega^2y_C=\frac{\sqrt{3}mR_0\alpha}{4\mu}+\frac{mR_0\omega^2}{4\mu}$$

由质心运动定理：水平方向只有摩擦力，竖直方向有支持力与重力，

$$F_f=\mu a_{Cx}=R_0\left[\left(\mu-\frac{m}{4}\right)\alpha-\frac{\sqrt{3}}{4}m\omega^2\right]$$

$$F_N=\mu g+\mu a_{Cy}=\mu g+\frac{mR_0\omega^2-\sqrt{3}mR_0\alpha}{4}$$

将 α、ω^2 的表达式代入即得完全用 M,m,R_0,R_1,g 表示的结果。回代检验：当 $m\to0$（无辐条）时 $\alpha_0\to0$、$F_f\to0$、$F_N\to\mu g$，与完整匀质轮静止释放不滚的物理图像一致。



题1示意图：双辐条轮子的初始位置、几何参量与瞬时转轴 P

本站按题意取 OB 为初始位置较低（与水平成 -60° ）的辐条，其转过 $\pi/6$ 后首次竖直（竖直向下）；若原卷图中 A、B 标注与该假定相反，将两辐条角色对调即可，全部公式形式不变。刚释放瞬间可对瞬时轴 P 用转动定律，是因为此时接触点加速度为零（$\omega=0$）；一般时刻须用能量法微分并结合质心运动定理求解。

第二题　两种耗损电介质构成的半圆柱

2. 计算题

答案　1）$E_1=\dfrac{V_0\sigma_2}{r\,(\varphi_0\sigma_2+(\pi-\varphi_0)\sigma_1)}$，$E_2=\dfrac{V_0\sigma_1}{r\,(\varphi_0\sigma_2+(\pi-\varphi_0)\sigma_1)}$（均沿角向），$V_1=\dfrac{V_0\sigma_2\varphi}{D}$（$\varphi\le\varphi_0$），$V_2=V_0-\dfrac{V_0\sigma_1(\pi-\varphi)}{D}$（$\varphi\ge\varphi_0$），$D\equiv\varphi_0\sigma_2+(\pi-\varphi_0)\sigma_1$；2）$Q=\dfrac{\varepsilon_0 l V_0(\varepsilon_{r2}\sigma_1-\varepsilon_{r1}\sigma_2)\ln(b/a)}{\varphi_0\sigma_2+(\pi-\varphi_0)\sigma_1}$；3）$C_1=\dfrac{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}l\ln(b/a)}{\varphi_0}$，$C_2=\dfrac{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}l\ln(b/a)}{\pi-\varphi_0}$，$R_1=\dfrac{\varphi_0}{\sigma_1 l\ln(b/a)}$，$R_2=\dfrac{\pi-\varphi_0}{\sigma_2 l\ln(b/a)}$；4）$V(t)=V_0\dfrac{R_1\mathrm{e}^{-t/\tau_1}+R_2\mathrm{e}^{-t/\tau_2}}{R_1+R_2}$，$\tau_1=\varepsilon_0\varepsilon_{r1}/\sigma_1$，$\tau_2=\varepsilon_0\varepsilon_{r2}/\sigma_2$

详解

(1) 第1）问：电场与电势分布　金属膜镀在半圆柱两个平面端面（$\varphi=0$ 与 $\varphi=\pi$ 处的半环形端面）上，电流沿角向 ϕ 流动。由对称性，设两介质区域内电场大小分别为 $E_1(r)$、$E_2(r)$，方向沿角向。在 r 到 $r+\mathrm{d}r$ 的薄柱壳内，电流沿角向流动的横截面为 $l\,\mathrm{d}r$；稳恒条件下总电流 $I=\sigma_i E_i\,l\,\mathrm{d}r$ 逐壳相同且不随 φ 变化，由 $\nabla\cdot\vec{j}=0$ 与两端面为等位面可设 $E_i=C_i/r$（否则不同半径回路上的电压降不一致）。电流连续性要求跨过 $\varphi=\varphi_0$ 界面的电流相等：$\sigma_1E_1=\sigma_2E_2$，即 $\sigma_1C_1=\sigma_2C_2\equiv K$。两介质上的电压之和为

$$C_1\varphi_0+C_2(\pi-\varphi_0)=V_0\ \Rightarrow\ K\left(\frac{\varphi_0}{\sigma_1}+\frac{\pi-\varphi_0}{\sigma_2}\right)=V_0$$

解得

$$E_1=\frac{V_0\sigma_2}{r\,[\varphi_0\sigma_2+(\pi-\varphi_0)\sigma_1]},\qquad E_2=\frac{V_0\sigma_1}{r\,[\varphi_0\sigma_2+(\pi-\varphi_0)\sigma_1]}$$

取 $\varphi=0$ 端面电势为零，由 $\mathrm{d}V=-E\,r\,\mathrm{d}\varphi=-C_i\,\mathrm{d}\varphi$ 积分得：$\varphi\le\varphi_0$ 区域 $V(\varphi)=\dfrac{V_0\sigma_2\,\varphi}{D}$；$\varphi\ge\varphi_0$ 区域 $V(\varphi)=V_0-\dfrac{V_0\sigma_1(\pi-\varphi)}{D}$，其中 $D\equiv\varphi_0\sigma_2+(\pi-\varphi_0)\sigma_1$。电势只依赖 φ，与 r 无关，与端面为等位面自洽。

(2) 第2）问：界面处的总电荷 $\varphi=\varphi_0$ 界面上的面电荷密度（自由电荷与极化电荷之和）由 $\vec{D}$ 法向分量跃变给出：$\sigma_{tot}=\varepsilon_0(\varepsilon_{r2}E_2-\varepsilon_{r1}E_1)=\dfrac{\varepsilon_0 K}{r}\left(\dfrac{\varepsilon_{r2}}{\sigma_2}-\dfrac{\varepsilon_{r1}}{\sigma_1}\right)$，随 $1/r$ 变化。对整个界面（r 从 a 到 b、轴向长 l）积分：

$$Q=\int \sigma_{tot}\,l\,\mathrm{d}r=\varepsilon_0 lK\left(\frac{\varepsilon_{r2}}{\sigma_2}-\frac{\varepsilon_{r1}}{\sigma_1}\right)\int_a^b\frac{\mathrm{d}r}{r}=\frac{\varepsilon_0 l V_0(\varepsilon_{r2}\sigma_1-\varepsilon_{r1}\sigma_2)\ln(b/a)}{\varphi_0\sigma_2+(\pi-\varphi_0)\sigma_1}$$

若两介质的 ε_r/σ 相等则 $Q=0$，界面无净积累电荷，物理上合理。

(3) 第3）问：各介质区域的电容与电阻 电容：以区域1（$0\le\varphi\le\varphi_0$）为例，其端面上自由电荷面密度 $\sigma_f=\varepsilon_0\varepsilon_{r1}E_1$，端面半环带上的总自由电荷 $Q_1=\int\varepsilon_0\varepsilon_{r1}E_1\,l\,\mathrm{d}r=\varepsilon_0\varepsilon_{r1}C_1 l\ln(b/a)$，区域1两端电压为 $C_1\varphi_0$，故

$$C_{cap,1}=\frac{Q_1}{C_1\varphi_0}=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}l\ln(b/a)}{\varphi_0},\qquad C_{cap,2}=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}l\ln(b/a)}{\pi-\varphi_0}$$

电阻：对 r 处厚 $\mathrm{d}r$ 的柱壳，区域1部分的电导 $\mathrm{d}G_1=\sigma_1 l\,\mathrm{d}r/(r\varphi_0)$，积分得 $G_1=\sigma_1 l\ln(b/a)/\varphi_0$，故

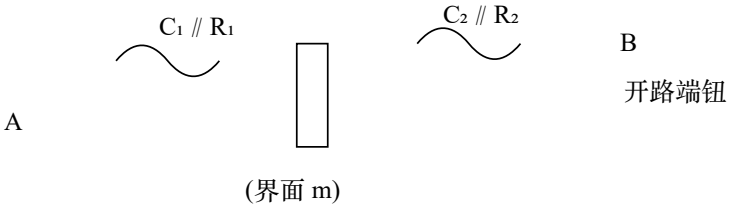
$$R_1=\frac{\varphi_0}{\sigma_1 l\ln(b/a)},\qquad R_2=\frac{\pi-\varphi_0}{\sigma_2 l\ln(b/a)}$$

自洽检验：$R_1C_{cap,1}=\varepsilon_0\varepsilon_{r1}/\sigma_1$、$R_2C_{cap,2}=\varepsilon_0\varepsilon_{r2}/\sigma_2$，正为两种介质的电荷弛豫时间。

(4) 第4）问：断开电源后的电压衰减与等效电路 断开电源后两金属膜彼此绝缘（外电路开路），每个介质区域等效为一个电容器 C_i 与漏电阻 R_i 的并联，两并联块经 $\varphi=\varphi_0$ 界面串联构成闭合回路（麦克斯韦-瓦格纳弛豫）。设 $v_1=V_A-V_m$、$v_2=V_m-V_B$。膜 A 只与区域1相连，其电荷仅经 R_1 泄漏：$C_1\dfrac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{v_1}{R_1}$，解得 $v_1=v_1(0)\mathrm{e}^{-t/\tau_1}$，$\tau_1=R_1C_1=\varepsilon_0\varepsilon_{r1}/\sigma_1$；同理 $v_2=v_2(0)\mathrm{e}^{-t/\tau_2}$，$\tau_2=\varepsilon_0\varepsilon_{r2}/\sigma_2$。断开时刻（$t=0^-$）为稳恒漏电状态，总电流 $I_0=V_0/(R_1+R_2)$，故 $v_1(0)=V_{10}=\dfrac{V_0R_1}{R_1+R_2}$，$v_2(0)=V_{20}=\dfrac{V_0R_2}{R_1+R_2}$。两金属膜间电压

$$V(t)=V_{10}\mathrm{e}^{-t/\tau_1}+V_{20}\mathrm{e}^{-t/\tau_2}=V_0\frac{R_1\mathrm{e}^{-t/(\varepsilon_0\varepsilon_{r1}/\sigma_1)}+R_2\mathrm{e}^{-t/(\varepsilon_0\varepsilon_{r2}/\sigma_2)}}{R_1+R_2}$$

等效电路为 $C_1\ /\!/\ R_1$ 与 $C_2\ /\!/\ R_2$ 串联、端钮开路，界面自由电荷 $q_m(t)=-C_1v_1+C_2v_2$ 随两个时间常数共同衰减。



断开电源后的等效电路：$C_1\ /\!/\ R_1$ 与 $C_2\ /\!/\ R_2$ 经界面 m 串联，端钮开路

本题关键有三：一是 $E\propto 1/r$（由两端面为等位面与稳恒条件共同决定）；二是界面总电荷按 $1/r$ 分布、总电荷中出现 $\ln(b/a)$；三是断电后并非单指数衰减，而是两个独立时间常数 $\tau_i=\varepsilon_0\varepsilon_{ri}/\sigma_i$ 的双指数（麦克斯韦-瓦格纳弛豫）。

第三题　超导重力仪

3. 计算题

答案 1）$\Delta g=\dfrac{G(\rho_{水}-\rho_0)V}{d^2}\approx -5.6\times10^{-3}\ \mathrm{m\cdot\ s^{-2}}$（地下湖使当地重力加速度减小）；2）i）$B_0=\dfrac{\mu_0 N i_0}{2R}\left(1+\dfrac{\alpha}{2\sqrt{2}}\right)$，$\beta=\dfrac{\dfrac{9\alpha}{2^{9/2}}-\dfrac{3}{4}}{\left(1+\dfrac{\alpha}{2\sqrt{2}}\right)R^2}$；ii）$I_0=-\dfrac{\pi D^2 B_0}{4L}$；iii）$g_0=\dfrac{3\pi^2\mu_0^2\alpha N^2 i_0^2 D^4\left(1+\dfrac{\alpha}{2\sqrt{2}}\right)}{2^{17/2}R^3 Lm}$；3）$\Delta g=\dfrac{8\varepsilon_0 A V_C}{md^2}\Delta V$

详解

(1) 第1）问：地下湖引起的重力变化 地球视为半径 $R_E=6370\ \mathrm{km}$ 的均匀球体，其平均密度 $\rho_0=\dfrac{3M}{4\pi R_E^3}$，而 $M=\dfrac{g_0R_E^2}{G}$，故 $\rho_0=\dfrac{3g_0}{4\pi GR_E}=\dfrac{3\times9.80}{4\pi\times6.67\times10^{-11}\times6.37\times10^{6}}\approx5.5\times10^{3}\ \mathrm{kg\cdot\ m^{-3}}$。地下湖半径 $a=10\ \mathrm{km}$，体积 $V=\dfrac{4}{3}\pi a^3=4.19\times10^{12}\ \mathrm{m^3}$，球心深度 $d=15\ \mathrm{km}$，位于观测点正下方。湖水（$\rho_{水}=1.0\times10^{3}\ \mathrm{kg\cdot\ m^{-3}}$）取代了同体积密度为 ρ_0 的地球物质，质量亏缺 $\Delta M=(\rho_{水}-\rho_0)V=-1.89\times10^{16}\ \mathrm{kg}$，它在观测点产生的引力加速度为

$$\Delta g=\frac{G\Delta M}{d^2}=\frac{6.67\times10^{-11}\times(-1.89\times10^{16})}{(1.5\times10^{4})^2}\approx-5.6\times10^{-3}\ \mathrm{m\cdot\ s^{-2}}$$

即地下湖使当地重力加速度减小约 $5.6\times10^{-3}\ \mathrm{m\cdot\ s^{-2}}$，约为 g_0 的 5.7×10^{-4}。

(2) 第2）问 i）：B_0 与 β 的表达式 单匝半径 R 的载流圆线圈在其轴线上距线圈平面 u 处产生的磁感应强度 $B(u)=\dfrac{\mu_0 iR^2}{2(R^2+u^2)^{3/2}}$。上线圈平面中心（$r=0,\ z=R$）处：上线圈（$N$ 匝，$u=0$）贡献 $\dfrac{\mu_0 N i_0}{2R}$；下线圈（αN 匝，$u=R$）贡献 $\dfrac{\mu_0\alpha N i_0 R^2}{2(2R^2)^{3/2}}=\dfrac{\mu_0\alpha N i_0}{4\sqrt{2}R}$。故

$$B_0=\frac{\mu_0 N i_0}{2R}\left(1+\frac{\alpha}{2\sqrt{2}}\right)$$

径向修正：近轴展开 $B_z(r,z)\approx B_z(0,z)-\dfrac{r^2}{4}\cdot\dfrac{\partial^2 B_z(0,z)}{\partial z^2}$。对单线圈 $\dfrac{\partial^2 B}{\partial z^2}=\dfrac{3\mu_0 iR^2}{2}(4u^2-R^2)(R^2+u^2)^{-7/2}$：上线圈（$u=0$）为 $-\dfrac{3\mu_0 N i_0}{2R^3}$，下线圈（$u=R$）为 $+\dfrac{9\mu_0\alpha N i_0}{2^{9/2}R^3}$。于是 $B_z(r,R)=B_0-\dfrac{r^2}{4}\left[-\dfrac{3\mu_0 N i_0}{2R^3}+\dfrac{9\mu_0\alpha N i_0}{2^{9/2}R^3}\right]=B_0(1-\beta r^2)$，其中

$$\beta=\frac{1}{R^2}\cdot\frac{\dfrac{9\alpha}{2^{9/2}}-\dfrac{3}{4}}{1+\dfrac{\alpha}{2\sqrt{2}}}$$

由 $\nabla\cdot\vec{B}=0$ 得 $B_r(r,R)=\dfrac{3\mu_0\alpha N i_0}{2^{9/2}R^2}r$（上线圈自身在其平面内 $B_r=0$，径向场全部来自下线圈）。

(3) 第2）问 ii）：超导细环的感应电流 I_0　超导细环电阻为零，磁通守恒。调试前线圈与环中电流均为零，环处于下线圈平面（$z=0$），穿过环的外磁通为零，故整个过程中环的总磁通恒为零：

$$LI+\Phi_{外}=0$$

缓慢升起电流并使环悬浮于上线圈平面（$z=R$）后，外磁场在环（半径 $D/2 \ll R$，面积 $A=\pi D^2/4$）处的磁通为 $\Phi_{外}=A\,B_0$，故

$$I_0=-\frac{AB_0}{L}=-\frac{\pi D^2\mu_0 N i_0}{8RL}\left(1+\frac{\alpha}{2\sqrt{2}}\right)$$

负号表示超导细环中感应电流方向与线圈电流方向相反，其磁矩与外场反向，这正是获得向上悬浮力的条件。

(4) 第2）问 iii）：当地重力加速度 g_0 的表达式　平衡时，环中电流 I_0 在径向磁场 B_r 中所受安培力的竖直分量与重力平衡。环上电流元 $I_0\,\mathrm{d}l$ 处的 $\vec{B}$ 的径向分量给出的竖直安培力为 $\mathrm{d}F_z=I_0B_r\,\mathrm{d}l$（方向由 I_0 的符号保证向上），对整环积分：

$$F=2\pi\cdot\frac{D}{2}\cdot I_0B_r\left(\frac{D}{2}\right)=\pi D\mid I_0\mid\cdot\frac{3\mu_0\alpha N i_0 D}{2^{10/2}R^2}=\frac{3\pi\mu_0\alpha N i_0 I_0 D^2}{2^{11/2}R^2}$$

（取 I_0 的绝对值计算大小）。代入 $\mid I_0\mid=\dfrac{\pi D^2B_0}{4L}$ 并由 $F=mg_0$ 得

$$g_0=\frac{3\pi^2\mu_0\alpha N i_0 D^4B_0}{2^{15/2}R^2Lm}=\frac{3\pi^2\mu_0^2\alpha N^2 i_0^2 D^4}{2^{17/2}R^3Lm}\left(1+\frac{\alpha}{2\sqrt{2}}\right)$$

只要已知准亥姆霍兹线圈与悬浮环参数并测出 i_0，即可定出当地 g_0。

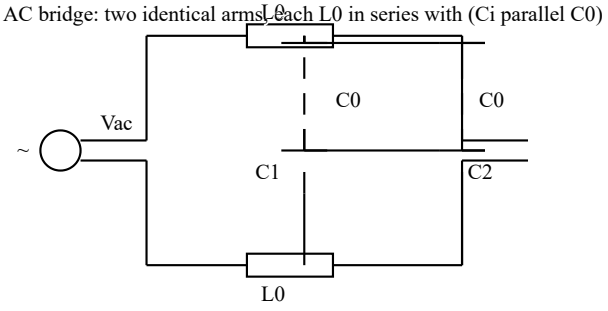
(5) 第3）问：Δg 与 ΔV 的关系　重力加速度为 g 时环静止在 $z=R$，上、下极板对超导“平板”的吸引力抵消，两电容上电压均为 V_C。设上、下极板间距为 d，平板居中（与每板距离 $d/2$）。当重力加速度改变 Δg 时，平板受到多余的向下力 $m\Delta g$；此时在 C_1 上把直流电压增至 $V_C+\Delta V$、在 C_2 上减至 $V_C-\Delta V$，两板吸引力之差为

$$\Delta F=\frac{\varepsilon_0 A\left[(V_C+\Delta V)^2-(V_C-\Delta V)^2\right]}{2(d/2)^2}=\frac{8\varepsilon_0 A V_C\,\Delta V}{d^2}$$

平板在 $z=R$ 处重新达到力学平衡要求 $\Delta F=m\Delta g$，故

$$\Delta g=\frac{8\varepsilon_0 A V_C}{md^2}\Delta V$$

通过电桥测出重新平衡所需的 ΔV，即可得 Δg：这正是交流电桥平衡法测微重力的原理。



题3图c：交流电桥（两臂各为 L0 串联 Ci 与 C0 的并联）

第2）问中 B_r 仅由下线圈（αN 匝）提供——任何线圈自身平面内的径向磁场为零，这是由对称性决定的；β 的符号可正可负（取决于 α），不影响悬浮力的计算。第1）问 $\rho_0 \approx 5.5 \times 10^3\ \mathrm{kg\cdot\ m^{-3}}$ 由“均匀球体 + 地表重力”反推，高于真实地幔岩石密度，属模型设定。

第四题　涡轮增压与中间冷却

4. 计算题

> **答案**　1）$m \approx 0.703$ g，输出功率增加到约 1.44 倍；2）$m' \approx 0.634$ g，约 1.29 倍；3）绝热压缩外界做功 $W_1 \approx 14.2$ J，等压冷却外界做功 $W_2 \approx 6.3$ J，总功 ≈ 20.5 J；绝热过程熵变 $\Delta S_1 = 0$，等压冷却熵变 $\Delta S_2 \approx -6.6 \times 10^{-2}\ \mathrm{J\cdot\ K^{-1}}$

详解

(1) 第1）问：增压＋冷却后气缸内空气质量与功率倍数　初始空气（$p_0 = 1.01 \times 10^5$ Pa，$T_0 = 288.15$ K）密度 $\rho_0 = \dfrac{p_0 M}{RT_0} = \dfrac{1.01 \times 10^5 \times 29.0 \times 10^{-3}}{8.31 \times 288.15} = 1.22\ \mathrm{kg\cdot\ m^{-3}}$。经增压器绝热压缩到 $p_1 = 1.45 \times 10^5$ Pa，再经中间冷却器等压降温回 T_0 后进入气缸，气缸内状态为 (p_1, T_0, V_0)，$V_0 = 400\ \mathrm{cm^3} = 4.0 \times 10^{-4}\ \mathrm{m^3}$：

$$m = \frac{p_1 V_0 M}{RT_0} = \frac{1.45 \times 10^5 \times 4.0 \times 10^{-4} \times 0.029}{8.31 \times 288.15} = 7.03 \times 10^{-4}\ \mathrm{kg} \approx 0.703\ \mathrm{g}$$

不加增压与冷却时 $m_0 = \dfrac{p_0 V_0 M}{RT_0} = 4.89 \times 10^{-4}$ kg。发动机输出功率正比于进气质量，故增加到 $\dfrac{m}{m_0} = \dfrac{p_1}{p_0} = \dfrac{1.45}{1.01} \approx$ 1.44 倍。

(2) 第2）问：不加中间冷却器的情形　绝热压缩后温度 $T_1 = T_0 \left(\dfrac{p_1}{p_0}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} = 288.15 \times 1.4355^{2/7} = 288.15 \times 1.1089 \approx$ 319.5 K。此时气缸内空气质量

$$m' = \frac{p_1 V_0 M}{RT_1} = \frac{1.45 \times 10^5 \times 4.0 \times 10^{-4} \times 0.029}{8.31 \times 319.5} = 6.34 \times 10^{-4}\ \mathrm{kg} \approx 0.634\ \mathrm{g}$$

功率倍数 $\dfrac{m'}{m_0} = \dfrac{T_0}{T_1} \cdot \dfrac{p_1}{p_0} = \dfrac{1.4355}{1.1089} \approx 1.29$ 倍。可见中间冷却器在增压基础上再提高约 11% 的进气量（等压降温使密度增大）。

(3) 第3）问之一：外界对气体所做的功　进入气缸的气体摩尔数 $n = \dfrac{m'}{M} = \dfrac{6.34 \times 10^{-4}}{0.029} = 2.18 \times 10^{-2}$ mol，$C_V = \dfrac{R}{\gamma - 1} = 20.8\ \mathrm{J\cdot\ mol^{-1}\cdot\ K^{-1}}$。绝热压缩过程（$p_0, T_0 \to p_1, T_1$）：由热力学第一定律 $W_1 = -Q = \Delta U = nC_V(T_1 - T_0) = 2.18 \times 10^{-2} \times 20.775 \times 31.4 \approx 14.2$ J。等压降温过程（$p_1, T_1, V_1 \to p_1, T_0, V_0$）：$V_1 = V_0 \dfrac{T_1}{T_0}$，外界做功

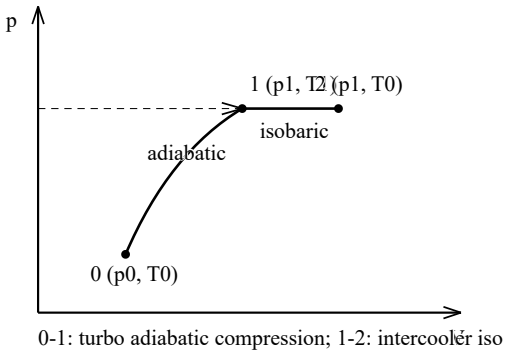
$$W_2 = p_1(V_1 - V_0) = p_1 V_0 \left(\frac{T_1}{T_0} - 1\right) = 1.45 \times 10^5 \times 4.0 \times 10^{-4} \times 0.1089 \approx 6.3\ \mathrm{J}$$

总功 $W = W_1 + W_2 \approx 20.5$ J（对进入一个气缸的这批气体而言）。

(4) 第3）问之二：两个过程的熵变 绝热压缩是可逆绝热过程，熵变 $\Delta S_1 = 0$。等压降温过程：$C_p = \dfrac{\gamma R}{\gamma - 1} = 29.1\ \mathrm{J\cdot\ mol^{-1}\cdot\ K^{-1}}$，

$$\Delta S_2 = nC_p \ln\frac{T_0}{T_1} = 2.18\times10^{-2}\times29.085\times\ln\frac{288.15}{319.5} = 2.18\times10^{-2}\times29.085\times(-0.1033) \approx -6.6\times10^{-2}\ \mathrm{J\cdot\ K^{-1}}$$

熵变为负，是因为气体向中间冷却器放热；由 $\Delta S_1 + \Delta S_2 < 0$ 可知该批气体的熵减少量由环境（冷却器）的熵增补偿，整体满足热力学第二定律。



题4 p-V 图：0-1 绝热压缩，1-2 等压降温

注意区分两个“倍数”：加中间冷却器后是 1.44 倍，只增压不冷却是 1.29 倍；后者小是因为气缸内空气温度 $T_1 > T_0$，密度偏低。做功与熵变均按“进入气缸的那批气体”（$n = 2.18\times10^{-2}$ mol）计算。

第五题　光镊

5. 计算题

> **答案** 1）$D_{o1} \approx 4.12\ \mu$m；2）两透镜间距 $l = 18.9$ mm，$D_2 = 6.0$ mm；3）焦点到样品池底部内表面距离 ≈ 1.75 mm，光斑直径按衍射极限估计 $\approx 1.6\ \mu$m（本站建模值，存疑）；4）$F_x \approx 3.4\times10^{-13}$ N（约为重力的 8.3 倍），$F_y \approx 8.6\times10^{-13}$ N（约为重力的 21 倍）；5）$v_{rms} \approx 1.7\times10^{-3}\ \mathrm{m\cdot\ s^{-1}}$；6）$v_{max} \approx 2.4\times10^{-3}\ \mathrm{m\cdot\ s^{-1}}$；7）$P(m) = P(2m)$，捕获概率相等

详解

(1) 第1）问：不加扩束镜时的聚焦光斑直径 激光波长 $\lambda = 632.8$ nm，光束直径 $D_1 = 1.5$ mm，聚焦物镜焦距 $f = 4.0$ mm。聚焦光斑大小受圆孔衍射限制，艾里斑直径为

$$D_{o1} = \frac{2\times1.22\lambda}{D_1}f = \frac{2\times1.22\times0.6328\ \mu\mathrm{m}}{1.50\ \mathrm{mm}}\times4.00\ \mathrm{mm} = 4.12\ \mu\mathrm{m}$$

(2) 第2）问：扩束镜的间距与扩束后光束直径 倒望远镜结构（$f_1 = -6.3$ mm 凹透镜在前，$f_2 = 25.2$ mm 凸透镜在后）：平行光入射时要求两透镜共焦，间距

$$l = f_1 + f_2 = -6.3 + 25.2 = 18.9\ \mathrm{mm}$$

由相似三角形（出射角/入射角之比为焦距之比），扩束后平行光束直径

$$D_2 = \frac{f_2}{|f_1|}D_1 = \frac{25.2}{6.3}\times1.5\ \mathrm{mm} = 6.0\ \mathrm{mm}$$

(3) 第3）问：水中的聚焦位置与光斑直径 光束自样品池底部外表面依次经空气→玻璃（$n_g = 1.46$）、玻璃→水（$n_w = 1.33$）两次平面折射。设不放置样品池时聚焦点离物镜 $f = 4.0$ mm，底部外表面离物镜 $a = 2.0$ mm，则外表面处会聚光束的“预期焦点”在表面外 2.0 mm 处。平面折射时，会聚光束的等效焦点距离按“乘以入射介质折射率与出射介质折射率之比”变换（会聚角按斯涅尔定律 $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$ 变化）：进入玻璃后等效焦点距外表面 $\frac{n_g}{n_a} \times 2.0 = 2.92$ mm，即在玻璃内距内表面 $2.92 - 1.0 = 1.92$ mm；再进入水后，实际焦点距内表面

$$x = \frac{n_w}{n_g} \times 1.92 = \frac{1.33}{1.46} \times 1.92 \approx 1.75 \text{ mm}$$

光斑直径：束半径在会聚过程中线性收缩，外表面处束半径 $3 \times \frac{4-2}{4} = 1.5$ mm；玻璃中会聚角 $\tan\theta_g = 1.5/2.92$，内表面处束半径 $1.5 - 1.0 \times 0.514 \approx 0.99$ mm；水中会聚角 $\tan\theta_w = \frac{n_g}{n_w}\tan\theta_g = 0.564$，数值孔径 $\mathrm{NA} = n_w \sin\theta_w \approx 0.49$，衍射极限光斑直径

$$D_{o2} \approx \frac{1.22\lambda}{\mathrm{NA}} = \frac{1.22 \times 0.6328\ \mu\text{m}}{0.49} \approx 1.6\ \mu\text{m}$$

【存疑】此小问的衍射光斑直径为本站按上述模型独立估算，原卷解答对该值的处理（含内外表面折射的放大修正）未能从卷面完整抄录，若与本卷印刷值不符以卷面为准；焦点位置 1.75 mm 与卷面陈述一致。

(4) 第4）问：梯度光强中小球所受的光力 光功率 P 的光束单位时间携带动量 P/c。入射 L_1（$P_1 = 1.0$ mW）、L_2（$P_2 = 2.0$ mW）均沿 $+x$ 方向；经小球两次折射后，L_1 出射方向与 x 轴成 $+15^\circ$、L_2 成 -15°（图 b）。不考虑吸收与反射损耗，光束动量变化之和的反作用即小球所受力：

$$\vec{F} = -\sum \frac{\mathrm{d}\vec{p}_{\text{光}}}{\mathrm{d}t} = \frac{(P_1 + P_2)(1 - \cos 15^\circ)}{c}\hat{x} + \frac{(P_2 - P_1)\sin 15^\circ}{c}\hat{y}$$

代入 $1 - \cos 15^\circ = 0.0341$、$\sin 15^\circ = 0.2588$：

$$F_x = \frac{3.0 \times 10^{-3} \times 0.0341}{3.0 \times 10^8} = 3.4 \times 10^{-13}\ \text{N}, \qquad F_y = \frac{1.0 \times 10^{-3} \times 0.2588}{3.0 \times 10^8} = 8.6 \times 10^{-13}\ \text{N}$$

小球质量 $m = \rho_b \cdot \frac{\pi}{6}D_b^3 = 1.0 \times 10^3 \times 4.19 \times 10^{-18} = 4.19 \times 10^{-15}$ kg，重力 $mg = 4.1 \times 10^{-14}$ N。故

$$\frac{F_x}{mg} \approx 8.3, \qquad \frac{F_y}{mg} \approx 21$$

两个方向的梯度力均沿坐标轴正方向且远大于重力，可实现对小球的捕获。

(5) 第5）问：室温下小球的方均根速率 水中聚苯乙烯小球满足能量均分定理 $\overline{E_k} = \frac{3}{2}k_B T$（$T = 300$ K），故

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3 \times 1.38 \times 10^{-23} \times 300}{4.19 \times 10^{-15}}} = \sqrt{2.97 \times 10^{-6}} \approx 1.7 \times 10^{-3}\ \text{m}\cdot\ \text{s}^{-1}$$

(6) 第6）问：光势阱能捕获的最大速率 光势阱 $U(r) = -U_0\left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right)$（$r \le b$），阱深 $U_0 = 0.078$ eV $= 1.25 \times 10^{-20}$ J（$r = 0$ 处势能最低 $-U_0$，$r = b$ 处为 0）。由能量守恒，小球动能不超过阱深才能被捕获：$\frac{1}{2}mv^2 \le U_0$，

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2U_0}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 1.25 \times 10^{-20}}{4.19 \times 10^{-15}}} = \sqrt{5.97 \times 10^{-6}} \approx 2.4 \times 10^{-3}\ \text{m}\cdot\ \text{s}^{-1}$$

(7) 第7）问：质量 m 与 2m 的小球被捕获的概率比较 被捕获的概率为

$$P=\int_0^{v_{max}} f(v)\,\mathrm{d}v=\int_0^{\sqrt{2U_0/m}} 4\pi\left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{3/2} v^2\mathrm{e}^{-mv^2/2k_BT}\,\mathrm{d}v$$

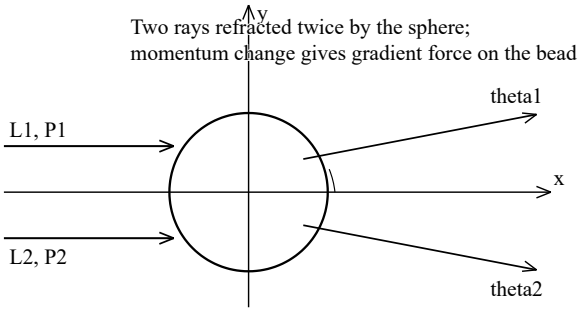
作代换 $u=\sqrt{\frac{m}{2k_BT}}\,v$，则积分上限变为 $\sqrt{\frac{U_0}{k_BT}}$——与质量无关！积分成为

$$P=4\pi\left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{3/2}\left(\frac{2k_BT}{m}\right)^{3/2}\int_0^{\sqrt{U_0/k_BT}} u^2\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{U_0/k_BT}} u^2\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$$

归一化因子中的 $m^{3/2}$ 恰与积分变量代换带来的 $m^{-3/2}$ 相消，捕获概率只与 U_0 和温度 T 有关，而与小球质量无关。因此质量为 m 和 $2m$ 的聚苯乙烯小球被光势阱捕获的概率相等：

$$P(m)=P(2m)$$

物理图像：重的小球虽然 v_{max} 更小，但其速率分布本身也更“慢”，两种效应恰好抵消。



题5图b：小球在梯度光强（两束光）中的受力简化模型

第3）问光斑直径与第6）问读图有关的部分为本站建模/读图结果，已在正文标注存疑。第4）问中 y 方向力来自两束光功率不等（$P_2>P_1$），x 方向力来自折射使光束偏转（$1-\cos 15^\circ$ 项）——这正是“梯度力捕捉、散射力推送”的简化体现。

第六题　太阳模型

6. 计算题

答案 1）i）$\Phi = d/L$；iii）$\Phi \approx 0.0125\ \text{rad} \approx 0.72^\circ$；2）i）$r_{VE} \approx 0.723$；ii）$D_P/S \approx 7.8 \times 10^{-3}$，$\Phi \approx 9.9 \times 10^{-3}\ \text{rad} \approx 0.57^\circ$；iii）$S_{\text{日地}} = \dfrac{1.60\, r_{VE} H}{(1 - r_{VE})\, \omega_{rel}\, \Delta t}$；iv）$\approx 1.7 \times 10^{8}$ km（本站建模近似，存疑）；3）i）1.75×10^{17} W；ii）$\approx 5.5 \times 10^{-5}$；iii）$3.9 \times 10^{26}$ W；iv）$\approx 5.8 \times 10^{3}$ K；4）i）$M \approx 2.0 \times 10^{30}$ kg，$\bar{\rho} \approx 1.4 \times 10^{3}\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$；ii）约 2.4×10^{3} 年，约 2×10^{6} 倍；5）i）$\approx 3.6 \times 10^{38}$ 个/秒；ii）$\approx 7.5 \times 10^{10}$ 年，$P_{pp} \approx 4.2 \times 10^{-19}\ \text{s}^{-1}$；iii）$\approx 6.4 \times 10^{14}\ \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$；iv）$\approx 4.3 \times 10^{9}\ \text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$；6）$T_{min}$ 量级 10^{6}—10^{7} K（读图存疑）；7）$E_\nu \le 0.49$ MeV，相对误差 $< 3.7\%$；8）i）$\Delta M \approx 1.4 \times 10^{25}$ kg；ii）$\Delta T \approx +530$ s

详解

(1) 第1）问：竹竿测太阳视角 i）太阳盘面恰好充满竹竿内管时，太阳直径 D、日地距离 $S_{\text{日地}}$ 与竹竿内径 d、长度 L 构成相似三角形，太阳视角（弧度制）

$$\Phi = \frac{D}{S_{\text{日地}}} \approx \frac{d}{L}$$

（小角度近似）。ii）主要误差来自太阳盘面是否“刚好”充满内管：可在竹竿前加一个半径可调的遮挡圆盘（原理类似日晷仪），使盘面边缘与内管边缘同时清晰对准；此外可多次测量取平均、选用内径更小而 L 更长的竹竿以提高角分辨率。iii）$d = 1$ 寸、$L = 8$ 尺 $= 80$ 寸，

$$\Phi = \frac{1}{80} = 0.0125\ \text{rad} \approx 0.72^\circ$$

比太阳实际视角（约 0.53°）偏大，说明该法误差显著。

(2) 第2）问 i）：日金距离与日地距离之比 由开普勒第三定律（圆轨道）$\dfrac{a^3}{T^2} = \text{常量}$，

$$r_{VE} = \frac{S_{\text{日金}}}{S_{\text{日地}}} = \left(\frac{T_{\text{金}}}{T_{\text{地}}}\right)^{2/3} = \left(\frac{224.701}{365.256}\right)^{2/3} = 0.6152^{2/3} \approx 0.723$$

(3) 第2）问 ii）：凌日弦长与太阳视角 凌日时金星位于日地之间，距地球 $d_{EV}=(1-r_{VE})S_{日地}$。金星、地球的公转线速度分别为 $v_V=\dfrac{2\pi r_{VE}S_{日地}}{T_{金}}$、$v_E=\dfrac{2\pi S_{日地}}{T_{地}}$（以 $S_{日地}=1.5\times10^{8}$ km 代入得 $v_V\approx3.04\times10^{6}$ km/天，$v_E\approx2.58\times10^{6}$ km/天）。金星视线相对太阳视线转动的角速率（金星 apparent 逆行与太阳顺行叠加）

$$\omega_{rel}=\frac{v_V+v_E}{(1-r_{VE})S_{日地}}\approx0.0280\ \text{rad/天}$$

由图 a，金星中心扫过太阳盘面（凌始外切 6:10:10 至凌终外切 12:49:31）历时 $t=6\,\text{h}\,39\,\text{min}\,21\,\text{s}=0.2773$ 天，弦长与日地距离之比

$$\frac{D_P}{S_{日地}}=\omega_{rel}\,t=0.0280\times0.2773\approx7.8\times10^{-3}$$

若弦与盘面圆心距离 $h_P=\dfrac{5D}{16}$（D 为太阳直径），由圆的几何 $D_P=2\sqrt{R^2-h_P^2}=2D\sqrt{\dfrac{1}{4}-\dfrac{25}{256}}=0.781D=0.781\Phi S_{日地}$，故

$$\Phi=\frac{D_P/S_{日地}}{0.781}\approx\frac{7.8\times10^{-3}}{0.781}\approx9.9\times10^{-3}\ \text{rad}\approx0.57^{\circ}$$

与太阳实际视角 0.53° 量级一致。

(4) 第2）问 iii）：双站观测测日地距离的公式 两观察者 P、P′ 沿同一经线相距（垂直于观测方向的投影）H。基线 H 对金星（距离 $d_{EV}=(1-r_{VE})S_{日地}$）所张的视差角为 $\psi=\dfrac{H}{(1-r_{VE})S_{日地}}$；该视差使金星视线延长到太阳盘面（距金星 $r_{VE}S_{日地}$）时轨迹横移

$$\Delta h=\psi\cdot\ r_{VE}S_{日地}=\frac{r_{VE}H}{1-r_{VE}}$$

凌日轨迹偏离盘心 h 处的弦长 $D_P=2\sqrt{R^2-h^2}$，轨迹横移 Δh 引起弦长变化 $\Delta D_P\approx\dfrac{2h\,\Delta h}{\sqrt{R^2-h^2}}$。另一方面两站凌日时间之差对应的弦长差为 $\omega_{rel}S_{日地}(t_{P'}-t_P)$。取 $h=\dfrac{5D}{16}=\dfrac{5\Phi S_{日地}}{16}$、$\sqrt{R^2-h^2}=0.3903\Phi S_{日地}$，两式相等后 $\Phi S_{日地}$ 消去：

$$\omega_{rel}S_{日地}\Delta t=\frac{2h}{\sqrt{R^2-h^2}}\cdot\ \frac{r_{VE}H}{1-r_{VE}}=1.60\cdot\ \frac{r_{VE}H}{1-r_{VE}}$$

故

$$S_{日地}=\frac{1.60\,r_{VE}H}{(1-r_{VE})\,\omega_{rel}\,(t_{P'}-t_P)}$$

(5) 第2）问 iv）：代入北京、香港数据 北京纬度 39.5°、香港 22.5°，同经线上两纬线间距离 $H=R_E\,\Delta\varphi=6370\times\dfrac{17^{\circ}\times\pi}{180^{\circ}}\approx1890$ km。凌日时间差 $\Delta t=6\,\text{h}\,21\,\text{min}\,57\,\text{s}-6\,\text{h}\,19\,\text{min}\,31\,\text{s}=146\,\text{s}=1.690\times10^{-3}$ 天。代入 iii）结论：

$$S_{日地}=\frac{1.60\times0.723\times1890}{0.277\times0.0280\times1.690\times10^{-3}}\approx1.7\times10^{8}\ \text{km}$$

【存疑】此值比公认值 1.496×10^{8} km 偏大约 10%，来源于本站对轨迹偏移 h、H 投影方向等几何因素的简化建模（原卷解答对应数值式在文本层缺失）；若与本卷印刷值不符以卷面为准。

(6) 第3）问：太阳辐射能量与表面温度 i）地球拦截的辐射功率 $P_E = I\cdot\ \pi R_E^2 = 1.37\times10^3\times\pi\times(6.37\times10^6)^2 = 1.75\times10^{17}$ W。ii）全球 70 亿人年耗能 $7.0\times10^9\times3000$ kg $= 2.1\times10^{13}$ kg 标准煤，每千克发电 4 度即 1.44×10^7 J，年耗 3.0×10^{20} J；地球年接收 $1.75\times10^{17}\times3.156\times10^7 = 5.5\times10^{24}$ J，之比 $\dfrac{3.0\times10^{20}}{5.5\times10^{24}}\approx5.5\times10^{-5}$，不到万分之一。iii）太阳总辐射功率 $P_{日} = I\cdot\ 4\pi S_{日地}^2 = 1.37\times10^3\times4\pi\times(1.5\times10^{11})^2\approx3.9\times10^{26}$ W。iv）太阳表面（半径 $R_{日}=0.7\times10^9$ m）单位面积辐射 $\dfrac{P_{日}}{4\pi R_{日}^2} = 6.3\times10^7$ W$\cdot\ $ m$^{-2} = \sigma T^4$，

$$T = \left(\frac{6.3\times10^7}{5.67\times10^{-8}}\right)^{1/4}\approx5.8\times10^3\ \mathrm{K}$$

(7) 第4）问：太阳的质量、密度与化学能假说 i）地球公转速度 $v = \dfrac{2\pi S_{日地}}{T_{地}} = 2.99\times10^4$ m$\cdot\ $ s^{-1}，由万有引力提供向心力

$$M = \frac{v^2 S_{日地}}{G} = \frac{(2.99\times10^4)^2\times1.5\times10^{11}}{6.67\times10^{-11}}\approx2.0\times10^{30}\ \mathrm{kg}$$

$$\bar{\rho} = \frac{3M}{4\pi R_{日}^3} = \frac{3\times2.0\times10^{30}}{4\pi\times(0.7\times10^9)^3}\approx1.4\times10^3\ \mathrm{kg}\cdot\ \mathrm{m}^{-3}$$

约为水密度的 1.4 倍。ii）按题中口径取 1 kg 标准煤放能 1.44×10^7 J（4 度电），维持太阳辐射每秒需烧煤 $\dfrac{P_{日}}{1.44\times10^7} = 2.7\times10^{19}$ kg$\cdot\ $ s^{-1}，全部质量可烧

$$t = \frac{M\times1.44\times10^7}{P_{日}} = \frac{2.0\times10^{30}\times1.44\times10^7}{3.9\times10^{26}}\approx7.5\times10^{10}\ \mathrm{s}\approx2.4\times10^3\ \text{年}$$

远小于太阳存在 50 亿年的事实，故太阳产能效率至少是化学能的 $\dfrac{5\times10^9}{2.4\times10^3}\approx2\times10^6$ 倍，太阳能源只能来自核聚变。

(8) 第5）问 i）：单位时间消耗的质子数 p-p 链总效果 $4\,\mathrm{p}\rightarrow{}^4\mathrm{He}+2\mathrm{e}^+ + 2\nu_e$，正电子湮灭并计入电子质量后，每次循环放能

$$Q = [4(m_p+m_e) - m_{^4He} - 2m_e]\,c^2 = (4\times938.81 - 3728.52)\ \mathrm{MeV}\approx26.7\ \mathrm{MeV} = 4.28\times10^{-12}\ \mathrm{J}$$

单位时间循环次数 $\dfrac{P_{日}}{Q} = \dfrac{3.9\times10^{26}}{4.28\times10^{-12}} = 9.1\times10^{37}$ s^{-1}，消耗质子数为其 4 倍：

$$\dot{N}_p = 3.6\times10^{38}\ \text{个/s}$$

(9) 第5）问 ii）：可维持年限与质子-质子反应概率 太阳内质子总数 $N = \dfrac{0.71M}{m_p}$，$m_p = \dfrac{938.3\times1.602\times10^{-13}\ \mathrm{MeV}\rightarrow\mathrm{J}}{(3.00\times10^8)^2} = 1.67\times10^{-27}$ kg，$N = \dfrac{1.42\times10^{30}}{1.67\times10^{-27}} = 8.5\times10^{56}$ 个。假设全部质子最终参与聚变，可维持

$$t = \frac{N}{\dot{N}_p} = \frac{8.5\times10^{56}}{3.6\times10^{38}} = 2.4\times10^{18}\ \mathrm{s}\approx7.5\times10^{10}\ \text{年}$$

单位时间单个质子的反应概率

$$P_{pp} = \frac{\dot{N}_p}{N} = \frac{3.6\times10^{38}}{8.5\times10^{56}}\approx4.2\times10^{-19}\ \mathrm{s}^{-1}$$

即每个质子平均要等两百多亿年才发生一次聚变——靠的是质子数目的天文数字维持太阳的输出。

(10) 第5）问 iii）iv）：中微子通量与质量流失 iii）每次循环产生 2 个中微子且传播中数目不减，太阳每秒产生 1.8×10^{38} 个；到达地球（垂直辐射方向单位面积）的通量

$$\Phi_\nu=\frac{1.8\times10^{38}}{4\pi S_{\text{日地}}^2}=\frac{1.8\times10^{38}}{2.83\times10^{23}}\approx6.4\times10^{14}\ \text{m}^{-2}\cdot\ \text{s}^{-1}$$

（实际到达的电子中微子为其 35%，加上其他两味中微子后与理论值相符，即中微子振荡。）iv）由质能关系，单位时间太阳因辐射减少的质量

$$\dot M=\frac{P_{\text{日}}}{c^2}=\frac{3.9\times10^{26}}{(3.00\times10^{8})^2}\approx4.3\times10^{9}\ \text{kg}\cdot\ \text{s}^{-1}$$

(11) 第6）问：核心反应温度下限 由 5）ii），要求的 p-p 反应概率 $P_{pp}=4.2\times10^{-19}\ \text{s}^{-1}$。核心区半径约为太阳半径的 1/4，体积为全太阳的 1/64，其平均密度 ρ_c 至多取 $64\bar\rho\approx90\ \text{g}\cdot\ \text{cm}^{-3}$（此处按上限估计），对应质子数密度

$$n=\frac{\rho_c}{m_p}=\frac{90}{1.67\times10^{-24}}\approx5.4\times10^{25}\ \text{cm}^{-3}$$

由 $P=nR(T)$ 得所需反应率 $R=\dfrac{P_{pp}}{n}=\dfrac{4.2\times10^{-19}}{5.4\times10^{25}}\approx7.8\times10^{-45}\ \text{cm}^3\cdot\ \text{s}^{-1}$。由于 p-p 反应率远低于另外两条反应链，总体反应概率由 p-p 决定；在图 c 的 p+p 曲线上读取 $R\approx8\times10^{-45}\ \text{cm}^3\cdot\ \text{s}^{-1}$ 对应的横坐标，即得核心聚变温度下限，量级为

$$T_{min}\sim10^6\text{—}10^7\ \text{K}$$

【存疑】图 c 为印刷曲线，本站读数误差较大，未能唯一确定 T_{min} 的具体数值；若与本卷印刷值不符以卷面为准。

(12) 第7）问：中微子带走的最大能量与相对误差 反应 $\text{p+p}\to\text{D+e}^{+}+\nu$ 的质量亏损 $Q_1=2\times938.3-1875.6-0.51=0.49\ \text{MeV}$，远大于质子动能（约 1.5 keV），质子可视为静止，反应总动量为零。三体末态中，当氘与正电子以相同速度结伴运动（相对静止）时中微子能量最大，此时等效为母体 2p 的两体衰变：

$$E_\nu^{max}=Q_1\cdot\ \frac{m_D+m_e}{2m_p}\approx0.49\times\frac{1876.1}{1876.6}\approx0.49\ \text{MeV}$$

每次 p-p 链循环放出 2 个中微子，其带走的总能量占循环放能（26.7 MeV）之比至多

$$\frac{2\times0.49}{26.7}\approx3.7\%$$

即忽略中微子能量给辐射能量计算带来的最大相对误差约 3.7%，不影响前面的量级结论。

(13) 第8）问：辐射致质量亏损对地球公转的影响 i）一亿年 $\Delta t = 10^8 \times 3.156 \times 10^7 = 3.16 \times 10^{15}$ s，

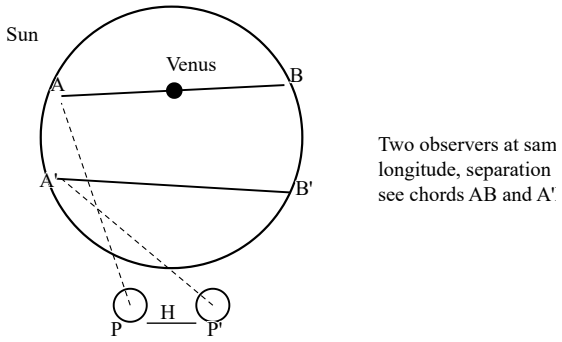
$$\Delta M = \dot{M}\Delta t = 4.3 \times 10^9 \times 3.16 \times 10^{15} \approx 1.4 \times 10^{25}\ \text{kg}$$

约为太阳质量的 6.8×10^{-6} 倍。ii）太阳径向辐射各向同性，不带走地球的轨道角动量：$m_e\sqrt{GMa}$ = 常量，故 $a \propto \dfrac{1}{M}$；又 $T \propto \sqrt{\dfrac{a^3}{M}} \propto M^{-5/2}$，取微分

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{5}{2}\frac{\Delta M}{M}$$

$$\Delta T = \frac{5}{2} \times 6.8 \times 10^{-6} \times 3.156 \times 10^7\ \text{s} \approx 5.3 \times 10^2\ \text{s}$$

即一亿年间因太阳辐射失质，地球公转周期约增长 530 秒（约 9 分钟）。



题6图b：两地（相距 H）同时观测金星凌日的几何示意

2）iii）iv）与 6）两处为本站独立建模/读图，已标注存疑；2）ii）中金星相对太阳的视角变化率必须用地心 apparent 视角（$\omega_{rel} \approx 0.028$ rad/天，即金星逆行速率与太阳顺行速率之和），若误用会合周期平均速率会得到约 3 倍的偏差。

逐光知理 · 竞赛答案册 · 易错点速查

第36届全国中学生物理竞赛决赛理论 · 易错点速查

补在原册之后：原册答案与详解未作任何改动

共 6 条 · 绑定本卷题号

只挑本卷最容易失分的动作，按「错法 / 机理 / 正解」三段写，题号与原册一致；公式沿用原册口径。

第 1 题

错法 一般时刻都对瞬时接触点 P 直接写转动定律；算转动惯量时漏掉两根辐条或漏用平行轴定理；摩擦力、支持力直接按质心加速度列方程，不分解相对切向与向心加速度。

机理 刚释放瞬间接触点速度为零、切向加速度也为零，才可对瞬时轴用转动定律；一般时刻接触点有加速度，瞬时轴不能当固定轴用转动定律，须能量法微分结合质心运动定理。轮子总质量 $\mu = M + 2m$，质心因辐条不对称相对 O 偏移；对瞬时轴的转动惯量要由对 O 的惯量加平行轴项。质心相对 O 有切向与向心加速度，牵连加速度再合成后才能代入质心运动定理。

正解 释放瞬间对 P 轴列转动定律得 $\alpha_0 = 2Kg/(gmR_0)$；转过 $\pi/6$ 时由机械能守恒求 ω，对能量式求导得 α；质心加速度分解为切向 αR_0 与向心 $\omega^2 R_0$ 项，水平方向只有摩擦力、竖直方向支持力与重力联立，得 F_f、F_N。

第 2 题 · 第(1)(4)问

错法 界面处把电场 $E_1 = E_2$ 连续当作边界条件；或认为断电后电压按单一时间常数指数衰减；界面总电荷只按一块介质的极化面电荷算。

机理 稳恒电流下界面电流法向连续，是 $\sigma_1 E_1 = \sigma_2 E_2$，电导不同时电场并不连续；$E \propto 1/r$ 来自等位面与柱壳截面积 $l\,dr$ 的几何。断电后每个介质区等效为电容并联漏电阻，两并联块经界面串联，两个弛豫时间 $\tau_i = \varepsilon_0\varepsilon_{ri}/\sigma_i$ 各自独立衰减，故端电压是双指数。界面总电荷由两侧电位移法向跃变给出，出现 $\varepsilon_{r2}\sigma_1$ 与 $\varepsilon_{r1}\sigma_2$ 的差值项；若两介质 ε_r/σ 相等则界面无净电荷。

正解 由 $\sigma_1 E_1 = \sigma_2 E_2$ 与两端面电压之和 V_0 解 E_1、E_2；界面总电荷对 r 从 a 到 b 积分得 Q；分区电容、电阻分别 $C_i = \varphi_i\varepsilon_0\varepsilon_{ri} l \ln(b/a)$、$R_i = \ln(b/a)/(\sigma_i l \varphi_i)$；断电后 v_1、v_2 各按 τ_1、τ_2 衰减，端电压 $V(t)$ 为两指数项之和。

第 3 题 · 第(2)问

错法 超导环感应电流按普通电阻回路的欧姆定律计算；认为上线圈自身在环位置也提供径向磁场；悬浮力写成竖直磁场 B_0 对环的安培力。

机理 超导环电阻为零，适用磁通守恒 $LI_0 + \Phi_{外} = 0$，不是欧姆定律；调试前外磁通为零，悬浮后总磁通仍为零，感应电流与线圈电流反向、磁矩与外场反向，才有向上排斥力。由对称性，任何线圈自身平面内径向磁场为零，环所处径向场全部来自对侧下线圈。竖直悬浮力来自径向磁场分量 B_r 与环电流作用的安培力竖直分量，不是轴向 B_0。

正解 由 $\Phi_{外} = AB_0$ 得 $I_0 = -AB_0/L$；环电流在 B_r 中受力 $F = \pi D|I_0|B_r$，与重力平衡后代入 B_0、β 表达式解 g_0；第 3 问电桥部分由上下极板吸引力之差 $m\Delta g = 8\varepsilon_0 A V_C \Delta V / d^2$ 反推 ΔV。

第 4 题 · 第(1)(3)问

错法　把两个功率倍数混为一谈；做功、熵变按气缸内全部空气质量或按 1 mol 气体计算；认为绝热压缩后气体熵减少。

机理　加中间冷却器后进气 1.44 倍，只增压不冷却为 1.29 倍——后者气缸内温度高、密度偏低，两者不能互换。做功与熵变都按进入一个气缸的那批气体（摩尔数 $n \approx 2.18 \times 10^{-2}\,\mathrm{mol}$）计算，不是按 1 mol 或整缸体积。可逆绝热过程熵变 $\Delta S_1 = 0$；等压降温气体向冷却器放热，熵变为负，环境熵增补偿，整体不违反第二定律。

正解　绝热压缩 $W_1 = -Q = \Delta U = nC_V(T_1 - T_0) \approx 14.2\,\mathrm{J}$；等压冷却 $W_2 = p_1(V_1 - V_0) \approx 6.3\,\mathrm{J}$，总功 $W \approx 20.5\,\mathrm{J}$；等压熵变 $\Delta S_2 = nC_p \ln(T_0/T_1) \approx -6.6 \times 10^{-2}\,\mathrm{J \cdot K^{-1}}$。

第 5 题 · 第(2)(4)(7)问

错法　倒望远镜两透镜间距符号搞错；把 x、y 两向力的来源互换；认为重小球 v_\max 更小就一定更难被捕获。

机理　倒望远镜结构凹透镜在前、凸透镜在后，平行光入射要求两透镜共焦，间距 $l = f_1 + f_2$（f_1 为负）。x 向力来自两束光经小球折射后同向偏转 15°，动量变化的轴向分量是 $(1 - \cos 15°)$ 项；y 向力来自两束功率不等（$P_2 - P_1$），是 $\sin 15°$ 项，两者来源不同。捕获概率积分作 $u = v\sqrt{m/2k_BT}$ 代换后上限与质量无关，归一化因子的 $m^{3/2}$ 与代换带来的 $m^{-3/2}$ 相消，故 $P(m) = P(2m)$。

正解　间距 $l = -6.3 + 25.2 = 18.9\,\mathrm{mm}$，扩束后 $D_2 = 6.0\,\mathrm{mm}$；$F_x = (P_1 + P_2)(1 - \cos 15°)/c \approx 3.4 \times 10^{-13}\,\mathrm{N}$，$F_y = (P_2 - P_1)\sin 15°/c \approx 8.6 \times 10^{-13}\,\mathrm{N}$；$v_{\mathrm{rms}} = \sqrt{3k_BT/m} \approx 1.7 \times 10^{-3}\,\mathrm{m/s}$，v_\max=\sqrt{2U_0/m}\approx2.4\times10^{-3}\,\mathrm{m/s}；两质量小球捕获概率相等。

第 6 题 · 第(2)(5)(7)(8)问

错法　凌日相对角速度误用会合周期的平均速率；p-p 链每次循环消耗质子个数算错；中微子最大能量按两体衰变质心系直接取全部质量亏损；认为太阳辐射失质同时带走地球轨道角动量。

机理　金星视运动是逆行与太阳顺行叠加，相对太阳视线的角速率必须用 apparent 相对速率 $(v_V + v_E)/[(1 - r_{VE})S_{\text{日地}}]$，误用会合周期平均速率会带来约 3 倍偏差。p-p 链总效果 $4p \to {}^4\mathrm{He} + 2e^+ + 2\nu_e$，每次循环消耗 4 个质子。三体末态中，氘与正电子相对静止结伴运动时中微子能量最大，等效母体两体衰变，最大中微子能量按质量比折减，不是吃满全部 Q_1。太阳径向辐射各向同性，不带走角动量，$h = \sqrt{GMa}$ 守恒；由开普勒定律微分得 $T \propto M^{-5/2}$。

正解　相对角速率 $\omega_{\mathrm{rel}} \approx 0.0280\,\mathrm{rad/天}$；循环放能 $Q \approx 26.7\,\mathrm{MeV}$，循环次数 $\dot{N} = P_{\text{日}}/Q$，质子数消耗为其 4 倍；中微子最大能量 $E_{\nu,\max} \approx Q_1 \cdot m_D/(m_D + m_e) \le 0.49\,\mathrm{MeV}$，占循环放能比 < 3.7%；一亿年失质 $\Delta M \approx 1.4 \times 10^{25}\,\mathrm{kg}$（约 $6.8 \times 10^{-6}M$），周期增长 $\Delta T \approx +530\,\mathrm{s}$。