逐光知理 · 高考物理参考答案与详解

第40届全国中学生物理竞赛决赛理论考试（2023年）

参考答案与详解（本站独立编撰）

决赛理论 · 7 道计算大题 · 共 320 分

本册答案与解析由逐光知理物理教研组独立编撰：先依据卷面题干独立推导，再逐条数值回代核对。全卷共七道计算大题，满分 320 分。本卷源文件为扫描件，题干文字与数据均由本站逐页读图抄录。

答案速查

题号	主考点	答案摘要
1	水滴对光的折射反射与虹霓的偏向角、色散与偏振	（1）$\theta_k=k\pi+2i-2(k+1)r$ （2）θ_{km} 与 i_k 见解析 （3）$\left.\dfrac{\mathrm{d}\theta_k}{\mathrm{d}n}\right\vert_{i=i_k}=\dfrac{2}{n}\sqrt{\dfrac{(k+1)^2-n^2}{n^2-1}}$ （4）$\theta_{1m}^{红}=137.34^\circ$、$\theta_{1m}^{紫}=139.50^\circ$、$\delta_1=2.16^\circ$，紫在内红在外；$\theta_{2m}^{红}=229.84^\circ$、$\theta_{2m}^{紫}=233.73^\circ$、$\delta_2=3.89^\circ$，红在内紫在外 （5）$P_1=91.65\%$，$P_2=79.99\%$ （6）见解析
2	悬点高频振动的刚性杆：振动平均、有效势能与临界角速度	（1）$-(mg-m\omega^2A\cos\omega t)\dfrac{l}{2}\sin\theta=\dfrac{1}{3}ml^2\ddot{\theta}$ （2）$-mg\dfrac{l}{2}\sin\varphi-\dfrac{3}{8}m\omega^2A^2\sin\varphi\cos\varphi=\dfrac{1}{3}ml^2\ddot{\varphi}$ （3）$V_{\mathrm{eff}}(\varphi)=\dfrac{1}{2}mgl(1-\cos\varphi)+\dfrac{3}{16}m\omega^2A^2(1-\cos^2\varphi)$ （4）$\varphi_0=0$ 恒稳定；$\varphi_0=\pi$ 当 $\omega^2>\dfrac{4gl}{3A^2}$ 时稳定；$\varphi_0=\pm\arccos(-\dfrac{4gl}{3\omega^2A^2})$ 不稳定；频率见解析 （5）ω_c 与 φ_{max} 见解析
3	卢瑟福 α 粒子散射：瞄准距离、微分散射截面与核力拐点	（1）$^{210}_{84}\mathrm{Po}\to{}^{206}_{82}\mathrm{Pb}+{}^{4}_{2}\mathrm{He}$，$E_d\approx\dfrac{A}{A-4}E_a=5.41\ \mathrm{MeV}$ （2）$b=\dfrac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0E}\cot\dfrac{\theta}{2}$ （3）$\sigma(\theta)=\dfrac{D^2}{16}\dfrac{1}{\sin^4(\theta/2)}$，$D=\dfrac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0E}$ （4）核力作用所致；$r_{min}\approx13.65\ \mathrm{fm}$ （5）加静磁场把 α 粒子偏转 90 度的方案，见解析
4	伦纳德-琼斯势立方晶体：晶格常数、爱因斯坦频率、热容与林德曼判据	（1）$a=(\dfrac{2A_{12}}{A_6})^{1/6}r_0$ （2）近邻贡献 6、次近邻 $\dfrac{3}{2}$、次次近邻 $\dfrac{8}{27}$ （3）$\omega_E=\sqrt{\dfrac{2\varepsilon}{M}(22A_{14}\dfrac{r_0^{12}}{a^{14}}-5A_8\dfrac{r_0^6}{a^8})}$ （4）$C_V=3N_Ak_B$ （5）$T_M=\dfrac{\pi Ma^2\omega_E^2C_L^2}{8k_B}$
5	施瓦西黑洞：视界半径、黑洞熵与温度、热机总功与霍金辐射寿命	（1）$r=\dfrac{2GM}{c^2}\approx2964\ \mathrm{m}\approx3\ \mathrm{km}$ （2）$\Delta S=\dfrac{4\pi k_BG}{c\hbar}(M'^2-2M^2)$ （3）$T=\dfrac{c^3\hbar}{8\pi k_BGM}$，$C=-\dfrac{8\pi k_BGM^2}{c\hbar}$ （4）$W=(M_{10}+M_{20}-\sqrt{M_{10}^2+M_{20}^2})c^2$ （5）$P(M)=\dfrac{c^6\hbar}{15360\pi G^2M^2}$ （6）$t_f=\dfrac{5120\pi G^2M_0^3}{c^4\hbar}$
6	介质球极化、金属复电导率与纳米颗粒等离激元共振吸收	（1）$\boldsymbol{E}_{in}=\dfrac{3}{\varepsilon_r+2}\boldsymbol{E}_0$，$\boldsymbol{p}=\dfrac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+2}4\pi\varepsilon_0R^3\boldsymbol{E}_0$ （2）（i）$\boldsymbol{j}=\dfrac{ne^2}{\gamma m}\boldsymbol{E}$，$\sigma_0=\dfrac{ne^2}{\gamma m}$；（ii）$\tilde{\sigma}=\dfrac{\varepsilon_0\omega_p^2}{\gamma+\mathrm{i}\omega}$；（iii）$\tilde{\varepsilon}_r(\omega)=1-$

		$\frac{\omega_p^2}{\omega^2-\mathrm{i}\gamma\omega}$ （3）（i）$E_{in}(\omega)\approx\frac{3}{3-\omega_p^2/\omega^2}E_0$，$\omega_r=\frac{\omega_p}{\sqrt{3}}$；（ii）$E_r=\frac{\omega_p}{\sqrt{3}\gamma}E_0$，$\bar{P}_r=\frac{2\pi\varepsilon_0\omega_p^2E_0^2R^3}{3\gamma}$
7	磁单极与狄拉克弦：磁矢势、环量与通量之差、A-B 效应	（1）（i）$\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0 g}{4\pi r}\tan\frac{\theta}{2}\boldsymbol{e}_\varphi$；（ii）$\Gamma_L=\frac{\mu_0 g}{2}(1-\cos\theta)$；$\Phi_L=\frac{\mu_0 g}{2}(1-\cos\theta)$（$\theta<\pi/2$）、$\Phi_L=-\frac{\mu_0 g}{2}(1+\cos\theta)$（$\theta>\pi/2$）；$\theta>\pi/2$ 时 $\Gamma_L-\Phi_L=\mu_0 g$，对应穿过回路的一段狄拉克弦（螺线管内部）的假想磁通 $\Phi_0=\mu_0 g$ （2）（i）$g(t)=nIS_0\cos\omega t$；（ii）$\varphi'=\frac{3}{4}\mu_0 nSI_0\cos\omega t$，$I=\frac{\mu_0 nSI_0\omega}{4aR_0}\sin\omega t$，$\bar{W}=\frac{3\mu_0^2n^2S^2I_0^2\omega^2}{32aR_0}$ （3）$\Delta x=\frac{eD}{pd}\mu_0 nIS$

第40届全国中学生物理竞赛决赛理论 全卷详解

1. 计算题 · 40分

答案 （1）$\theta_k=k\pi+2i-2(k+1)r$ （2）θ_{km} 与 i_k 见解析 （3）$\left.\frac{\mathrm{d}\theta_k}{\mathrm{d}n}\right|_{i=i_k}=\frac{2}{n}\sqrt{\frac{(k+1)^2-n^2}{n^2-1}}$ （4）$\theta_{1m}^{红}=137.34^\circ$、$\theta_{1m}^{紫}=139.50^\circ$、$\delta_1=2.16^\circ$，紫在内红在外；$\theta_{2m}^{红}=229.84^\circ$、$\theta_{2m}^{紫}=233.73^\circ$、$\delta_2=3.89^\circ$，红在内紫在外 （5）$P_1=91.65\%$，$P_2=79.99\%$ （6）见解析

详解

(1) 第（1）问：偏向角表达式（3 分） 入射角为 i，设折射角为 r，由折射定律

$$\sin i=n\sin r. \tag{1}$$

光线每经一次折射偏转 $(i-r)$，每经一次反射偏转 $(\pi-2r)$，故 k 级出射光的偏向角为

$$\theta_k=2(i-r)+k(\pi-2r)=k\pi+2i-2(k+1)r.$$

将（1）式代入得

$$\theta_k=k\pi+2i-2(k+1)\arcsin\left(\frac{1}{n}\sin i\right).$$

(2) 第（2）问：极小偏向角与对应入射角（6 分） 由上式对 i 求导并令其为零：

$$\frac{\mathrm{d}\theta_k}{\mathrm{d}i}=2-2(k+1)\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i}=0.$$

对（1）式求导得 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i}=\frac{\cos i}{n\cos r}=\frac{\cos i}{\sqrt{n^2-\sin^2 i}}$，代入得 $\frac{\cos i_k}{\sqrt{n^2-\sin^2 i_k}}=\frac{1}{k+1}$，解得

$$i_k=\arccos\sqrt{\frac{n^2-1}{k(k+2)}}=\arcsin\sqrt{1-\frac{n^2-1}{k(k+2)}}.$$

代回偏向角表达式得

$$\theta_{km}=k\pi+2\arccos\sqrt{\frac{n^2-1}{k(k+2)}}-2(k+1)\arcsin\left(\frac{1}{n}\sqrt{1-\frac{n^2-1}{k(k+2)}}\right).$$

(3) 第（3）问：对折射率的变化率（6 分） i 固定时 $\dfrac{\mathrm{d}\theta_k}{\mathrm{d}n}=-2(k+1)\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}n}$，而由（1）式 $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}n}=-\dfrac{\sin r}{n\cos r}=-\dfrac{\sin i}{n\sqrt{n^2-\sin^2 i}}$，故

$$\frac{\mathrm{d}\theta_k}{\mathrm{d}n}=\frac{2(k+1)}{n}\cdot\frac{\sin i}{\sqrt{n^2-\sin^2 i}}.$$

当 $i=i_k$ 时，把 $\sin^2 i_k=1-\dfrac{n^2-1}{k(k+2)}$ 代入化简得

$$\left.\frac{\mathrm{d}\theta_k}{\mathrm{d}n}\right|_{i=i_k}=\frac{2(k+1)}{n}\sqrt{\frac{k(k+2)+1-n^2}{[k(k+2)+1](n^2-1)}}=\frac{2}{n}\sqrt{\frac{(k+1)^2-n^2}{n^2-1}}.$$

(4) 第（4）问：红紫两级虹霓的偏向角与角宽度（10 分） 取 $n_{红}=1.329$、$n_{紫}=1.344$。$k=1$（主虹）：本站解得 $\theta_{1m}^{红}=137.34^\circ$、$\theta_{1m}^{紫}=139.50^\circ$；角宽度 $\delta_1=|\theta_{1m}^{紫}-\theta_{1m}^{红}|=2.16^\circ$。红、紫虹对观察者的张角分别为 $\pi-\theta_{1m}^{红}=42.66^\circ$ 与 $\pi-\theta_{1m}^{紫}=40.50^\circ$，故主虹紫在内、红在外。$k=2$（副虹）：本站解得 $\theta_{2m}^{红}=229.84^\circ$、$\theta_{2m}^{紫}=233.73^\circ$；角宽度 $\delta_2=|\theta_{2m}^{紫}-\theta_{2m}^{红}|=3.89^\circ$。红、紫霓的张角分别为 $\theta_{2m}^{红}-\pi=49.84^\circ$ 与 $\theta_{2m}^{紫}-\pi=53.73^\circ$，故副虹红在内、紫在外。

(5) 第（5）问：出射光偏振度（12 分） 设入射光的 s、p 偏振电场振幅均为 E_0。对 k 级虹，入射角 i_k、折射角 r_k，光经空气到水的折射、水中 k 次内反射、水到空气的折射后，由菲涅耳公式，s、p 偏振出射振幅分别为

$$E_{sk}=\frac{2\cos i_k}{\cos i_k+n\cos r_k}\left|\frac{n\cos r_k-\cos i_k}{n\cos r_k+\cos i_k}\right|^k\frac{2n\cos r_k}{n\cos r_k+\cos i_k}E_0,$$

$$E_{pk}=\frac{2\cos i_k}{n\cos i_k+\cos r_k}\left|\frac{\cos r_k-n\cos i_k}{\cos r_k+n\cos i_k}\right|^k\frac{2n\cos r_k}{\cos r_k+n\cos i_k}E_0.$$

$k=1$（红光 $n=1.329$）：本站解得 $i_1=59.64^\circ$、$r_1=40.49^\circ$，代入得 $E_{1s}=0.2963E_0$、$E_{1p}=0.0618E_0$；由 $I\propto E^2$，$\dfrac{I_{s1}}{I_{p1}}=\dfrac{0.2963^2}{0.0618^2}=\dfrac{0.08779}{0.00382}$，故

$$P_1=\frac{I_{s1}-I_{p1}}{I_{s1}+I_{p1}}=91.65\%.$$

$k=2$：本站解得 $i_2=71.97^\circ$、$r_2=45.68^\circ$，$E_{2s}=0.1875E_0$、$E_{2p}=0.0625E_0$，$\dfrac{I_{s2}}{I_{p2}}=\dfrac{0.03516}{0.00391}$，故

$$P_2=\frac{I_{s2}-I_{p2}}{I_{s2}+I_{p2}}=79.99\%.$$

(6) 第（6）问：附属虹成因（3 分） 主虹附近出射光的波前与入射平面波相比发生了扭曲：不同入射位置的光线在极小偏向角附近的光程随位置非线性变化，该额外光程差使出射光线之间发生干涉，在主虹边缘内侧出现额外的彩色条纹，即“附属虹”。

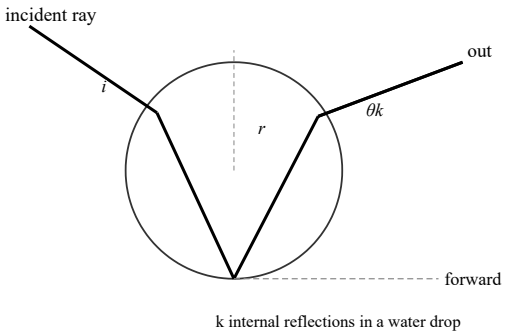


图1-1 本站绘制：入射光线经水滴折射、k 次内反射后出射的偏向角几何（1 级虹为例时取 k=1）

本题各小问分值（3、6、6、10、12、3 分）按卷面评分说明口径列出。

2. 计算题 · 50分

答案 （1）$-(mg-m\omega^2 A\cos\omega t)\dfrac{l}{2}\sin\theta=\dfrac{1}{3}ml^2\ddot{\theta}$ （2）$-mg\dfrac{l}{2}\sin\varphi-\dfrac{3}{8}m\omega^2A^2\sin\varphi\cos\varphi=\dfrac{1}{3}ml^2\ddot{\varphi}$ （3）$V_{\text{eff}}(\varphi)=\dfrac{1}{2}mgl(1-\cos\varphi)+\dfrac{3}{16}m\omega^2A^2(1-\cos^2\varphi)$ （4）$\varphi_0=0$ 恒稳定；$\varphi_0=\pi$ 当 $\omega^2>\dfrac{4gl}{3A^2}$ 时稳定；$\varphi_0=\pm\arccos(-\dfrac{4gl}{3\omega^2A^2})$ 不稳定；频率见解析 （5）ω_c 与 φ_{max} 见解析

详解

(1) 第（1）问：杆的动力学方程（3 分） 在随转轴 O 平动的非惯性系中，引入平动惯性力（以竖直向上为正）

$$F_{in}=-m\ddot{z}=m\omega^2A\cos\omega t.$$

此惯性力等效作用于匀质杆质心，对 O 用转动定理：

$$-(mg-F_{in})\frac{l}{2}\sin\theta=\frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta}.$$

将 F_{in} 代入得

$$\boxed{-(mg-m\omega^2A\cos\omega t)\frac{l}{2}\sin\theta=\frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta}}. \tag{3}$$

(2) 第（2）问：平稳运动的动力学方程（12 分） 设 $\theta=\varphi+\delta$（$\delta\ll 1$ 为圆频率 ω 的高频小振动），代入（3）式并展开至 δ 一阶：

$$-(mg-m\omega^2A\cos\omega t)\frac{l}{2}(\sin\varphi+\cos\varphi\cdot\ \ \delta)=\frac{1}{3}ml^2(\ddot{\varphi}+\ddot{\delta}).$$

考虑 $\omega\gg\sqrt{g/l}$，在 $\delta(t)$ 的一个周期内取时间平均（$\langle\delta\rangle=0$、$\langle\cos\omega t\rangle=0$），并用 $\ddot{\delta}=-\omega^2\delta$ 与 $\langle\cos^2\omega t\rangle=1/2$ 自洽地解出 $\langle\delta\cdot\ \ \cos\omega t\rangle=-\dfrac{3A}{4l}\sin\varphi$（利用 $\omega^2\gg g/l$），代回平均方程得 $\varphi(t)$ 的动力学方程

$$\boxed{-mg\frac{l}{2}\sin\varphi-\frac{3}{8}m\omega^2A^2\sin\varphi\cos\varphi=\frac{1}{3}ml^2\ddot{\varphi}}.$$

本站提示：用待定振幅法（设 $\delta(t)=\delta_0\cos\omega t$）或直接保留 $\ddot{\delta}$ 项再平均，结果相同。

(3) 第（3）问：有效势能（4 分） 将上式左端视为保守力矩：

$$M(\varphi)=-mg\frac{l}{2}\sin\varphi-\frac{3}{8}m\omega^2A^2\sin\varphi\cos\varphi=-\frac{\mathrm{d}V_{\mathrm{eff}}}{\mathrm{d}\varphi}.$$

结合 $V_{\mathrm{eff}}(0)=0$ 积分得

$$V_{\mathrm{eff}}(\varphi)=\frac{1}{2}mgl(1-\cos\varphi)+\frac{3}{16}m\omega^2A^2(1-\cos^2\varphi).$$

(4) 第（4）问：平衡位置、稳定性与小振动频率（18 分） 平衡条件 $V'_{\mathrm{eff}}(\varphi_0)=0$ 给出

$$(\frac{1}{2}mgl+\frac{3}{8}m\omega^2A^2\cos\varphi_0)\sin\varphi_0=0,$$

解得三组平衡位置：$\varphi_0=0$；$\varphi_0=\pi$；$\varphi_0=\pm\arccos(-\dfrac{4gl}{3\omega^2A^2})$（要求 $\omega^2>\dfrac{4gl}{3A^2}$）。二阶导为

$$V''_{\mathrm{eff}}(\varphi_0)=\frac{1}{2}mgl\cos\varphi_0+\frac{3}{8}m\omega^2A^2(2\cos^2\varphi_0-1).$$

（i）$\varphi_0=0$：$V''_{\mathrm{eff}}=\dfrac{1}{2}mgl+\dfrac{3}{8}m\omega^2A^2>0$，恒为稳定平衡；小振动频率

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{V''_{\mathrm{eff}}(0)}{ml^2/3}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3}{2}(\frac{g}{l}+\frac{3\omega^2A^2}{4l^2})}.$$

（ii）$\varphi_0=\pi$：$V''_{\mathrm{eff}}(\pi)=-\dfrac{1}{2}mgl+\dfrac{3}{8}m\omega^2A^2$，当 $\omega^2<\dfrac{4gl}{3A^2}$ 时不稳定，当 $\omega^2>\dfrac{4gl}{3A^2}$ 时稳定（原本倒立位形因高频振动而稳定化），频率

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3}{2}(\frac{3\omega^2A^2}{4l^2}-\frac{g}{l})}.$$

（iii）$\varphi_0=\pm\arccos(-\dfrac{4gl}{3\omega^2A^2})$：本站算得 $V''_{\mathrm{eff}}(\varphi_0)=\dfrac{2mgl^2}{3\omega^2A^2}-\dfrac{3}{8}m\omega^2A^2<0$，为不稳定平衡。

(5) 第（5）问：临界角速度与最大角度（13 分） 杆自 $\varphi=0$ 以初角速度 $\dot{\varphi}(0)=\omega_0$ 出发，能量为 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2\omega_0^2$。欲达 $\varphi=\pi$ 需越过 V_{eff} 在 $0\le\varphi\le\pi$ 内的最高点。（i）当 $\omega^2<\dfrac{4gl}{3A^2}$：最高点为 $\varphi=\pi$ 处，$V_{\text{eff}}(\pi)=mgl$，故 $\frac{1}{6}ml^2\omega_0^2>mgl$，即

$$\omega_0>\sqrt{\frac{6g}{l}}=\omega_c.$$

（ii）当 $\omega^2>\dfrac{4gl}{3A^2}$：势垒在 $\varphi_0=\pi-\arccos\dfrac{4gl}{3\omega^2A^2}$ 处，越过它要求

$$\frac{1}{6}ml^2\omega_0^2>\frac{1}{2}mgl+\frac{3}{16}m\omega^2A^2+\frac{mg^2l^2}{3\omega^2A^2},$$

解得

$$\omega_0>\sqrt{\frac{3g}{l}+\frac{9\omega^2A^2}{8l^2}+\frac{2g^2}{\omega^2A^2}}=\omega_c.$$

当 $\omega_0<\omega_c$ 时，最大角度 φ_{max} 由 $\frac{1}{6}ml^2\omega_0^2=V_{\text{eff}}(\varphi_{max})$ 决定，即关于 $\cos\varphi_{max}$ 的二次方程

$$\cos^2\varphi_{max}+\frac{8gl}{3\omega^2A^2}\cos\varphi_{max}+\frac{8\omega_0^2l^2}{9\omega^2A^2}-\frac{8gl}{3\omega^2A^2}-1=0,$$

取较小 φ 的解（根号前取“+”号）：

$$\varphi_{max}=\arccos\frac{1}{2}\left[-\frac{8gl}{3\omega^2A^2}+\sqrt{\left(\frac{8gl}{3\omega^2A^2}\right)^2-4\left(\frac{8\omega_0^2l^2}{9\omega^2A^2}-\frac{8gl}{3\omega^2A^2}-1\right)}\right].$$

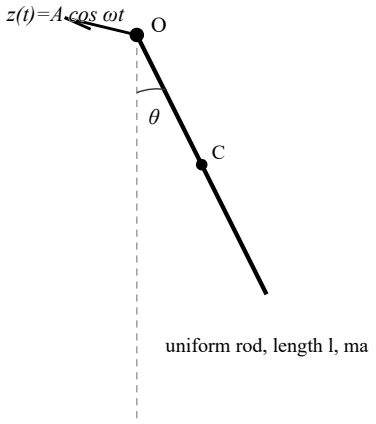


图2-1 本站绘制：转轴 O 沿竖直方向作高频小振幅简谐振动，匀质杆在竖直平面内以角坐标描述

本题各小问分值（3、12、4、18、13 分）按卷面评分说明口径列出。

3. 计算题 · 40分

答案 （1）$^{210}_{84}\mathrm{Po}\to{}^{206}_{82}\mathrm{Pb}+{}^{4}_{2}\mathrm{He}$，$E_d\approx\dfrac{A}{A-4}E_a=5.41\ \mathrm{MeV}$ （2）$b=\dfrac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 E}\cot\dfrac{\theta}{2}$ （3）$\sigma(\theta)=\dfrac{D^2}{16}\dfrac{1}{\sin^4(\theta/2)}$，$D=\dfrac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 E}$ （4）核力作用所致；$r_{min}\approx 13.65\ \mathrm{fm}$ （5）加静磁场把 α 粒子偏转 90 度的方案，见解析

详解

(1) 第（1）问：衰变反应式与总动能（8 分） α 衰变反应式为

$$^{210}_{84}\mathrm{Po}\to{}^{206}_{82}\mathrm{Pb}+{}^{4}_{2}\mathrm{He}.$$

衰变前母核静止，设衰变后 α 粒子与子核 $^{206}_{82}\mathrm{Pb}$ 的速度分别为 v 和 V，由动量守恒

$$0=M_{Pb}V+m_a v.$$

衰变末态总动能

$$E_d=\frac{1}{2}M_{Pb}V^2+\frac{1}{2}m_a v^2.$$

两式联立解得

$$E_d=E_a\left(1+\frac{m_a}{M_{Pb}}\right)\approx\frac{A}{A-4}E_a,$$

其中 A 为 Po 核质量数，$E_a=\dfrac{1}{2}m_a v^2=5.31\ \mathrm{MeV}$。代入题给数据本站解得

$$E_d=5.41\ \mathrm{MeV}.$$

(2) 第（2）问：瞄准距离与散射角的关系（12 分） 质量 m、电荷 $2e$、动能为 E 的 α 粒子以速度 v_0 入射，瞄准距离 b；靶核电荷 Ze 视为静止。散射为弹性过程，出射速率仍为 v_0，出射方向与入射方向夹角 θ。解法一（冲量法）：出射时横向速度 $v_{\perp\infty}=v_0\sin\theta$；横向力 $F_\perp=\dfrac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sin\varphi$，故 $\mathrm{d}v_\perp=\dfrac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 m v_0 b}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$（用到角动量守恒 $L=mv_0 b$）。入射时 $\varphi=0$、出射到无穷远时 $\varphi=\pi-\theta$，积分得

$$v_{\perp\infty}=\frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 m v_0 b}(1+\cos\theta).$$

与 $v_0\sin\theta$ 比较得

$$b=\frac{D}{2}\cot\frac{\theta}{2}=\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 E}\cot\frac{\theta}{2},\qquad D=\frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 E}.$$

本站另核：也可由能量、角动量守恒引入 $\rho=1/r$ 化成轨道方程，或用双曲线轨道、隆格-楞次矢量求解，结果一致。

(3) 第（3）问：微分散射截面（5 分） 瞄准距离在 $b \to b+\mathrm{d}b$ 的环带 $\mathrm{d}\sigma = 2\pi b\,|\,\mathrm{d}b\,|$ 内的 α 粒子被散射到 $\theta \to \theta+\mathrm{d}\theta$ 的空心圆锥内。由第（2）问结果求导并利用 $b = \dfrac{D}{2}\cot\dfrac{\theta}{2}$ 得

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{\pi D^2}{4}\frac{\cos(\theta/2)}{\sin^3(\theta/2)}\,\mathrm{d}\theta.$$

立体角元 $\mathrm{d}\Omega = 2\pi\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$，故微分散射截面

$$\sigma(\theta) = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{D^2}{16}\cdot\frac{1}{\sin^4\dfrac{\theta}{2}} = \left(\frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 E}\right)^2\frac{1}{16\sin^4\dfrac{\theta}{2}}.$$

固定 θ 时 $\sigma \propto E^{-2}$，随 α 粒子动能增大而减小。

(4) 第（4）问：拐点原因与最近距离（10 分） 实验数据显示 $E = 25$ MeV 处截面突然急剧减小，表明此时 α 粒子已逼近原子核区域，强的核力开始起作用，使纯库仑散射关系失效、截面与动能关系突变。由能量与角动量守恒可求拐点处（α 粒子恰好掠过核表面）的最近距离：

$$mv_0 b = mv'r_{min},\qquad \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_{min}},$$

解得

$$r_{min} = \frac{D}{2}\left(1+\frac{1}{\sin(\theta/2)}\right) = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 E}\left(1+\frac{1}{\sin\dfrac{\theta}{2}}\right).$$

代入 $E = 25$ MeV、$\theta = 60^\circ$、$Z = 79$、$\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} = 1.44$ fm · MeV，本站解得

$$r_{min} = \frac{79\times 1.44}{25}\times(1+2)\ \text{fm} = 13.65\ \text{fm}.$$

(5) 第（5）问：实现 180 度散射测量的方案（5 分） 由于 α 粒子源与探测器（荧光屏、显微镜）的遮挡，正对方向的 180 度散射无法直接测量。利用 α 粒子带正电、在静磁场中受洛伦兹力偏转的性质：在 α 粒子飞行路径上加一静磁场，使源出射的一束 α 粒子经磁场偏转 90 度后射到靶粒子上，被靶散射后偏转角为 180 度的出射 α 粒子再经同一磁场偏转 90 度进入放在源一侧的 α 粒子探测器加以测量。（写“加交变电场”的方案本站同样认可。）

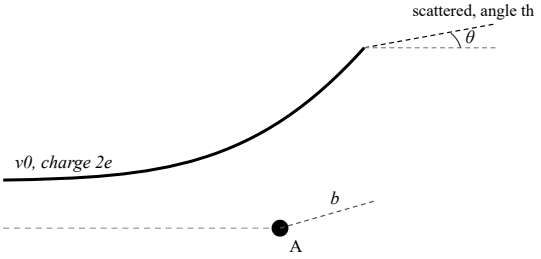


图3-1 本站绘制：α 粒子受核电荷 Ze 库仑斥力偏转，瞄准距离 b 与散射角 theta

本题各小问分值（8、12、5、10、5 分）按卷面评分说明口径列出。

4. 计算题 · 50分

答案 （1）$a=\left(\frac{2A_{12}}{A_6}\right)^{1/6}r_0$ （2）近邻贡献 6、次近邻 $\frac{3}{2}$、次次近邻 $\frac{8}{27}$ （3）$\omega_E=\sqrt{\frac{2\varepsilon}{M}\left(22A_{14}\frac{r_0^{12}}{a^{14}}-5A_8\frac{r_0^6}{a^8}\right)}$ （4）$C_V=3N_Ak_B$ （5）$T_M=\frac{\pi Ma^2\omega_E^2C_L^2}{8k_B}$

详解

(1) 第（1）问：晶格常数（8 分） 由对称性只需考虑原点处原子。它与其余原子的相互作用势能为

$$V_0=\varepsilon\left[\left(\frac{r_0}{a}\right)^{12}A_{12}-\left(\frac{r_0}{a}\right)^{6}A_6\right],$$

其中 $A_n=\sum_{l_x,l_y,l_z}(l_x^2+l_y^2+l_z^2)^{-n/2}$（求和不含全零项）。平衡时 $\frac{\mathrm{d}V_0}{\mathrm{d}a}=\varepsilon\left[-12A_{12}\frac{r_0^{12}}{a^{13}}+6A_6\frac{r_0^6}{a^7}\right]=0$，解得

$$a=\left(\frac{2A_{12}}{A_6}\right)^{1/6}r_0.$$

(2) 第（2）问：近邻原子对 A6 的贡献（6 分） 近邻原子 6 个，位于 $(\pm1,0,0),(0,\pm1,0),(0,0,\pm1)$，贡献 $A_6'=6\times1^{-3}=6$。次近邻 12 个，位于两类坐标中一个分量为 0、另两个为 ±1 的格点，距离为 $\sqrt{2}\,a$，贡献 $A_6''=12\times(\sqrt{2})^{-6}=12\times2^{-3}=\frac{3}{2}$。次次近邻 8 个，位于 $(\pm1,\pm1,\pm1)$，距离 $\sqrt{3}\,a$，贡献 $A_6'''=8\times3^{-3}=\frac{8}{27}$。可见远离该原子的原子贡献较小。

(3) 第（3）问：爱因斯坦频率（17 分） 设原点原子偏离平衡位置的位移为 $\boldsymbol{u}$。利用展开式

$$|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{u}|^{-n}=R^{-n}+\frac{n(n-1)}{6}A\text{-型修正}\ \Rightarrow\ \sum|\boldsymbol{R}_l-\boldsymbol{u}|^{-n}=A_na^{-n}+\frac{n(n-1)}{6}A_{n+2}a^{-(n+2)}u^2,$$

其中用到了格点对称性使线性项与交叉项求和为零、而 $\sum\frac{(\boldsymbol{R}_l\cdot\boldsymbol{u})^2}{R_l^{n+4}}=\frac{u^2}{3a^{n+2}}A_{n+2}$。于是系统势能为

$$V=\varepsilon\left[A_{12}\left(\frac{r_0}{a}\right)^{12}-A_6\left(\frac{r_0}{a}\right)^{6}\right]+\varepsilon\left(22A_{14}\frac{r_0^{12}}{a^{14}}-5A_8\frac{r_0^6}{a^8}\right)u^2=V_0+\frac{1}{2}M\omega_E^2u^2,$$

故

$$\omega_E=\sqrt{\frac{2\varepsilon}{M}\left(22A_{14}\frac{r_0^{12}}{a^{14}}-5A_8\frac{r_0^6}{a^8}\right)}.$$

(4) 第（4）问：定容摩尔热容（11 分） 按玻尔兹曼分布，动量大小为 p、位移大小为 u 的原子能量 $E(p,u)=V_0+\dfrac{p^2}{2M}+\dfrac{1}{2}M\omega_E^2u^2$。每个原子的平均能量为比值型积分

$$\bar{E}=\frac{\iint E\,\mathrm{e}^{-E/k_BT}p^2\mathrm{d}p\,u^2\mathrm{d}u}{\iint \mathrm{e}^{-E/k_BT}p^2\mathrm{d}p\,u^2\mathrm{d}u}.$$

动能与势能部分各自用提示积分 $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\alpha^{-1/2}$、$\int_0^\infty x^4\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{3\sqrt{\pi}}{8}\alpha^{-5/2}$（替换 $x^2=t$ 后分部积分），本站算得

$$\bar{E}=V_0+3k_BT.$$

1 mol 晶体 $U=N_A\bar{E}=N_AV_0+3N_Ak_BT$，故

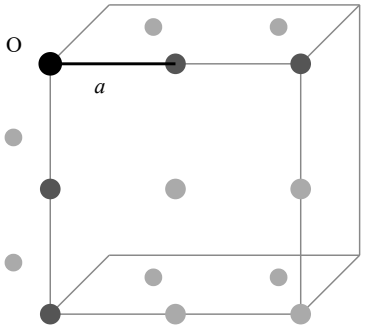
$$C_V=\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V=3N_Ak_B.$$

(5) 第（5）问：熔点表达式（8 分） 原子偏离平衡位置距离的平均值为

$$\bar{u}=\frac{\iint u\,\mathrm{e}^{-E/k_BT}p^2\mathrm{d}p\,u^2\mathrm{d}u}{\iint \mathrm{e}^{-E/k_BT}p^2\mathrm{d}p\,u^2\mathrm{d}u}=\sqrt{\frac{2k_BT}{M\omega_E^2}}\cdot\frac{\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}x^3\mathrm{d}x}{\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}x^2\mathrm{d}x}=2\sqrt{\frac{2k_BT}{\pi M\omega_E^2}}.$$

当 $T=T_M$ 时按林德曼判据 $\bar{u}_M=C_La$，即 $\sqrt{\dfrac{8k_BT_M}{\pi M\omega_E^2}}=C_La$，故

$$T_M=\frac{\pi Ma^2\omega_E^2C_L^2}{8k_B}.$$



simple cubic lattice: 6 nearest, 12 next-nearest, 8 n

Figure 4-1: simple cubic lattice around the origin atom O, showing the 6 nearest, 12 next-nearest and 8 next-next-nearest neighbors at distances a, sqrt2 a and sqrt3 a

本题各小问分值（8、6、17、11、8 分）按卷面评分说明口径列出。

5. 计算题 · 40分

答案 （1）$r=\dfrac{2GM}{c^2}\approx 2964\ \text{m}\approx 3\ \text{km}$ （2）$\Delta S=\dfrac{4\pi k_B G}{c\hbar}\left(M'^2-2M^2\right)$ （3）$T=\dfrac{c^3\hbar}{8\pi k_B GM}$，$C=-\dfrac{8\pi k_B GM^2}{c\hbar}$ （4）$W=(M_{10}+M_{20}-\sqrt{M_{10}^2+M_{20}^2})\,c^2$ （5）$P(M)=\dfrac{c^6\hbar}{15360\pi G^2M^2}$ （6）$t_f=\dfrac{5120\pi G^2M_0^3}{c^4\hbar}$

详解

(1) 第（1）问：牛顿力学下的黑洞半径（5 分） 取无穷远为势能零点，质量 m 的试探粒子与质量 M 天体的引力势能为 $V(d)=-\dfrac{GMm}{d}$。半径 r 处的逃逸速度由机械能守恒 $\dfrac{1}{2}mv_e^2-\dfrac{GMm}{r}=0$ 得

$$v_e=\sqrt{\frac{2GM}{r}}.$$

令 $v_e=c$ 得

$$r=\frac{2GM}{c^2}.$$

代入 $M=2\times10^{30}$ kg、$G=6.67\times10^{-11}$ m^3/(kg · s^2)、$c=3\times10^8$ m/s，本站解得

$$r=\frac{2\times6.67\times10^{-11}\times2\times10^{30}}{9\times10^{16}}\ \text{m}\approx 2964\ \text{m}\approx 3\ \text{km}.$$

(2) 第（2）问：并合后熵的改变量（4 分） 由 $S=\dfrac{k_Bc^3}{4G\hbar}A$、$A=4\pi r^2$、$r=\dfrac{2GM}{c^2}$ 得

$$S=\frac{\pi k_Bc^3}{G\hbar}\left(\frac{2GM}{c^2}\right)^2=\frac{4\pi k_BGM^2}{c\hbar}.$$

两个质量均为 M 的黑洞塌缩成质量 M' 的黑洞，系统熵改变量

$$\Delta S=S_2-S_1=\frac{4\pi k_BG}{c\hbar}\left(M'^2-2M^2\right).$$

(3) 第（3）问：黑洞温度与热容（8 分） 由 $\dfrac{1}{T}=\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}U}$ 与 $U=Mc^2$：

$$\frac{1}{T}=\frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}M}\left(\frac{4\pi k_BGM^2}{c\hbar}\right)=\frac{8\pi k_BGM}{c^3\hbar},$$

故

$$T=\frac{c^3\hbar}{8\pi k_BGM}.$$

黑洞温度与质量成反比，质量越小温度越高。热容

$$C=T\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}M}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}T}=T\cdot\frac{8\pi k_BGM}{c\hbar}\cdot\left(-\frac{c^3\hbar}{8\pi k_BGT^2}\right)=-\frac{c^2M}{T}=-\frac{8\pi k_BGM^2}{c\hbar},$$

恒为负值，说明黑洞在热力学上不稳定。

(4) 第（4）问：可逆热机对外做的总功（10 分） 由第（3）问，小质量黑洞温度高，为高温热源；热机从小黑洞吸热、向大黑洞放热，小黑洞质量不断减小直至消失。可逆循环中系统熵不变，由 $S \propto M^2$ 得

$$M_1^2 + M_2^2 = M_{10}^2 + M_{20}^2.$$

终态 $M_1 = 0$，故 $M_2 = \sqrt{M_{10}^2 + M_{20}^2}$。由能量守恒，热机全过程对外做的总功

$$\boxed{W = (M_{10} + M_{20} - \sqrt{M_{10}^2 + M_{20}^2})\,c^2}.$$

本站另核：用卡诺定理 $\dfrac{\mathrm{d}Q_2}{\mathrm{d}Q_1} = \dfrac{T_2}{T_1} = \dfrac{M_2}{M_1}$ 积分可得同一结果。

(5) 第（5）问：霍金辐射功率（5 分） 把黑洞视界当温度 T 的黑体，辐射功率

$$P = \sigma T^4 A = 4\pi\sigma \left(\frac{2GM}{c^2}\right)^2 \left(\frac{c^3\hbar}{8\pi k_B GM}\right)^4.$$

代入 $\sigma = \dfrac{\pi^2 k_B^4}{60\hbar^3 c^2}$ 化简得

$$P(M) = \frac{\pi^2 k_B^4}{60\hbar^3 c^2} \cdot \frac{c^8\hbar^4}{256\pi^3 k_B^4 G^2 M^2} = \frac{c^6\hbar}{15360\pi G^2 M^2}.$$

(6) 第（6）问：霍金辐射蒸发时间（8 分） 黑洞能量减少率等于辐射功率：

$$-c^2\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = \frac{c^6\hbar}{15360\pi G^2 M^2},$$

即 $-M^2\mathrm{d}M = \dfrac{c^4\hbar}{15360\pi G^2}\mathrm{d}t$。两边从 M_0 到 0（时间 0 到 t_f）积分得

$$t_f = \frac{5120\pi G^2 M_0^3}{c^4\hbar}.$$

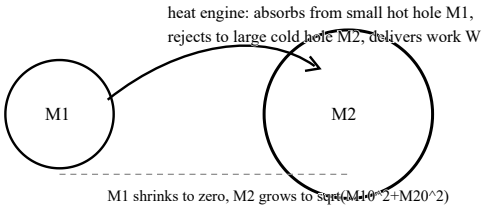


Figure 5-1: reversible heat engine working between two Schwarzschild black holes; the smaller hotter hole M1 feeds the engine and finally vanishes while M2 grows

本题各小问分值（5、4、8、10、5、8 分）按卷面评分说明口径列出。

6. 计算题 · 50分

答案 （1）$\boldsymbol{E}_{in}=\dfrac{3}{\varepsilon_r+2}\boldsymbol{E}_0$，$\boldsymbol{p}=\dfrac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+2}4\pi\varepsilon_0R^3\boldsymbol{E}_0$ （2） （i）$\boldsymbol{j}=\dfrac{ne^2}{\gamma m}\boldsymbol{E}$，$\sigma_0=\dfrac{ne^2}{\gamma m}$；（ii）$\widetilde{\sigma}=\dfrac{\varepsilon_0\omega_p^2}{\gamma+\mathrm{i}\omega}$；（iii）$\widetilde{\varepsilon}_r(\omega)=1-\dfrac{\omega_p^2}{\omega^2-\mathrm{i}\gamma\omega}$ （3） （i）$E_{in}(\omega)\approx\dfrac{3}{3-\omega_p^2/\omega^2}E_0$，$\omega_r=\dfrac{\omega_p}{\sqrt{3}}$；（ii）$E_r=\dfrac{\omega_p}{\sqrt{3\gamma}}E_0$，$\bar{P}_r=\dfrac{2\pi\varepsilon_0\omega_p^2E_0^2R^3}{3\gamma}$

详解

(1) 第（1）问：均匀介质球的内场与电偶极矩（10 分） 均匀极化的介质球表面极化电荷面密度为

$$\sigma'(\theta)=\boldsymbol{P}\cdot\quad\boldsymbol{n}=P\cos\theta,$$

此余弦分布电荷在球内产生的退极化场是匀强场

$$\boldsymbol{E}'=-\frac{\boldsymbol{P}}{3\varepsilon_0}.$$

球内总场 $\boldsymbol{E}_{in}=\boldsymbol{E}_0+\boldsymbol{E}'$，极化规律 $\boldsymbol{P}=(\varepsilon_r-1)\varepsilon_0\boldsymbol{E}_{in}$，联立解得

$$\boldsymbol{P}=\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+2}3\varepsilon_0\boldsymbol{E}_0,\qquad\boldsymbol{E}_{in}=\frac{3}{\varepsilon_r+2}\boldsymbol{E}_0.$$

电偶极矩

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{P}\cdot\quad\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+2}4\pi\varepsilon_0R^3\boldsymbol{E}_0.$$

(2) 第（2）问（i）：稳恒电场下的电流密度与电导率（4 分） 电子动力学方程 $-e\boldsymbol{E}-\gamma m\boldsymbol{v}=m\dot{\boldsymbol{v}}$，稳态时 $\dot{\boldsymbol{v}}=0$，漂移速度 $\boldsymbol{v}=-\dfrac{e}{\gamma m}\boldsymbol{E}$，电流密度

$$\boldsymbol{j}=n(-e)\boldsymbol{v}=\frac{ne^2}{\gamma m}\boldsymbol{E}=\sigma_0\boldsymbol{E},\qquad\sigma_0=\frac{ne^2}{\gamma m}.$$

(3) 第（2）问（ii）：复电导率（8 分） 交变场下用复数形式 $-e\widetilde{\boldsymbol{E}}-\gamma m\widetilde{\boldsymbol{v}}=m\dot{\widetilde{\boldsymbol{v}}}$，设稳态解 $\widetilde{\boldsymbol{v}}(t)=\widetilde{\boldsymbol{v}}_m\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$，解得 $\widetilde{\boldsymbol{v}}=\dfrac{-e/m}{\gamma+\mathrm{i}\omega}\widetilde{\boldsymbol{E}}$。于是

$$\widetilde{\boldsymbol{j}}=n(-e)\widetilde{\boldsymbol{v}}=\frac{ne^2/m}{\gamma+\mathrm{i}\omega}\widetilde{\boldsymbol{E}}=\widetilde{\sigma}\widetilde{\boldsymbol{E}},$$

即

$$\widetilde{\sigma}=\frac{\varepsilon_0\omega_p^2}{\gamma+\mathrm{i}\omega}=\frac{\varepsilon_0\omega_p^2}{\gamma^2+\omega^2}\gamma-\mathrm{i}\frac{\varepsilon_0\omega_p^2}{\gamma^2+\omega^2}\omega,\qquad\omega_p=\sqrt{\frac{ne^2}{\varepsilon_0m}}.$$

(4) 第（2）问（iii）：复相对介电常数（8 分） 电子位移的复振幅 $\widetilde{\boldsymbol{x}}=\dfrac{\widetilde{\boldsymbol{v}}}{\mathrm{i}\omega}=\dfrac{e/m}{\omega^2-\mathrm{i}\gamma\omega}\widetilde{\boldsymbol{E}}$，极化强度

$$\widetilde{\boldsymbol{P}}=n(-e)\widetilde{\boldsymbol{x}}=-\frac{ne^2/m}{\omega^2-\mathrm{i}\gamma\omega}\widetilde{\boldsymbol{E}}=\widetilde{\chi}\varepsilon_0\widetilde{\boldsymbol{E}},$$

复极化率 $\widetilde{\chi}=-\dfrac{\omega_p^2}{\omega^2-\mathrm{i}\gamma\omega}$，故

$$\widetilde{\varepsilon}_r(\omega)=1+\widetilde{\chi}=1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2-\mathrm{i}\gamma\omega}=\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2+\gamma^2}\right)+\mathrm{i}\left(-\frac{\gamma}{\omega}\cdot\frac{\omega_p^2}{\omega^2+\gamma^2}\right),$$

即 $\mathrm{Re}\,\widetilde{\varepsilon}_r=1-\dfrac{\omega_p^2}{\omega^2+\gamma^2}$，$\mathrm{Im}\,\widetilde{\varepsilon}_r=-\dfrac{\gamma}{\omega}\dfrac{\omega_p^2}{\omega^2+\gamma^2}$。

(5) 第（3）问（i）：球内场振幅与共振频率（6 分） 把第（1）问介质球结果作复数化类比：

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_{in}(\omega)=\frac{3}{2+\widetilde{\varepsilon}_r(\omega)}\boldsymbol{E}_0.$$

共振区附近 $\gamma\approx0$，$\widetilde{\varepsilon}_r\approx1-\dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}$，故

$$E_{in}(\omega)\approx\frac{3}{3-\omega_p^2/\omega^2}E_0.$$

当 $3-\dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}\to0$ 时 E_{in} 最大，发生等离激元共振，共振圆频率

$$\omega_r=\frac{\omega_p}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{ne^2}{3\varepsilon_0 m}}.$$

(6) 第（3）问（ii）：共振场振幅与平均发热功率（14 分） $\omega=\omega_r=\dfrac{\omega_p}{\sqrt{3}}$ 时 $\widetilde{\varepsilon}_r\approx-2-\mathrm{i}\,3\sqrt{3}\dfrac{\gamma}{\omega_p}$，故电场复振幅

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_{in}(\omega_r)=\frac{3}{\widetilde{\varepsilon}_r+2}\boldsymbol{E}_0\approx\mathrm{i}\,\frac{\omega_p}{\sqrt{3}\gamma}\boldsymbol{E}_0,\qquad E_r=\frac{\omega_p}{\sqrt{3}\gamma}E_0\gg E_0.$$

球内电流密度复振幅 $\widetilde{\boldsymbol{j}}=\widetilde{\sigma}\widetilde{\boldsymbol{E}}_r=\dfrac{\varepsilon_0\omega_p^2}{\gamma+\mathrm{i}\omega}E_r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_j}$，其中 $j=\dfrac{\varepsilon_0\omega_p^2}{\sqrt{\gamma^2+\omega^2}}E_r$、$\cos\varphi_j=\dfrac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2+\omega^2}}$。平均热功率密度

$$\bar{p}_r=\overline{j(t)E_r(t)}=\frac{1}{2}jE_r\cos\varphi_j=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0\omega_p^2\gamma}{\gamma^2+\omega^2}E_r^2\approx\frac{\varepsilon_0\omega_p^2E_0^2}{2\gamma},$$

乘以球体积得平均发热功率

$$\bar{P}_r=\bar{p}_r\cdot\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{2\pi\varepsilon_0\omega_p^2E_0^2R^3}{3\gamma}.$$

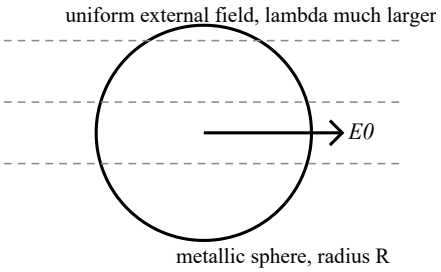


图6-1 本站绘制：半径 R 的金属纳米球置于波长远大于 R 的匀强交变电场中，仅考虑极化响应

本题各小问分值（10、20、20 分，第（2）（3）问内部再分（i）（ii）（iii））按卷面评分说明口径列出。

7. 计算题 · 50分

答案　（1）（i）$\boldsymbol{A}=\dfrac{\mu_0 g}{4\pi r}\tan\dfrac{\theta}{2}\boldsymbol{e}_\varphi$；（ii）$\Gamma_L=\dfrac{\mu_0 g}{2}(1-\cos\theta)$；$\Phi_L=\dfrac{\mu_0 g}{2}(1-\cos\theta)$（$\theta<\pi/2$）、$\Phi_L=-\dfrac{\mu_0 g}{2}(1+\cos\theta)$（$\theta>\pi/2$）；$\theta>\pi/2$ 时 $\Gamma_L-\Phi_L=\mu_0 g$，对应穿过回路的一段狄拉克弦（螺线管内部）的假想磁通 $\Phi_0=\mu_0 g$　（2）（i）$g(t)=nIS_0\cos\omega t$；（ii）$\varphi'=\dfrac{3}{4}\mu_0 nSI_0\cos\omega t$，$I=\dfrac{\mu_0 nSI_0\omega}{4aR_0}\sin\omega t$，$\bar{W}=\dfrac{3\mu_0^2 n^2 S^2 I_0^2\omega^2}{32aR_0}$　（3）$\Delta x=\dfrac{eD}{pd}\mu_0 nIS$

详解

(1) 第（1）问（i）：磁单极的矢势（12 分）　以磁单极 g 为原点取球坐标，由 $\boldsymbol{B}=\dfrac{\mu_0 g}{4\pi}\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$ 与 $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$。设 $\boldsymbol{A}=A_\varphi(r,\theta)\boldsymbol{e}_\varphi$，则

$$B_r=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\varphi)}{\partial\theta}=\frac{\mu_0 g}{4\pi r^2},$$

积分得 $\sin\theta A_\varphi=\dfrac{\mu_0 g}{4\pi r}(1-\cos\theta)+C(r)$，取 $C=0$（对应沿 $-z$ 轴的狄拉克弦），即

$$\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0 g}{4\pi r}\cdot\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\boldsymbol{e}_\varphi=\frac{\mu_0 g}{4\pi r}\tan\frac{\theta}{2}\boldsymbol{e}_\varphi.$$

(2) 第（1）问（ii）：环量、磁通之差与 A-B 效应解释（16 分） 对以极轴为轴、极角 θ 的圆环 L（半径 $r\sin\theta$），由 $\mathrm{d}\boldsymbol{l} = r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\boldsymbol{e}_\varphi$ 得环量

$$\Gamma_L = \oint_L \boldsymbol{A}\cdot\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \frac{\mu_0 g}{2}(1-\cos\theta).$$

磁通：以 L 为边界的圆平面（不过极轴之外区域），按磁荷库仑律用环带积分或立体角法计算，得

$$\Phi_L = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 g}{2}(1-\cos\theta), & \theta < \dfrac{\pi}{2}, \\ -\dfrac{\mu_0 g}{2}(1+\cos\theta), & \theta > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

比较可知：$\theta < \pi/2$ 时 $\Gamma_L = \Phi_L$，斯托克斯定理成立；$\theta > \pi/2$ 时

$$\Gamma_L - \Phi_L = \mu_0 g,$$

差值恒定、与 θ、r 无关，正对应圆面所穿过的螺线管内部贡献的磁通

$$\Phi_0 = \mu_0\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}l} = \mu_0 g$$

（$\mathrm{d}m = nIS\,\mathrm{d}l$ 为线元 $\mathrm{d}l$ 上的微元磁矩，等效磁荷场在螺线管内部贡献为零，故环量比磁通多出这一份“狄拉克弦”假想磁通 $\Phi_0 = \mu_0 g$）。由于弦上 $\boldsymbol{B} = 0$，带电粒子绕弦运动不受力，但电子波函数绕环一周获得 A-B 相位，环量与通量之差 $\mu_0 g$ 即 A-B 效应可观测的物理来源。

(3) 第（2）问（i）：等效磁荷与磁偶极子（2 分） 半无限长密绕螺线管单位长度 n 匝、截面 S、电流 I，由 $g = \dfrac{\Phi_0}{\mu_0} = \dfrac{\mu_0\,\mathrm{d}m/\mathrm{d}l}{\mu_0} = \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}l} = nIS$，故端面等效磁荷

$$g = nIS = nIS_0\cos\omega t.$$

(4) 第（2）问（ii）：三角形回路的磁通、感应电流与平均热功率（12 分） 回路为螺线管端部处的正三角形，等效磁荷 g 恰位于以该三角形为底面的正四面体中心，故 g 的磁场穿过三角形面的磁通为其总通量的 1/4：

$$\varphi_g' = \frac{1}{4}\mu_0 g = -\frac{1}{4}\mu_0 nSI_0\cos\omega t.$$

三角平面被狄拉克弦穿过，故总磁通除 φ_g' 外还含螺线管部分 $\varphi_L' = \mu_0 g$，即

$$\varphi' = \varphi_L' + \varphi_g' = \mu_0 g - \frac{1}{4}\mu_0 g = \frac{3}{4}\mu_0 nSI_0\cos\omega t.$$

感应电动势

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\varphi'}{\mathrm{d}t} = \frac{3}{4}\mu_0 nSI_0\omega\sin\omega t.$$

回路电阻为 $3aR_0$，感应电流

$$I = \frac{\varepsilon}{3aR_0} = \frac{\mu_0 nSI_0\omega}{4aR_0}\sin\omega t.$$

一个周期内的平均热功率

$$\bar{W} = \frac{1}{T}\int_0^T I\varepsilon\,\mathrm{d}t = \frac{3\mu_0^2 n^2 S^2 I_0^2\omega^2}{16aR_0}\cdot\ \frac{1}{T}\int_0^T \sin^2\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{3\mu_0^2 n^2 S^2 I_0^2\omega^2}{32aR_0}.$$

(5) 第（3）问：电子双缝干涉条纹移动（20 分） 电子（动量大小 p、电量 $-e$、取 $e>0$）经螺线管磁场区时，绕包围磁通 $\Phi = \mu_0 nIS$ 的路径获得 A-B 相位差

$$\Delta\varphi_{AB} = \frac{e}{\hbar}\Gamma = \frac{e\Phi}{\hbar} = \frac{e\mu_0 nIS}{\hbar}.$$

干涉条纹间距按本站双缝几何推算：波长 $\lambda = h/p = 2\pi\hbar/p$，缝间距 d、缝到屏距离 D，条纹间距 $\dfrac{\lambda D}{d} = \dfrac{2\pi\hbar D}{pd}$。A-B 相位差引起的条纹移动量

$$\Delta x = \frac{\Delta\varphi_{AB}}{2\pi}\cdot\ \frac{2\pi\hbar D}{pd} = \frac{e\mu_0 nIS}{\hbar}\cdot\ \frac{\hbar D}{pd} = \frac{eD}{pd}\mu_0 nIS.$$

即条纹整体平移 $\Delta x = \dfrac{eD}{pd}\mu_0 nIS$，移动方向由电流方向（螺线管内 $\boldsymbol{B}$ 方向）决定；增大电流或反转电流方向，条纹相应移动或反向移动，而电子路径上始终不受洛伦兹力，体现矢势环量的物理实在性。

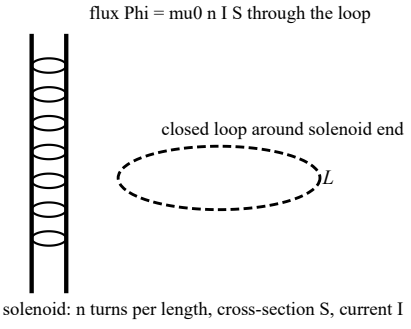


图7-1 本站绘制：套在螺线管端部的闭合回路 L，穿过回路的磁通决定 A-B 相位

本题各小问分值（24、14、12 分，内部再分（i）（ii））按卷面评分说明口径列出。

逐光知理 · 竞赛答案册 · 易错点速查

第40届全国中学生物理竞赛决赛理论 · 易错点速查

补在原册之后：原册答案与详解未作任何改动

共 6 条 · 绑定本卷题号

只挑本卷最容易失分的动作，按「错法 / 机理 / 正解」三段写，题号与原册一致；公式沿用原册口径。

第 1 题 · 第(4)(5)问

错法 把主虹与副虹的颜色次序写反；算偏振度时直接用 s、p 偏振的电场振幅相比；内反射次数 k 代入偏向角公式时系数仍按 $k=1$ 取。

机理 主虹（$k=1$，一次内反射）紫光偏向角更大、张角更小，紫在内红在外；副虹（$k=2$，两次内反射）红在内紫在外，两者次序相反。偏向角 $\theta_k = k\pi + 2i - 2(k+1)r$，内反射次数改变系数 $2(k+1)$。偏振度按强度定义 $P=(I_s-I_p)/(I_s+I_p)$，强度正比振幅平方，必须先把振幅平方再相减。

正解 先按 $n_{红}=1.329$、$n_{紫}=1.344$ 分别求极小偏向角：主虹红 137.34°、紫 139.50°（角宽 2.16°），副虹红 229.84°、紫 233.73°（角宽 3.89°）；张角用 $\pi-\theta$（主虹）或 $\theta-\pi$（副虹）换算；偏振度由 E_s、E_p 平方得 I_s、I_p 后代入，主虹 91.65%、副虹 79.99%。

第 2 题 · 第(2)(4)问

错法 列平均运动方程时只保留重力矩，漏掉高频惯性力与快变量 δ 耦合产生的二阶有效力矩；判 $\varphi=\pi$ 倒立位形稳定性时只看重力项符号。

机理 转轴作 $z=A\cos\omega t$ 高频振动，非惯性系惯性力 $F_{\text{in}}=m\omega^2 A\cos\omega t$；把角坐标拆成慢变量 φ 加高频小振动 δ，周期平均后 $\langle\cos\omega t\rangle=0$，但 $\langle\delta\cdot\cos\omega t\rangle$ 型二阶耦合项不为零，它贡献有效势能里的 $\frac{3}{16}m\omega^2A^2(1-\cos^2\varphi)$ 项。倒立位形 $\varphi=\pi$ 原本重力矩失稳，高频项在 $\omega^2>3\omega^2A^2/(4gl)$ 时把它稳定化。

正解 先在随轴平动系写含惯性力的转动定理，再按高频小振动展开、对周期平均得 φ 的慢方程；稳定性由 V_{eff} 对 φ 的二阶导判定：$\varphi=0$ 恒稳定，$\varphi=\pi$ 在临界角速度以上稳定、以下不稳定，第三组平衡位置为不稳定；小振动频率由二阶导除以转动惯量给出。

第 3 题 · 第(1)(3)问

错法 把衰变释放的总动能全部分给 α 粒子；写微分散射截面时把 $\sin^4(\theta/2)$ 写成 $\sin^2$ 或 $\sin^3$；瞄准距离公式里余切与余割关系弄反。

机理 母核静止衰变满足动量守恒，反冲核与 α 粒子动量大小相等，动能按质量反比分配，α 粒子动能 $E_a=E_d\cdot A/(A-4)$，本题 $E_d=5.41$ MeV、$E_a\approx5.31$ MeV。卢瑟福截面 $\sigma(\theta)=D^2/[16\sin^4(\theta/2)]$，$D=2Ze^2/(4\pi\varepsilon_0E)$，固定靶时 $\sigma\propto E^{-2}$；瞄准距离 $b=(D/2)\cot(\theta/2)$，小角散射 b 大、大角散射 b 小。

正解 衰变段先列动量守恒再按动能反比分配；散射段由冲量法或双曲线轨道得 b 与 θ 的余切关系，求导后用 $d\sigma=2\pi b|db|$、$d\Omega=2\pi\sin\theta\,d\theta$ 推截面；拐点处最近距离 $r_{\min}=D/2(1+1/\sin(\theta/2))$，本题 25 MeV、60°、$Z=79$ 得 13.65 fm，再往里核力开始起作用、库仑关系失效。

第 5 题 · 第(3)(6)问

错法　把黑洞热容当成正值；并合或热机过程中把终态质量直接写成两质量代数和；估算蒸发寿命时把功率的质量依赖当成 $t \propto M^{-2}$。

机理　黑洞温度 $T \propto 1/M$，熵 $S \propto M^2$，热容 $C = dU/dT$ 恒为负值，吸积反而升温，热力学上不稳定。可逆热机过程熵不变，$S \propto M^2$ 守恒给出终态 $M_2 = \sqrt{M_{10}^2 + M_{20}^2}$，不是 $M_1 + M_2$；对外做功 $W = (M_{10} + M_{20} - \sqrt{M_{10}^2 + M_{20}^2})c^2$。霍金辐射功率 $P \propto M^{-2}$，能量减少率 $-c^2\, dM/dt = P$，积分得蒸发时间 $t_f \propto M_0^3$。

正解　先由 $S = k_B c^3 A/(4G\hbar)$、$A = 4\pi r^2$、$r = 2GM/c^2$ 推 $T \propto 1/M$ 与负热容；热机段用熵守恒定终态质量，再由能量守恒算总功；寿命段对 $-M^2\, dM \propto dt$ 从 M_0 积到 0，得 $t_f \propto M_0^3$，不要把功率的质量幂次直接搬到时间上。

第 6 题 · 第(1)(3)问

错法　写介质球内场时漏掉退极化场的 1/3 因子；复电导率分母把 $\gamma + i\omega$ 写成 $\gamma - i\omega$；把共振条件 $\varepsilon_r = -2$ 与共振频率 $\omega_r = \sqrt{3}\,\omega_p$ 混为一谈。

机理　均匀极化球表面余弦分布极化电荷在球内产生匀强退极化场 $-P/(3\varepsilon_0)$，球内总场 $E_{\text{in}} = E_0 + E'$，联立 $P = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 E_{\text{in}}$ 得 $E_{\text{in}} = 3\varepsilon_0/(\varepsilon_r + 2)E_0$，偶极矩 $p = 4\pi\varepsilon_0 R^3(\varepsilon_r - 1)/(\varepsilon_r + 2)E_0$。交变场下电子方程 $m\dot{v} = -eE - \gamma m v$，取 $e^{i\omega t}$ 稳态解分母为 $\gamma + i\omega$；金属球等离激元共振由 $\varepsilon_r = -2$ 触发，对应圆频率 $\omega_r = \sqrt{3}\,\omega_p$。

正解　先定退极化场再联立极化规律求球内场与偶极矩；复电导率 $\tilde{\sigma} = \sigma_0/(1 + i\omega/\gamma)$，复介电常数实虚部分开；共振区 $\gamma \approx 0$ 时球内场振幅按 $3E_0/|3 - \omega^2/\omega_p^2|$ 放大，$\omega = \omega_r = \sqrt{3}\,\omega_p$ 时分母趋零；平均发热功率取 $\mathrm{Re}(\tilde{j}\cdot\tilde{E})/2$ 再乘球体积。

第 7 题 · 第(1)(3)问

错法　回路穿过狄拉克弦时仍直接套用斯托克斯定理，认为矢势环量必须等于穿过回路的磁通；写 A-B 相位差时用 h 而不是 $\hbar$；条纹移动量与条纹间距公式混用。

机理　$\theta > \pi/2$ 时回路面穿过狄拉克弦（螺线管内部），环量与磁通相差一份恒定的弦磁通 $\mu_0 g_0$，斯托克斯定理在弦上不直接成立；弦上 $B = 0$，粒子绕弦不受力，但波函数绕环一周获得 A-B 相位。相位差 $\Delta\phi_{\text{AB}} = e\Phi/\hbar$（$\Phi = \mu_0 nIS$），条纹间距 $\Delta y = \lambda D/(pd) = 2\pi\hbar D/(pd)$，相位差引起的平移 $\Delta x = eD\mu_0 nIS/(pd)$。

正解　先分 $\theta < \pi/2$、$\theta > \pi/2$ 两段写环量与磁通，差值即狄拉克弦磁通；A-B 相位用 $e\Phi/\hbar$，再按双缝几何把相位差折算成条纹平移；移动方向由电流方向（螺线管内 B 方向）决定，增大或反转电流时条纹相应移动或反向，路径上始终无洛伦兹力。