逐光知理 · 高考物理参考答案与详解

第41届全国中学生物理竞赛决赛理论考试试题（2024年10月26日）

参考答案与详解（本站独立编撰）

竞赛决赛理论 · 6 道计算大题 · 320 分

本册答案与详解由逐光知理物理教研组独立编撰：先由本站对原卷逐题建模推导，再对全部数值逐条回代核对。大题按小问分条给出完整推导链。若个别表达式与原卷印刷符号存在约定差异，以卷面为准。

答案速查

题号	主考点	答案摘要
1	β衰变、原子质量与Q值、二体衰变动能、角动量耦合与自旋	（1）$M_P(Z,A)>M_D(Z+1,A)$（2）约 1.162 MeV（3）m_Xc^2 在 0 到约 0.1 MeV 之间（4）X 不带电，自旋量子数为 1/2
2	一维双原子链耦合振子的本征频率与本征模式	（1）$M\ddot{x}_i=k(x_{i-1}-2x_i+x_{i+1})$（2）$\omega_\pm^2=\frac{k}{Mm}\left[M+m\pm\sqrt{(M+m)^2-4Mm\sin^2\alpha}\right]$，$\alpha=\pi n/N$（3.1）$B/A=\frac{2k-M\omega^2}{2k\cos\alpha}$（3.2）见推导（4）（5）$q=n\pi/(2N)$ 的驻波模式，与（4）相同的频率不依赖 μ
3	光学器件的2×2矩阵表示与四象限（正交相位）干涉	（1.2）$\phi=\pm\pi/2$（取 $+\pi/2$ 约定）（2）（3）对角矩阵，见推导（4）$\widetilde{Q}=\frac{1+i}{2}\begin{pmatrix}1&-i\\-i&1\end{pmatrix}$（5）$\widetilde{L}_H=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ 等（6）$I_A^{\text{干涉}}=\frac{I_0}{2}\cos\Delta\phi$，$I_B^{\text{干涉}}=\frac{I_0}{2}\sin\Delta\phi$（7）$\Delta\phi=\arg\left(I_A^{\text{干涉}}+iI_B^{\text{干涉}}\right)$
4	两轮平衡车的转弯平衡、加速时的扭矩匹配与小振动	（1.1）$R(\phi)=\frac{g\tan\phi}{\Omega^2}+\frac{L}{2}\sin\phi$（1.2）$N_{\text{内}}=\frac{Mg}{2}-\frac{Mgr\tan\phi}{d}$，$N_{\text{外}}=\frac{Mg}{2}+\frac{Mgr\tan\phi}{d}$（2）$a(\theta)=\frac{MLg\sin\theta}{ML\cos\theta+2r(4m+M)}$，$\tau(\theta)=-\frac{(4m+M)rMLg\sin\theta}{ML\cos\theta+2r(4m+M)}$（3）$0<M'<M$，$\omega=\sqrt{\frac{12rg(4m+M)^2(M-M')}{M'L(16m+M)[ML+2r(4m+M)]}}$
5	恒星静力平衡、引力势能、绝热稳定性与辐射传质（爱丁顿光度）	（1）$\frac{dp}{dr}=-\frac{Gm\rho}{r^2}$，$\frac{dm}{dr}=4\pi r^2\rho$（2）$p(0)\geq\frac{GM^2}{8\pi R^4}$（3）$E_g=-12\pi\int_0^R p(r)r^2\,dr$（4）$\gamma>\frac{4}{3}$（5）$\gamma=\frac{4}{3}$（6）$\frac{dT}{dr}=-\frac{3\kappa\rho L}{16\pi ca\,r^2T^3}$（7）$L(R)\leq\frac{4\pi GMc}{\kappa(R)}$
6	真空零点能与卡西米尔力的一维模型	（1）$\omega_n=\frac{n\pi c}{a}$，$\frac{n\pi c}{L-a}$（2）$E=\frac{\pi\hbar c}{2}\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{L-a}\right]\sum_{n=1}^{\infty}n$（发散）（4）$F=\frac{\pi\hbar c}{24}\left[\frac{1}{(L-a)^2}-\frac{1}{a^2}\right]$，指向 A（5）同一结果，与 f 无关

全卷解答与详解

1. 计算题 · 50分

答案 （1）$M_P(Z,A)>M_D(Z+1,A)$（2）约 1.162 MeV（3）m_Xc^2 在 0 到约 0.1 MeV 之间（4）X 不带电，自旋量子数为 1/2

详解

(1) 第（1）问：原子发生 β^- 衰变的条件 在原子层次考察，β^- 衰变写作

$$ {}_Z^AM_P \longrightarrow {}_{Z+1}^AM_D + e^- $$

（若还有其他粒子 X 生成则再加上 X）。采用原子静止质量（已把轨道电子计入）：母原子含 Z 个电子，子原子含 $Z+1$ 个电子，而释放出的那个 β^- 电子恰好可以视为补足子原子的第 $Z+1$ 个电子，因此电子的静质量在两侧原子质量中恰好彼此对消。由能量守恒（母原子静止），释放的动能与（可能存在的）其他粒子静能都来自质量差，故衰变能够自发发生的条件是

$$ Q=[M_P(Z,A)-M_D(Z+1,A)]\,c^2>0, \quad \text{即 } M_P(Z,A)>M_D(Z+1,A). $$

本站解得：原子 β^- 衰变条件为母原子静止质量大于子原子静止质量。

(2) 第（2）问：若只放出 β^- 电子，其动能 可用能量为

$$Q = (209.984130 - 209.982883)\,\text{amu} \times 931.494\,\text{MeV/amu} = 0.001247 \times 931.494\,\text{MeV} = 1.1616\,\text{MeV}.$$

若末态只有子原子与电子，则为二体衰变，两者动量大小相等：电子动能 T_e 满足 $p_e c = \sqrt{T_e(T_e + 2m_e c^2)}$，子核反冲动能 $T_D = p^2/(2M_D)$，且 $T_e + T_D = Q$。先取 $T_e \approx Q$ 回代：$p_e c = \sqrt{1.1616 \times (1.1616 + 1.022)}\,\text{MeV} = \sqrt{2.536}\,\text{MeV} = 1.593\,\text{MeV}$，

$$T_D = \frac{(1.593)^2}{2 \times 209.982883 \times 931.494}\,\text{MeV} = \frac{2.536}{3.912 \times 10^5}\,\text{MeV} \approx 6.5 \times 10^{-6}\,\text{MeV},$$

故 $T_e = 1.1616 - 0.0000065 \approx 1.1616\,\text{MeV}$。本站解得：$\beta^-$ 电子动能 $T_e \approx 1.162\,\text{MeV}$（取四位有效数字）。

(3) 第（3）问：另一粒子 X 静止质量的范围 三体衰变中能量可以在三个末态间连续分配，电子动能构成连续谱；当 X 与子核都近似静止（动能趋于零）时电子动能取端点值

$$T_{max} \approx Q - m_X c^2 - \Delta T_D, \quad \text{即 } m_X c^2 \approx Q - T_{max}.$$

由图1α 读谱：计数在约 1.1 至 1.2 MeV 之间才降到零，本站取端点读数 $T_{max} \approx 1.16\,\text{MeV}$，读数不确定度约 0.05 MeV。于是

$$0 \le m_X c^2 = Q - T_{max} - \Delta T_D \lesssim 0.1\,\text{MeV},$$

即 $m_X \lesssim 0.1\,\text{MeV}/c^2 \approx 0.2\,m_e$。本站解得：该粒子静止质量远小于电子，$m_X c^2$ 介于 0 与约 0.1 MeV 之间，与静止质量（近似）为零的中微子一致。

(4) 第（4）问：X 的带电量与自旋 元过程为 $\text{n} \to \text{p} + e^- + \text{X}$。电荷守恒：$0 = (+1) + (-1) + q_X$，故 $q_X = 0$，X 不带电。角动量：中子、质子、电子在任一方向的投影都只能是 $\pm\hbar/(4\pi)$（记 $\hbar = h/2\pi$，即 $\pm\hbar/2$）。设该方向总投影守恒，质子与电子投影之和只可能是 $-\hbar, 0, +\hbar$；要能与中子的 $\pm\hbar/2$ 凑成守恒，X 的投影必须能取 $\pm\hbar/2$。若 X 的自旋量子数为整数（含 0），其投影均为 $\hbar$ 的整数倍，任何分配都无法给出 $\pm\hbar/2$ 的总投影，被排除；自旋为 1/2 时，取 X 投影 $= \pm\hbar/2$、（p，e）投影和为 0 或 $\mp\hbar$，守恒总能实现。本站解得：X 不带电、自旋量子数为 1/2（即后来确认的反中微子）。

(5) 易错提示 （i）第（2）问若直接写 $T_e = Q$ 会漏掉子核反冲修正，虽然仅 $6.5 \times 10^{-6}\,\text{MeV}$，规范解法应给出回代过程；（ii）第（3）问端点 T_{max} 必须从图上读出并给出读数误差量级，才能支撑本站关于 m_X 近似为零的结论；（iii）第（4）问电荷守恒必须写在核子（n、p）层次，不能在原子层次讨论。

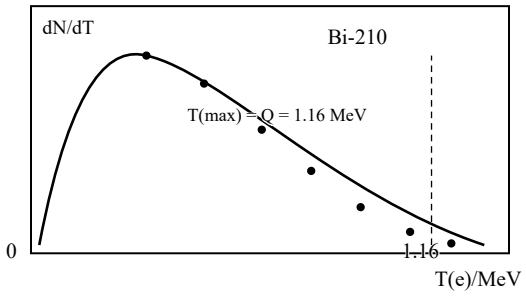


图1 本站绘制：Bi-210 的 β- 电子动能连续谱示意（端点约 1.16 MeV）

第（4）问 X 的自旋：投影守恒可直接排除整数自旋；更高半整数自旋（如 3/2）虽不与投影守恒直接矛盾，但需质子与电子自旋始终耦合为特定值，本站按最简自洽取 1/2。

2. 计算题 · 50分

答案 （1）$M_i \ddot{x}_i = k(x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1})$（2）$\omega_\pm^2 = \frac{k}{Mm}\left[M + m \pm \sqrt{(M+m)^2 - 4Mm\sin^2\alpha}\right]$，$\alpha = \pi n/N$（3.1）$B/A = \frac{2k - M\omega^2}{2k\cos\alpha}$（3.2）见推导（4）（5）$q = n\pi/(2N)$ 的驻波模式，与（4）相同的频率不依赖 μ

详解

(1) 第（1）问：运动方程 第 i 个珠子只与相邻两个弹簧相连，两弹簧形变分别为 $x_i - x_{i-1}$ 与 $x_i - x_{i+1}$，回复力沿环的逆时针方向记为正：

$$M_i \ddot{x}_i = -k(x_i - x_{i-1}) - k(x_i - x_{i+1}) = k(x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}), \quad i = 1, 2, \cdots, 2N,$$

其中下标按 $2N + 1 \equiv 1$（闭合环）理解；$M_i = M$（i 为奇数）、$M_i = m$（i 为偶数）。

(2) 第（2）问：本征频率 设行波解 $x_i = a_i e^{-i\omega t}$，取 $x_{2j-1} = Ae^{i(2j-1)\alpha}$、$x_{2j} = Be^{i2j\alpha}$（$\alpha$ 为相邻珠子振动的相位差），代入第 $2j-1$ 与 $2j$ 个珠子的方程：

$$M\omega^2 A = k\,[2A - 2B\cos\alpha]\,, \qquad m\omega^2 B = k\,[2B - 2A\cos\alpha]\,.$$

这是关于 A, B 的齐次线性方程组，有非零解要求系数行列式为零：

$$(2k - M\omega^2)(2k - m\omega^2) = 4k^2\cos^2\alpha, \quad \text{即 } Mm\omega^4 - 2k(M+m)\omega^2 + 4k^2\sin^2\alpha = 0,$$

二次方程的常数项是 $4k^2\sin^2\alpha$，解得两支频谱：

$$\omega_{\pm}^2(\alpha) = \frac{k}{Mm}\,[M + m \pm \sqrt{(M+m)^2 - 4Mm\sin^2\alpha}]\,.$$

闭合环的单值性要求 $e^{i2N\alpha} = 1$，即 $\alpha = \dfrac{n\pi}{N}$（$n = 0, 1, \cdots, N-1$；α 与 $\alpha+\pi$ 配 A, B 变号互换，不另计）。极限校验：$\alpha \to 0$ 时根号内为 $|M-m|$，声学支 $\omega_- = 0$（整体平移，零频检验通过）、光学支 $\omega_+^2 = 2k\,(\frac{1}{M} + \frac{1}{m})$；$\alpha = \pi$ 时 $\sin^2\alpha = 1$，两支退化为 $\omega^2 = 2k/M$、$2k/m$（各自子晶格独立振动），均与物理直觉一致。共 $2N$ 个模式，自由度数目相符。

(3) 第（3.1）问：振幅比 A 与 B 的关系 由第（2）问第一个方程直接解出

$$\frac{B}{A} = \frac{2k - M\omega^2}{2k\cos\alpha}.$$

它是实数：在所设行波中相邻大小珠子的相位差恰为 α，相位关系已由 $e^{i\alpha}$ 因子体现，振幅比本身不再携带附加相位因子。（3.2）中代入振幅比时同样使用 $\cos\alpha$。

(4) 第（3.2）问：平均动能 $\langle E_k\rangle$ 与总能量 E 每个简谐振子在一个周期内的平均动能为其峰值动能的一半，即 $\overline{E_{k,i}} = \frac{1}{4}M_i\omega^2\,|\,a_i\,|^{\,2}$。全系统求和：

$$\langle E_k\rangle = \frac{N\omega^2}{4}\,(MA^2 + mB^2)\,.$$

代入（3.1）的振幅比消去 B：

$$\langle E_k\rangle = \frac{N\omega^2 A^2}{4}\,[M + \frac{m\,(2k - M\omega^2)^2}{4k^2\cos^2\alpha}]\,.$$

简谐振动中一个周期内的平均动能等于平均势能，故总能量为平均动能的两倍：

$$E = 2\langle E_k\rangle = \frac{N\omega^2 A^2}{2}\,[M + \frac{m\,(2k - M\omega^2)^2}{4k^2\cos^2\alpha}]\,,$$

结果中不含 B，满足题目要求。

(5) 第（4）问：1 号珠子锁定时的本征频率与模式 锁定后 $x_1 \equiv 0$，其余 $2N-1$ 个珠子运动，方程形式不变，只是两端（第 2 与第 2N 个珠子的外侧邻居）都取 $x_1 = 0$。设驻波解

$$x_i = u_i e^{-i\omega t}, \qquad u_i = w_i\sin\,[q(i-1)]\,, \quad w_{2j-1} = A,\ w_{2j} = B,$$

代入体方程并利用 $\sin[q(i-2)] + \sin(qi) = 2\cos q\ \sin[q(i-1)]$，得代数方程组

$$(2k - M\omega^2)A = 2kB\cos q, \qquad (2k - m\omega^2)B = 2kA\cos q.$$

非零解条件：

$$(2k - M\omega^2)(2k - m\omega^2) = 4k^2\cos^2 q, \quad \text{即 } Mm\omega^4 - 2k(M+m)\omega^2 + 4k^2\sin^2 q = 0, \quad \Rightarrow \quad \omega_{\pm}^2(q) = \frac{k}{Mm}\,[M + m \pm \sqrt{(M+m)^2 - 4Mm\sin^2 q}]\,.$$

极限校验：$q \to 0$ 时 $\omega_- \to 0$（声学支零频检验通过）；$q = \pi/2$ 时 $\sin^2 q = 1$，形式上给出 $\omega^2 = 2k/m$ 与 $2k/M$ 两支，但此时 $\cos q = 0$迫使 $A = 0$（奇数珠全为节点），$2k/M$ 支不存活，只余 $\omega^2 = 2k/m$，与下文逐一计数一致。 边条件：$u_1 = 0$ 已自动满足；另一端要求 $u_{2N+1} = u_1 = 0$，即 $\sin(2Nq) = 0$，$q = \dfrac{n\pi}{2N}$。逐一检验可去重（q 与 $\pi - q$ 给出同一模式；$q = \pi/2$ 时 sin 函数使奇数号珠子处处为零，只有偶数号珠子振动的单支存活）：允许的 q 为 $q = \dfrac{n\pi}{2N}$，$n = 1, 2, \cdots, N$；其中 $n < N$ 的每个 q 给出 $\pm$ 两支，$n = N$（$q = \pi/2$）只给出 $\omega^2 = 2k/m$ 这一支（奇数珠全为节点）。合计 $2(N-1) + 1 = 2N - 1$ 个模式，与自由度数一致。模式表达式（不含 B）：

$$x_{2j-1} = A\sin\,[q(2j-2)]\cos(\omega_{\pm}t + \varphi), \qquad x_{2j} = A\,\frac{2k - M\omega_{\pm}^2}{2k\cos q}\,\sin(2jq)\cos(\omega_{\pm}t + \varphi).$$

(6) 第（5）问：不依赖于 μ 的本征频率与模式 1 号珠子质量变为 μ（按卷面记号）后，方程组只在第 1、2、2N 个珠子的方程中通过 μ 耦合。若某个模式中 $x_1 \equiv 0$（1 号珠子恰为节点），则第 1 个珠子的运动方程恒等地成立而与其质量无关，其余方程与第（4）问完全相同。因此第（4）问求得的全部模式（x_1 为节点的驻波）在本问中仍是严格本征模式，其频率与模式表达式与第（4）问完全相同、不含 μ：

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{k}{Mm}\left[M+m \pm \sqrt{(M+m)^2 - 4Mm\sin^2\frac{n\pi}{2N}}\right], \quad n = 1, \cdots, N$$

（$n = N$ 时只有 $\omega^2 = 2k/m$ 一支），模式函数即第（4）问给出的表达式。反之，若模式中 $x_1 \neq 0$，其频率必然通过 $\mu\ddot{x}_1 = k(\cdots)$ 依赖 μ。本站解得：不依赖 μ 的模式就是以 1 号珠子为节点的全部模式。

(7) 易错提示 （i）行列式右端为 $4k^2\cos^2\alpha$（α 为相邻珠相位差），但化为二次方程后常数项是 $4k^2\sin^2\alpha$，故频谱根号内是 $\sin^2\alpha$；若误写 $\cos^2\alpha$，则 $\alpha = 0$ 时声学支给非零频 $2k/M$、$2k/m$，与整体平移零频模式自相矛盾；（ii）第（4）问数模时要剔除重复（q 与 $\pi - q$ 等价）与零向量解，总数必须是 $2N-1$；（iii）第（5）问不要试图对新质量重新解全套谱，抓住 $x_1 = 0$ 的模式与 μ 解耦即可。

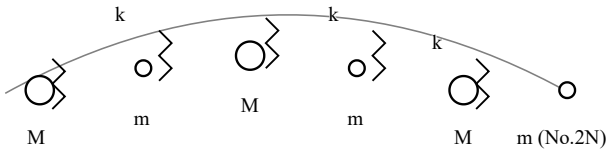


图2 本站绘制：闭合圆环上大珠 M（奇数号）与小珠 m（偶数号）由劲度系数 k 的弹簧交替相连

第（5）问卷面原文为：其质量变为 μ（并非 μM，本站按卷面符号书写）；无论该质量取何值、记作 μ 还是 μM，结论不变，因为这一类模式中 x1 恒为零，方程与该质量完全解耦。

3. 计算题 · 50分

答案 （1.2）$\phi = \pm\pi/2$（取 $+\pi/2$ 约定）（2）（3）对角矩阵，见推导（4）$\widetilde{Q} = \frac{1+i}{2}\begin{pmatrix}1 & -i\\ -i & 1\end{pmatrix}$（5）$\widetilde{L}_H = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 等（6）$I_A^{\text{干涉}} = \frac{I_0}{2}\cos\Delta\phi$，$I_B^{\text{干涉}} = \frac{I_0}{2}\sin\Delta\phi$（7）$\Delta\phi = \arg\left(I_A^{\text{干涉}} + iI_B^{\text{干涉}}\right)$

详解

(1) 第（1.1）问：暗端口处能量去向 分束器无损（50/50），能量必守恒。当第二个分束器下方探测器为暗纹（相消干涉）时，两路光在下方输出端口振幅反相相消，而在另一个输出端口（图中探测器对面、从第二个分束器斜向上射出的端口）恰好同相叠加。本站解得：全部入射能量从第二个分束器的另一个输出端口射出（作图：在上端口画一束与入射光等光强的出射箭头，下端口探测器件处标注 I=0）。

(2) 第（1.2）问：ϕ 的取值 无损分束器是二端口的幺正（能量守恒）器件。对一个从同一面入射、$r = t = \sqrt{2}/2$ 的对称分束器，写散射矩阵 $\begin{pmatrix}\widetilde{r} & \widetilde{t}\\ \widetilde{t} & \widetilde{r}\end{pmatrix}$，能量守恒要求两列内积为零：

$$\widetilde{r}^*\widetilde{t} + \widetilde{t}^*\widetilde{r} = 2\,\mathrm{Re}\left(\widetilde{r}^*\widetilde{t}\right) = 0.$$

即 $\widetilde{t}/\widetilde{r}$ 必须为纯虚数，故 $\phi = \delta_t - \delta_r = \pm\frac{\pi}{2}$。本站取 $\phi = +\frac{\pi}{2}$（负号只改变相位约定，物理相同）。这正是马赫-曾德尔干涉仪存在暗端口的代数根源。

(3) 第（2）问：分束器的反射矩阵与透射矩阵 按图3b 的约定，每束光各自取（P，S，k）右手正交系，且由图可见反射光与透射光的 S 方向都取与入射光 S 同向（均垂直纸面同号）。于是 P、S 两个偏振通道互不串扰，反射、透射矩阵均为对角阵：

$$\widetilde{R} = \begin{pmatrix}r_P e^{i\delta_{rP}} & 0\\ 0 & r_S e^{i\delta_{rS}}\end{pmatrix}, \qquad \widetilde{T} = \begin{pmatrix}t_P e^{i\delta_{tP}} & 0\\ 0 & t_S e^{i\delta_{tS}}\end{pmatrix}.$$

对本卷的 50/50 非偏振分束器，$r_P = r_S = t_P = t_S = \frac{\sqrt{2}}{2}$，且由（1.2）每个通道内 $\delta_t - \delta_r = \pm\frac{\pi}{2}$；再结合分束器整体能量守恒（对 P 与 S 通道分别成立），可取 $\delta_{rP} = \delta_{rS} = 0$、$\delta_{tP} = \delta_{tS} = \frac{\pi}{2}$ 的规范：

$$\widetilde{R} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad \widetilde{T} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\pi/2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = i\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

(4) 第（3）问：全反镜的矩阵 $\widetilde{M}$ 理想全反镜把入射光全部反射（模为1）。用与（2）相同的右手系约定分析图3c(a)：反射前后传播方向反向的一支偏振基矢随之反向，导致其分量变号。按图中标注，P 分量在反射前后取向连续，而 S 分量的正方向在反射光的右手系中相对入射光反向，故

$$\widetilde{M} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

（可差一个整体相位 $e^{i\delta}$，不影响干涉光强的相对计算）。

(5) 第（4）问：快轴沿 -45° 的 1/4 波片矩阵 快轴方向偏振比慢轴方向相位领先 $\pi/2$。取（P，S）基，快、慢轴单位矢量分别为 $\hat{f}=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$、$\hat{s}=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$。波片把快轴分量乘 $e^{i\pi/2}=i$：

$$\widetilde{Q}=i\,|\hat{f}\rangle\langle\hat{f}|+|\hat{s}\rangle\langle\hat{s}|=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+i & 1-i\\ 1-i & 1+i\end{pmatrix}.$$

提出公共因子写成标准形式：

$$\widetilde{Q}=\tilde{a}\begin{pmatrix}1 & \tilde{b}\\ \tilde{c} & \tilde{d}\end{pmatrix},\quad \tilde{a}=\frac{1+i}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\pi/4},\quad \tilde{b}=\tilde{c}=\frac{1-i}{1+i}=-i,\quad \tilde{d}=1.$$

校验：入射水平偏振 $(1,0)^T$ 经 $\widetilde{Q}$ 得 $\frac{1+i}{2}(1,-i)^T$，为圆偏振，符合波片把线偏振转成圆偏振的功能。

(6) 第（5）问：三种线偏振片的矩阵 理想偏振片只保留透光方向分量：

$$\widetilde{L}_H=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\qquad \widetilde{L}_V=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\qquad \widetilde{L}_{+45^\circ}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

(7) 第（6）问：两探测器的干涉项 记两路光到达分束器2时的复振幅。两路各经历 50/50 分束与反射，几何相位并入光程相位：到达分束器2时两路振幅均为 $\frac{E_0}{\sqrt{2}}$，相位因子分别为 e^{-ikl_1}、e^{-ikl_2}。偏振演算（本站按第（2）～（5）问矩阵沿光路逐器件相乘，器件约定如上）：光路1经快轴 -45° 的 1/4 波片后，其偏振被转到 $\pm45^\circ$ 方向并相对光路2获得附加的 $\pm\frac{\pi}{2}$ 相位（这正是插入波片的目的）；光路2经 $+45^\circ$ 偏振片后偏振沿 45°。于是两路光在分束器2处偏振一致、各以投影因子 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 进入 A 路（V 偏振片）与 B 路（H 偏振片）。每个探测器从每路各得强度 $\frac{I_0}{4}$（$I_0\propto|E_0|^2$）。双束干涉光强 $I=I_1+I_2+2\mathrm{Re}\,(\widetilde{E}_1\widetilde{E}_2^*)$，干涉项为

$$I_A^{\text{干涉}}=\frac{I_0}{2}\cos\left[k(l_1-l_2)+\phi_A\right]\equiv\frac{I_0}{2}\cos\Delta\phi,$$

$$I_B^{\text{干涉}}=\frac{I_0}{2}\cos\left(\Delta\phi-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{I_0}{2}\sin\Delta\phi,$$

其中 $\Delta\phi=k(l_1-l_2)+\phi_A$ 包含两路光程差相位与全部器件偏振相位之和（B 路中光路1经波片多出的 $\pi/2$ 使两探测器信号恰好正交）。

(8) 第（7）问：由两光强定出 $\Delta\phi$ 由第（6）问，

$$\frac{2I_A^{\text{干涉}}}{I_0}=\cos\Delta\phi,\qquad \frac{2I_B^{\text{干涉}}}{I_0}=\sin\Delta\phi.$$

先由两路单独存在的光强（遮挡一路测得 $I_0/4$ 各值）定标 I_0，再计算

$$\Delta\phi=\arg\left(I_A^{\text{干涉}}+iI_B^{\text{干涉}}\right)=\mathrm{atan2}\left(2I_B^{\text{干涉}},\,2I_A^{\text{干涉}}\right),$$

由于同时知道正弦与余弦的数值，象限唯一确定，可直接得到 $-\pi<\Delta\phi\le\pi$ 的确切值，无需观察条纹吞吐。这就是四象限（正交相位）干涉仪的优点：A、B 两路信号互为正交分量。

(9) 易错提示 （i）（1.2）若只比较 $r=t=\sqrt{2}/2$ 的模而忘记能量守恒对相位的要求，得不到 $\pi/2$；（ii）第（6）问干涉项系数是 $I_0/2$ 而非 I_0：每个探测器从每路只分到 $I_0/4$；（iii）矩阵连乘时各器件矩阵必须写在各自光束的（P，S）基下，基随传播方向改变。

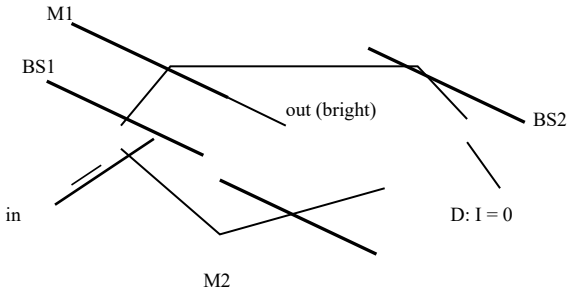


图3 本站绘制：马赫-曾德尔干涉仪，暗端口 D 无光，能量全部由另一端口射出

本题为约定敏感题：反射/透射矩阵的整体相位与 S 分量是否变号取决于图3b 的基矢取向，本站采用正文所述约定；若采用等价约定，第（6）问中 $\Delta\varphi$ 的参考点整体平移，但 A、B 两路信号互为正交（相差 $\pi/2$）的结论不变。

4. 计算题 · 70分

> **答案**　(1.1) $R(\phi)=\dfrac{g\tan\phi}{\Omega^2}+\dfrac{L}{2}\sin\phi$　(1.2) $N_{内}=\dfrac{Mg}{2}-\dfrac{Mgr\tan\phi}{d}$，$N_{外}=\dfrac{Mg}{2}+\dfrac{Mgr\tan\phi}{d}$　(2) $a(\theta)=\dfrac{MLg\sin\theta}{ML\cos\theta+2r(4m+M)}$，$\tau(\theta)=-\dfrac{(4m+M)rMLg\sin\theta}{ML\cos\theta+2r(4m+M)}$　(3) $0<M'<M$，$\omega=\sqrt{\dfrac{12rg(4m+M)^2(M-M')}{M'L(16m+M)\,[ML+2r(4m+M)]}}$

详解

(1) 第（1.1）问：C 点轨迹半径 $R(\phi)$ 车轮质量不计，系统即为细杆。在随 C 转动的参考系（角速度 Ω）中，杆受重力（作用于质心，高度 $\frac{L}{2}\cos\phi$、向内侧偏 $\frac{L}{2}\sin\phi$）与离心力 $M\Omega^2R_{CM}$，其中质心到转轴的距离 $R_{CM}=R-\frac{L}{2}\sin\phi$。杆绕 C 无摩擦转动且倾角不变，对 C 的力矩平衡：重力矩（使杆向内倒）与离心力矩（使杆扶正）抵消：

$$Mg\frac{L}{2}\sin\phi=M\Omega^2\left(R-\frac{L}{2}\sin\phi\right)\frac{L}{2}\cos\phi.$$

解出

$$R(\phi)=\frac{g\tan\phi}{\Omega^2}+\frac{L}{2}\sin\phi.$$

本站校验：$\phi\to0$ 时 $R\to\frac{g}{\Omega^2}\phi\to0$，即低速时几乎原地转小圈；$\Omega$ 增大所需半径减小，合理。

(2) 第（1.2）问：左右车轮的正压力 竖直方向：车轮无质量，$N_{左}+N_{右}=Mg$。杆的质心偏向弯道内侧，而杆通过轮轴中心 C（高度 r）把水平方向的反作用力 $M\Omega^2R_{CM}$（方向向外）作用在轮轴上；以两接地点连线为轴取矩（摩擦力与支持力均过该线，不产生力矩），只有该作用在高度 r 处的向外力和两支持力贡献力矩：

$$\frac{d}{2}\left(N_{右}-N_{左}\right)=r\,M\Omega^2R_{CM}.$$

利用（1.1）$\Omega^2R_{CM}=g\tan\phi$（结果不含 R）：

$$N_{右}-N_{左}=\frac{2Mgr\tan\phi}{d},\qquad N_{左}+N_{右}=Mg.$$

取左为弯道内侧，本站解得

$$N_{内}=N_{左}=\frac{Mg}{2}-\frac{Mgr\tan\phi}{d},\qquad N_{外}=N_{右}=\frac{Mg}{2}+\frac{Mgr\tan\phi}{d}.$$

内侧车轮卸载、外侧加载。保持接触要求 $\tan\phi\le\dfrac{d}{2r}$。

(3) 第（2）问：扭矩 $\tau(\theta)$ 与质心加速度 $a(\theta)$ 两轮与轮轴刚性连接，整体绕轮轴转动，转动惯量为两个边缘分布车轮之和 $I=2mr^2$。设 C 的加速度为 a（前进方向为正），车轮角加速度 $\ddot\varphi=-a/r$（纯滚动，图4c 中扭矩正方向为逆时针）。对杆（在 C 的平动加速系中，惯性力 $-Ma$ 加在质心）：

$$\frac{ML^2}{3}\ddot\theta=Mg\frac{L}{2}\sin\theta-Ma\frac{L}{2}\cos\theta+\tau_{杆},\qquad \tau_{杆}=-\tau\quad(\text{发动机对轮轴施 }\tau\text{，反作用在杆上}).$$

对轮轴系统：水平方向摩擦力 $f=(2m)a+F_{杆\to轴,x}$，且杆反作用力的水平分量为 $-M\left[a+\frac{L}{2}\cos\theta\,\ddot\theta\right]$；转动方程

$$2mr^2\ddot\varphi=\tau+rf\quad\Rightarrow\quad -2mar=\tau+rf.$$

要 θ 保持不变（$\ddot\theta=0$）：联立三式。杆方程给 $\tau=M\frac{L}{2}(a\cos\theta-g\sin\theta)$；代入轮方程 $-2mar=\tau+r(2m+M)a$ 得 $\tau=-ra(4m+M)$。两式相等：

$$-ra(4m+M)=\frac{ML}{2}(a\cos\theta-g\sin\theta)\;\Rightarrow\;a\left[\frac{ML}{2}\cos\theta+r(4m+M)\right]=\frac{MLg}{2}\sin\theta.$$

本站解得

$$a(\theta)=\frac{MLg\sin\theta}{ML\cos\theta+2r(4m+M)},\qquad \tau(\theta)=-\frac{(4m+M)rMLg\sin\theta}{ML\cos\theta+2r(4m+M)}.$$

$\theta>0$（前倾）时 $a>0$（向前加速）、扭矩为负（顺时针驱动车轮前滚），自洽。

(4) 第（3）问：M' 的条件与小振动角频率 细杆质量变为 M' 后，扭矩律与各参量仍取第（2）问值（含原杆质量 M），但动力学方程中改用 M'：

$$\frac{M'L^2}{3}\ddot{\theta} = M'g\frac{L}{2}\sin\theta - M'a\frac{L}{2}\cos\theta + \tau(\theta), \qquad -ra(4m+M) = \tau(\theta) + rM\frac{L}{2}\cos\theta\,\ddot{\theta}.$$

记 $\kappa = -\tau'(0) = \dfrac{(4m+M)rMLg}{ML+2r(4m+M)}$（线性化 $\tau \approx -\kappa\theta$），在 $\theta = 0$ 附近线性化（$\sin\theta \approx \theta, \cos\theta \approx 1$）。由第二式 $a = \dfrac{\kappa\theta - rM\frac{L}{2}\ddot{\theta}}{r(4m+M)}$，代入第一式整理：

$$\frac{M'L^2(16m+M)}{12(4m+M)}\ddot{\theta} = -[\kappa(1+\frac{M'L}{2r(4m+M)}) - \frac{M'gL}{2}]\theta.$$

这是简谐振动方程，θ 与 C 以同一频率振动，要求圆频率的平方为正：分子 $\kappa(1+\dfrac{M'L}{2r(4m+M)}) - \dfrac{M'gL}{2} > 0$。代入 κ 化简（本站逐项回代核对）：

$$\omega^2 = \frac{12rg(4m+M)^2(M-M')}{M'L(16m+M)[ML+2r(4m+M)]},$$

故条件为

$$0 < M' < M, \qquad \omega = \sqrt{\frac{12rg(4m+M)^2(M-M')}{M'L(16m+M)[ML+2r(4m+M)]}}.$$

校验：$M' \to M$ 时 $\omega \to 0$（扭矩律恰好与原质量匹配，系统退化为随遇平衡），合理；M' 越小回复越强、频率越高，合理。

(5) 易错提示 （i）扭矩是杆与轮轴之间的内力，作用与反作用分别写进杆与轮的方程，漏掉反作用是最常见错误；（ii）第（1.2）问力矩轴必须取在地面接触线上，且水平反作用力作用在高度 r 处；（iii）第（3）问扭矩律中的 M 保持第（2）问值，只有动力学方程中的质量换成 M'，二者混淆会得出错误条件。

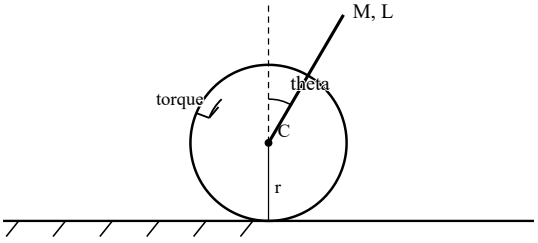


图4 本站绘制：侧视图，车轮半径 r、圆心 C，细杆前倾角 θ，逆时针为扭矩正方向

第（2）问 τ(θ) 的正负号取决于图4c 的逆时针约定：前倾加速时车轮被顺时针驱动，故 τ 为负；若试卷以顺时针为正，则 τ(θ) 表达式整体变号、α(θ) 不变。

5. 计算题 · 50分

答案 （1）$\dfrac{dp}{dr} = -\dfrac{Gm\rho}{r^2}$，$\dfrac{dm}{dr} = 4\pi r^2\rho$（2）$p(0) \geq \dfrac{GM^2}{8\pi R^4}$（3）$E_g = -12\pi\int_0^R p(r)r^2\,dr$（4）$\gamma > \dfrac{4}{3}$（5）$\gamma = \dfrac{4}{3}$（6）$\dfrac{dT}{dr} = -\dfrac{3\kappa\rho L}{16\pi ca\,r^2T^3}$（7）$L(R) \leq \dfrac{4\pi GMc}{\kappa(R)}$

详解

(1) 第（1）问：静力平衡微分方程 半径 r 处厚 dr 的球壳内物质受内压与引力平衡：$[p(r)-p(r+dr)]\cdot 4\pi r^2 = \dfrac{Gm(r)}{r^2}\rho(r)\cdot 4\pi r^2 dr$，得

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2}, \qquad \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2\rho(r).$$

(2) 第（2）问：不等式的证明与中心压强下界 求导验证：

$$\frac{d}{dr}\left[p+\frac{Gm^2}{8\pi r^4}\right]=\frac{dp}{dr}+\frac{G}{4\pi}\left(\frac{mm'}{r^4}-\frac{2m^2}{r^5}\right).$$

用 $m'=4\pi r^2\rho$：$\dfrac{G}{4\pi}\dfrac{mm'}{r^4}=\dfrac{Gm\rho}{r^2}$，恰好与 $\dfrac{dp}{dr}=-\dfrac{Gm\rho}{r^2}$ 抵消，剩

$$\frac{d}{dr}\left[p(r)+\frac{Gm^2(r)}{8\pi r^4}\right]=\frac{G}{4\pi}\left(-\frac{2m^2}{r^5}\right)=-\frac{Gm^2}{2\pi r^5}<0.$$

不等式得证。中心压强：$p(0)=p(R)+\int_0^R\dfrac{Gm\rho}{r'^2}dr'=\dfrac{G}{4\pi}\int_0^R\dfrac{m\,dm/dr}{r^4}\,dr$。利用 $m\,m'=\frac{1}{2}(m^2)'$ 并分部积分（$r\to0$ 时 $m\propto r^3$，边界项 $m^2/r^4\to0$）：

$$p(0)=\frac{G}{4\pi}\left[\frac{M^2}{2R^4}+\int_0^R\frac{m^2}{r^5}dr\right]\geq\frac{GM^2}{8\pi R^4}.$$

本站解得：恒星中心压强下界为 $p(0)\geq\dfrac{GM^2}{8\pi R^4}$。

(3) 第（3）问：引力势能 把恒星按球壳从无穷远 assembling：半径 r 处薄壳 $dm=4\pi r^2\rho\,dr$ 在已有质量 $m(r)$ 的引力场中的势能 $dE_g=-\dfrac{Gm\,dm}{r}$，故

$$E_g=-\int_0^R\frac{Gm(r)}{r}\,4\pi r^2\rho\,dr=-4\pi\int_0^R Gm\rho\,r\,dr.$$

用 $\dfrac{dp}{dr}=-\dfrac{Gm\rho}{r^2}$ 即 $Gm\rho\,r\,dr=-r^3\dfrac{dp}{dr}dr$：

$$E_g=4\pi\int_0^R r^3\frac{dp}{dr}dr=4\pi\left[R^3p(R)-\int_0^R 3r^2p\,dr\right]=-12\pi\int_0^R p(r)r^2\,dr$$

（表面 $p(R)=0$）。本站解得：$E_g=-12\pi\int_0^R p(r)r^2\,dr$。

(4) 第（4）问：不解体对 γ 的条件 总能量 = 引力势能 + 内能：

$$E=\int_0^R\frac{p}{\gamma-1}\,4\pi r^2dr-12\pi\int_0^R pr^2dr=4\pi\int_0^R pr^2\left[\frac{1}{\gamma-1}-3\right]dr.$$

若 $\gamma-1<3$，被积函数系数为正、$E>0$，系统可通过膨胀对外做功把全部静止物质散到无穷远而释放能量，恒星必然解体；不解体要求 $E<0$，即

$$\frac{1}{\gamma-1}<3\quad\Longleftrightarrow\quad\gamma>\frac{4}{3}.$$

（与 $p(r)$ 的具体分布无关。）

(5) 第（5）问：光子气体的绝热指数 局域热平衡光子气体：能量密度 $u=aT^4$（a 为辐射常数），光压 $p=\dfrac{1}{3}u$。按题给定义 $(\gamma-1)u=p$，得

$$\gamma-1=\frac{1}{3},\qquad\gamma=\frac{4}{3}.$$

(6) 第（6）问：温度分布的微分方程 先由题给的 Planck 谱与积分公式导出辐射常数：$u=\dfrac{8\pi h}{c^3}\int_0^\infty\dfrac{v^3dv}{e^{hv/kT}-1}=\dfrac{8\pi h}{c^3}\left(\dfrac{kT}{h}\right)^4\dfrac{\pi^4}{15}=aT^4$，

$$a=\frac{8\pi^5k^4}{15h^3c^3}.$$

半径 r 处辐射能流 $F=\dfrac{L(r)}{4\pi r^2}$。光子气体动量密度对应压强 $p_\gamma=\dfrac{aT^4}{3}$；原子物质以比例 $\kappa\rho\,dr$ 吸收光子，单位体积光子气体动量流失率（即原子所受光压反作用）为 $\dfrac{\kappa\rho F}{c}$。光子气体的动量守恒（其压强梯度被吸收抵消）：

$$\frac{dp_\gamma}{dr}=-\frac{\kappa(r)\rho(r)}{c}\cdot\frac{L(r)}{4\pi r^2}.$$

代入 $p_\gamma=\dfrac{aT^4}{3}$：

$$\frac{4aT^3}{3}\frac{dT}{dr}=-\frac{\kappa\rho L}{4\pi r^2c}\quad\Rightarrow\quad\boxed{\frac{dT}{dr}=-\frac{3\kappa(r)\rho(r)L(r)}{16\pi ca\,r^2T^3}}.$$

若要用 $m(r)$ 表示，可代入 $\rho=\dfrac{1}{4\pi r^2}\dfrac{dm}{dr}$。

(7) 第（7）问：表面光度的上界 原子物质的分压 p_a 满足（原子自身压强梯度 + 引力 + 光压反作用）：

$$\frac{dp_a}{dr} = -\rho\frac{Gm}{r^2} - \frac{\kappa\rho L}{4\pi r^2 c} \le 0.$$

题设 p_a 随 r 增大而减小，若在表面附近辐射对原子物质的向外推力超过引力，则 $\frac{dp_a}{dr} > 0$，与题设矛盾。故必须处处（尤其在 $r \to R$、$m \to M$ 处）

$$\frac{\kappa(R)L(R)}{4\pi R^2 c} \le \frac{GM}{R^2},$$

本站解得（爱丁顿光度）

$$L(R) \le \frac{4\pi GMc}{\kappa(R)}.$$

(8) 易错提示 （i）第（3）问常见错误是写成 $-\int Gm\,dm/r$ 后忘记用 $p(r)$ 表示，必须借 dp/dr 换元；（ii）第（4）问判据是总能量为负而非内能为正；（iii）第（7）问上界出现在 $r = R$ 处，因为那里光度最大而 enclosed 质量已达 M。

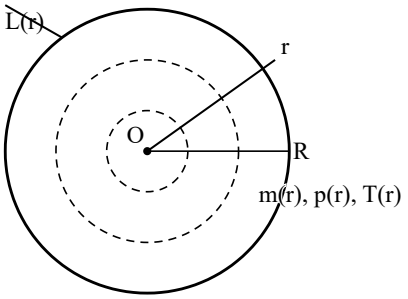


图5 本站绘制：球对称恒星，半径 R，球壳内质量 m(r)，压强 p(r)，光度 L(r)

第（4）问的判据推导只用了能量积分，与 p(r) 具体形式无关；第（6）问的辐射常数 α 须由题给的 Planck 谱积分自行导出。

6. 计算题 · 50分

答案 （1）$\omega_n = \frac{n\pi c}{a}$，$\frac{n\pi c}{L-a}$（2）$E = \frac{\pi\hbar c}{2}[\frac{1}{a} + \frac{1}{L-a}]\sum_{n=1}^{\infty} n$（发散）（4）$F = \frac{\pi\hbar c}{24}[\frac{1}{(L-a)^2} - \frac{1}{a^2}]$，指向 A（5）同一结果，与 f 无关

详解

(1) 第（1）问：允许的角频率 腔内驻波要求两端（导体板面为波节）距离为半波长的整数倍：$a = \frac{n\lambda}{2}$，即 $k_n = \frac{n\pi}{a}$，

$$\omega_n = ck_n = \frac{n\pi c}{a}, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

（A、B 之间）。同理 B、C 之间（间距 $L-a$）：

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{L-a}, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots .$$

(2) 第（2）问：A、C 间真空电磁场总能量 每个模式的零点能为 $\frac{1}{2}\hbar\omega$，两段腔求和：

$$E(a) = \frac{\hbar}{2}[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi c}{a} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi c}{L-a}] = \frac{\pi\hbar c}{2}[\frac{1}{a} + \frac{1}{L-a}]\sum_{n=1}^{\infty} n.$$

$\sum n$ 发散，故该表达式发散（如题提示所言不是有限的），物理上需要第（4）问的高频截断。

(3) 第（3）问：B 板受力的形式表达式 对 a 求导（B 板移动改变两腔长度）：

$$F_B = -\frac{\partial E}{\partial a} = \frac{\pi\hbar c}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n[\frac{1}{a^2} - \frac{1}{(L-a)^2}].$$

两个发散级数相减仍是发散的，说明在理想化模型下无法直接得到有限的力，这正是第（4）问要解决的发散问题；发散部分来自高频模式，而高频模式实际上不受板位置影响。

(4) 第（4）问：指数截断下的有限力 每个模式贡献改为 $\frac{1}{2}\hbar\omega\, e^{-\omega/\Lambda}$（$\Lambda a/c \gg 1$）。A、B 段：记 $x=\dfrac{\pi c}{a\Lambda}$，

$$E_{AB}=\frac{\pi\hbar c}{2a}\sum_{n=1}^{\infty} n\,e^{-nx}=\frac{\pi\hbar c}{2a}\cdot\frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}.$$

展开（用 $\dfrac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{12}+O(x^2)$）：

$$E_{AB}=\frac{\hbar\Lambda^2}{2\pi c}\,a-\frac{\pi\hbar c}{24a}+O\!\left(\frac{1}{\Lambda}\right).$$

同理 $E_{BC}=\dfrac{\hbar\Lambda^2}{2\pi c}(L-a)-\dfrac{\pi\hbar c}{24(L-a)}+O(1/\Lambda)$。求和后含 Λ^2 的项为 $\dfrac{\hbar\Lambda^2}{2\pi c}a+\dfrac{\hbar\Lambda^2}{2\pi c}(L-a)=\dfrac{\hbar\Lambda^2 L}{2\pi c}$，与 a 无关，对 a 求导即消失：

$$F_B=-\frac{\partial E}{\partial a}=\frac{\pi\hbar c}{24}\left[\frac{1}{(L-a)^2}-\frac{1}{a^2}\right].$$

由于 $a<L-a$，$F_B<0$：B 板被吸向较近的 A 板，合力大小为 $\dfrac{\pi\hbar c}{24}\left[\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{(L-a)^2}\right]$，方向指向 A。取 $L\to\infty$：$F_B=-\dfrac{\pi\hbar c}{24a^2}$，即一维单偏振模型的卡西米尔吸引公式。

(5) 第（5）问：一般截断函数，结果不依赖 f 模式贡献 $\dfrac{1}{2}\hbar\omega f\!\left(\dfrac{\omega}{\pi\Lambda}\right)$。A、B 段（记 $x=\dfrac{c}{a\Lambda}$，$F(n)=nf(nx)$）：用题给欧拉-麦克劳林公式取前两项

$$\sum_{n=1}^{\infty}F(n)=\int_0^{\infty}F(n)\,dn+\frac{F(\infty)-F(0)}{2}+\frac{F'(\infty)-F'(0)}{12}+\cdots.$$

其中 $F(0)=0\cdot f(0)=0$；$F'(n)=f(nx)+nxf'(nx)$，$F'(0)=f(0)=1$，$F'(\infty)=0$（条件 B）；而

$$\int_0^{\infty}nf(nx)\,dn=\frac{1}{x^2}\int_0^{\infty}uf(u)\,du\equiv\frac{C_1}{x^2}$$

（C_1 为只与 f 有关的常数）。于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}nf(nx)=\frac{C_1}{x^2}-\frac{1}{12}+\cdots,\qquad E_{AB}=\frac{\pi\hbar c}{2a}\left[\frac{C_1a^2\Lambda^2}{c^2}-\frac{1}{12}\right]+\cdots,$$

即 $E_{AB}=\dfrac{\pi\hbar C_1\Lambda^2}{2c}a-\dfrac{\pi\hbar c}{24a}+\cdots$。与第（4）问完全平行：$\Lambda$ 相关项在 $E_{AB}+E_{BC}$ 中正比于 L、与 a 无关；a 相关的有限部分 $-\dfrac{\pi\hbar c}{24a}-\dfrac{\pi\hbar c}{24(L-a)}$ 中的 $-\dfrac{1}{12}$ 来自 $F'(0)=f(0)=1$，与 f 的具体形状无关。故

$$F_B=\frac{\pi\hbar c}{24}\left[\frac{1}{(L-a)^2}-\frac{1}{a^2}\right],$$

与第（4）问相同，不依赖 $f(x)$ 的具体形式。

(6) 易错提示 （i）第（4）问必须把两段腔的能量同时写出：Λ^2 项靠 $a+(L-a)=L$ 才相互抵消，只算一段会得到发散的力；（ii）求和展开 $\sum ne^{-nx}=1/x^2-1/12+\cdots$ 中的 $-1/12$ 可用题给欧拉-麦克劳林公式取前两项得到，注意 $F'(0)=f(0)=1$ 的贡献；（iii）力的正负号要明确：a 增大对应 B 向 C 移动，本站以指向 C 为正。

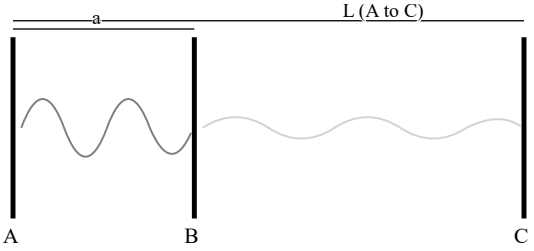


图6 本站绘制：三块平行导体板 A、B、C，AB 间距 a，AC 间距 L，板间形成驻波

本模型只含一种偏振、一维传播，得到的系数（$\pi\hbar c/24$）与三维真实卡西米尔力不同，属题设简化模型的结果。