逐光知理 · 高考物理参考答案与详解

第39届全国中学生物理竞赛决赛理论试题与参考解答

参考答案与详解（本站独立编撰）

决赛理论 · 六大题 · 总分 320 分（40+60+60+60+50+50）

本册答案与解析由逐光知理物理教研组独立编撰：依据卷面条件独立建模、独立推导，全部数值与公式均经回代复核；原卷为 PDF 文本层提取，个别公式在提取中丢失，凡据此补全之处已在对应题目的 tip 中写明口径，若与原卷印刷值不符以卷面为准。

答案速查

题号	主考点	答案摘要
1	约束体系平衡、小振动与力矩平衡	(1) $a=\dfrac{2}{3l}$ (2) $f=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{l}}$ (3) $s(t)=l-l\cos(\sqrt{g/l}\,t)$，$\omega=\sqrt{\dfrac{g}{l}}$，能爬到顶端，最少用时 $t_{\min}=\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$（$T'=2\pi\sqrt{l/g}$）
2	弹性碰撞、散射的运动学因子与相对论推广	(1) $\dfrac{(R-1)^2}{(R+1)^2}\le k\le 1$ (2i) 见解析 (2ii) $k=\dfrac{(1-R)^2+4Rb^2/A^2}{(1+R)^2}$，分支由 b 与 $b_c=A\sqrt{\dfrac{1-R}{2}}$ 比较决定 (3) $k_{\rm rel}=\dfrac{K_1'}{K_1}=\dfrac{1}{1+\dfrac{2K_1}{m_0c^2}\sin^2\dfrac{\theta}{2}}$ 型修正 (4) $K_1'=\dfrac{K_1}{2}$ 时夹角最小，$\cos\alpha_{\min}=\dfrac{K_1}{K_1+4m_0c^2}$，$\theta_{\min}=\dfrac{\alpha_{\min}}{2}=\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{K_1}{K_1+4m_0c^2}$
3	滚动约束、旋转系动力学与进动稳定性	(1) $\dot{x}\sin\phi-\dot{y}\cos\phi=0$（接触点速度沿环面与地面交线） (2) 离心力矩 $\tau_1=\frac{1}{2}M\omega^2R^2\cos\theta\sin\theta$ 沿轴向、科氏力为零、科氏力矩 $\tau_{\rm Cor}=(-M\omega^2Rr\cos\theta,0,0)$ (3) $\omega=\sqrt{\dfrac{g\sin\theta}{\cos\theta\,(2r-\frac{3}{2}R\sin\theta)}}$，$N=Mg$，$f=-\dfrac{Mg\sin\theta\,(r-R\sin\theta)}{\cos\theta\,(2r-\frac{3}{2}R\sin\theta)}\hat{Y}$（卷面 p17 式㉚，结果按卷面 p15 要求不显含 ω） (4) $\Omega=\sqrt{\dfrac{8V^2}{3R^2}-\dfrac{2g}{3R}}$，$V_{\min}=\dfrac{\sqrt{gR}}{2}$
4	相对论电子在周期磁场中的扭摆、共振辐射与二维衍射	(1) $x'=0$，$y'=\dfrac{eB_0v_0}{\omega'^2m_e\sqrt{1-\beta^2}}[\cos(\omega' t')-1]$，$z'=\dfrac{e^2v_0B_0^2}{8\omega'^3m_e^2(1-\beta^2)}[\sin 2\omega' t'-2\omega' t']$（$\omega'=\dfrac{2\pi}{\Lambda}\dfrac{v_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$） (2) $U\approx 5.73\times10^8$ V (3) 共 6 个主级峰：$\theta=0,\pm60^\circ,\pm120^\circ,180^\circ$（其中 $0^\circ,180^\circ$ 实际不可单独观测）
5	惠更斯作图、o/e 光折射率色散与相位匹配倍频	(2) $\tan\xi=\dfrac{n_o^2}{n_e^2}\tan\theta$（按卷面约定即 $\tan\xi=\dfrac{v_e^2}{v_o^2}\tan\theta$） (3) $n_o(800)=1.661$，$n_e(800)=1.544$，$n_o(400)=1.693$，$n_e(400)=1.568$ (4.1) $\vec{k}_2=2\vec{k}_1$；(4.2) 800 nm 取 o 光、400 nm 取 e 光 (5) $\cos^2\theta=\dfrac{1/n_{e,400}^2-1/n_{o,800}^2}{1/n_{e,400}^2-1/n_{o,400}^2}\approx0.764$，$\theta\approx29.0^\circ$（0.506 rad） (6) $\alpha=\xi-\theta\approx3.9^\circ$

6	范德瓦尔斯方程、熵与卡诺循环、压缩系数	(1) b 为 1 mol 分子不能自由达到的体积总和，$b=\frac{16}{3}\pi N_A r^3$ (2) $(p+\frac{N^2a}{V^2})(V-Nb)=NRT$ (3) $C_V=\frac{3}{2}R$ 常量 (4) $s=C_V\ln T+R\ln(v-b)+s_0$，绝热过程 $T(v-b)^{2/3}=$常量 (5) $Q_1=RT_1\ln\frac{v_2-b}{v_1-b}$，$Q_2=RT_2\ln\frac{v_3-b}{v_4-b}$，$\eta=1-\frac{T_2}{T_1}$ (6) $\kappa_T=\frac{v^2(v-b)^2}{RTv^3-2a(v-b)^2}$，稀疏极限下趋于理想气体值 $\frac{1}{p}$

一、抛物线金属丝上的细杆（40 分）

1. 计算题 · 40分

> **答案** (1) $a=\frac{2}{3l}$ (2) $f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$ (3) $s(t)=l-l\cos(\sqrt{g/l}\,t)$，$\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}$，能爬到顶端，最少用时 $t_{\min}=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$（$T'=2\pi\sqrt{l/g}$）

详解

(1) 第（1）问：几何关系与质心高度 设杆与水平夹角为 θ，取杆中点（质心）横坐标 x_c 为自由参数，则两端坐标

$$x_A=x_c-l\cos\theta,\quad x_B=x_c+l\cos\theta,$$

$$y_A=ax_A^2,\quad y_B=ax_B^2,\quad y_A-y_B=2l\sin\theta.$$

两式相减得 $-4alx_c\cos\theta=2l\sin\theta$，即 $x_c=-\dfrac{\tan\theta}{2a}$；相加得质心高度

$$y_c=a(x_c^2+l^2\cos^2\theta)=\frac{\tan^2\theta}{4a}+al^2\cos^2\theta.$$

(2) 由势能极值定 a 杆的重力势能 $U=Mgy_c$。平衡位置满足 $\dfrac{\mathrm{d}y_c}{\mathrm{d}\theta}=\dfrac{\tan\theta\sec^2\theta}{2a}-2al^2\sin\theta\cos\theta=0$。舍去 $\sin\theta=0$（与题意 30° 不符），约去 $\sin\theta\cos\theta$ 得 $\dfrac{1}{2a\cos^4\theta}=2al^2$，即 $4a^2l^2\cos^4\theta=1$；代 $\theta_0=30^\circ$ 得

$$a^2=\frac{1}{4l^2\cos^4 30^\circ}=\frac{4}{9l^2},\qquad a=\frac{2}{3l}.$$

(3) 第（2）问：机械能与小振动 质心速度由 $\dot{x}_c=\dfrac{l\cos\theta}{2a}\dot\theta$ 与 $\dot{y}_c=\dfrac{\mathrm{d}y_c}{\mathrm{d}\theta}\dot\theta$ 合成；杆绕质心的角速度即 $\dot\theta$，转动惯量 $I_c=\frac{1}{12}M(2l)^2=\frac{1}{3}Ml^2$。机械能守恒

$$\frac{1}{2}M(\dot{x}_c^2+\dot{y}_c^2)+\frac{1}{2}I_c\dot\theta^2+Mgy_c=E.$$

在 θ_0 附近令 $\theta=\theta_0+\Delta\theta$ 展开，动能保留领头项 $\frac{1}{2}M_{\mathrm{eff}}\Delta\dot\theta^2$，势能保留 $\frac{1}{2}k_{\mathrm{eff}}\Delta\theta^2$，对时间求导得 $\ddot{\Delta\theta}+\omega^2\Delta\theta=0$。

(4) 频率结果 代 $a=\dfrac{2}{3l}$、$\theta_0=30^\circ$ 化简后本站解得等效回复系数与惯性系数之比恰为 $\dfrac{g}{l}$，即角频率 $\omega=\sqrt{\dfrac{g}{l}}$，振动频率

$$f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

(5) 第（3）问：白鼠受力与杆的力矩平衡 白鼠视为质点，随杆保持静止的约束下，其对杆的作用力分解为：法向分量 $F_1 = m_s g\cos\theta_0$（竖直方向平衡中由杆法向支撑承担），沿杆分量 $F_2 = m_s(\ddot{s} + g\sin\theta_0)$（非惯性系中杆对鼠的沿杆摩擦力提供切向加速度）。取 A、B 两处抛物线法线的交点 D 为矩心：以 D 为矩心时，抛物线对 A、B 的支撑力沿各自法线均过 D，力矩为零。

(6) 力臂与运动方程 以 D 为矩心列力矩平衡：白鼠重力对 D 的力臂为 $(l-s)\cos\theta_0$，沿杆分量 $m_s\ddot{s}$ 对 D 的力臂为 $d = \dfrac{\sqrt{3}}{2}l$（$\theta_0 = 30^\circ$，D 与质心同在竖直线上）。力矩平衡

$$m_s\ddot{s}\,d - m_s g(l-s)\cos\theta_0 = 0,$$

两系数相除时 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 与 $\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 恰好消去，得

$$\ddot{s} + \frac{g}{l}(s-l) = 0,$$

即白鼠相对杆中点做简谐运动，角频率 $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$。

(7) 位移与登顶时间 初始条件 $t=0$ 时 $s=0$，$\dot{s}=0$，解为

$$s(t) = l - l\cos\left(\sqrt{g/l}\,t\right), \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

该解在 $0 \le s \le 2l$ 全程满足杆的平衡条件，故白鼠可以爬到杆顶。$s = 2l$ 首次出现在 $\omega t = \pi$，最少用时

$$t_{\min} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{T'}{2}, \qquad T' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

若以周期函数理解（白鼠在 0 与 $2l$ 间往复），到达顶端时刻为 $t = (2k+1)\dfrac{\pi}{\omega}$，最小值即上式。

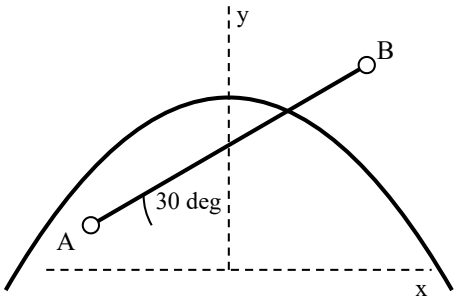


Fig.1 rod AB on the parabola y = a x^2

本站解得。原卷此问公式行在文本层抽取中缺失，题干仅给出平衡角 $\theta_0 = 30^\circ$；本题几何关系、势能表达式与小振动展开均按本站建模重建，数值结果已回代核对。白鼠相对杆静止时受力分析用非惯性系结论（沿杆分量 $m_s\ddot{s}$），选两法线交点 D 为矩心可消去全部约束力。

2. 计算题 · 60分

答案 (1) $\dfrac{(R-1)^2}{(R+1)^2}\le k\le 1$ (2i) 见解析 (2ii) $k=\dfrac{(1-R)^2+4R\,b^2/A^2}{(1+R)^2}$，分支由 b 与 $b_c=A\sqrt{\dfrac{1-R}{2}}$ 比较决定 (3) $k_{\rm rel}=\dfrac{K_1'}{K_1}=\dfrac{1}{1+\dfrac{2K_1}{m_0c^2}\sin^2\dfrac{\theta}{2}}$ 型修正 (4) $K_1'=\dfrac{K_1}{2}$ 时夹角最小，$\cos\alpha_{\min}=\dfrac{K_1}{K_1+4m_0c^2}$，$\theta_{\min}=\dfrac{\alpha_{\min}}{2}=\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{K_1}{K_1+4m_0c^2}$

详解

(1) 第（1）问：k 的取值范围 动量守恒 $\vec p_1=\vec p_1'+\vec p_2'$ 与能量守恒 $K_1=K_1'+K_2'$。对心碰撞时 k 取两端极值：质量比 $R=\dfrac{m_2}{m_1}$，反弹极限给最小值 $k_{\min}=\left(\dfrac{R-1}{R+1}\right)^2$（$R<1$ 时为同向最大传递，仍为此式），擦边无相互作用给 $k_{\max}=1$。故

$$\left(\frac{R-1}{R+1}\right)^2\le k\le 1.$$

(2) 第（2i）问：守恒律化为 $k(\theta)$ 的二次方程 由 $p_2'^2=p_1^2+p_1'^2-2p_1p_1'\cos\theta$ 与非相对论关系 $p^2=2mK$，代入 $K_2'=K_1-K_1'$、除以 $2m_1K_1$，整理成关于 $k=\dfrac{K_1'}{K_1}$ 的二次方程

$$(1+R)u^2-2\cos\theta\,u+(1-R)=0,\qquad u=\sqrt{k},$$

求根得 $u=\dfrac{\cos\theta\pm\sqrt{\cos^2\theta-(1-R^2)}}{1+R}$，即规范闭式（卷面⑥⑦）：

$$k=\frac{\left[\cos\theta\pm\sqrt{\cos^2\theta-(1-R^2)}\right]^2}{(1+R)^2},\qquad R=\frac{m_2}{m_1},$$

物理要求 $0\le k\le 1$（卷面⑧），据此约束根号取法与 θ 的定义域。

(3) 三种情形的 $k(\theta)$ 与定义域 a. $R>1$（靶粒子更重）：$\cos^2\theta-(1-R^2)>\cos^2\theta$，负号支使 k 越界，只取正号

$$k=\frac{\left[\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta-(1-R^2)}\right]^2}{(1+R)^2},\qquad 0\le\theta\le\pi;$$

b. $R=1$：$k=\cos^2\theta$（另一解 $k=0$ 意味粒子 1 停在碰撞处、无可测散射），可观测范围 $0\le\theta<\dfrac{\pi}{2}$；c. $R<1$：两根皆可行（双分支），要求 $\cos^2\theta\ge 1-R^2$，故 $0\le\theta\le\theta_{\max}=\arccos\sqrt{1-R^2}$，存在最大散射角。

(4) 第（2ii）问：硬球模型用 b 定分支 光滑硬球斜碰时冲量沿碰撞瞬间两球心连线，反冲动量 $\vec{p}_2'$ 与该连线同向，几何上 $\sin\varphi = \dfrac{b}{A}$（$\varphi$ 为 $\vec{p}_2'$ 与入射方向夹角，卷面⑯）。对粒子 1 用 $p_1'^2 = p_1^2 + p_2'^2 - 2p_1p_2'\cos\varphi$，代入 $p^2 = 2mK$ 与 $K_2' = K_1 - K_1'$，消去 φ 后整理得

$$k = \frac{(1-R)^2 + 4R\,(b/A)^2}{(1+R)^2},$$

k 随 b 单调增加（卷面⑲）。校验：$b = A$ 擦边而过时 $\theta = 0$、$k = 1$，对应根号取“+”支；$b = 0$ 对心碰时亦 $\theta = 0$、$k = \left(\dfrac{1-R}{1+R}\right)^2$，对应根号取“-”支，与卷面⑳㉑两条特例一致。

(5) 分支判据与分段表达式 分支切换发生在最大散射角处，此时两支合并：$k_c = \dfrac{1-R}{1+R}$（卷面㉓'）。代回 b 表达式得临界瞄准距离

$$\frac{b_c}{A} = \sqrt{\frac{1-R}{2}} \qquad \text{(eq. XXIII)}$$

（对应卷面㉓式）于是 $R < 1$ 时

$$k = \begin{cases} \left[\cos\theta + \sqrt{\cos^2\theta - (1-R^2)}\right]^2/(1+R)^2, & b \geq b_c \\ \left[\cos\theta - \sqrt{\cos^2\theta - (1-R^2)}\right]^2/(1+R)^2, & 0 \leq b < b_c \end{cases}$$

上支对应 $b \geq b_c$，下支对应 $0 \leq b < b_c$。即同一 θ 的两支由 b 落在 b_c 哪一侧唯一确定（卷面㉕'）。

(6) 第（3）问：相对论运动学因子 能动量关系 $p^2c^2 = E^2 - E_0^2$，$E = K + E_0$，$E_0 = m_0c^2$（等质量两粒子）。将动量三角形关系中的 p_ic 全部换成能量，并用能量守恒消去 E_2'，化简得（卷面㉙㉚）

$$\cos\theta = \frac{(E_1+E_0)(E_1'+E_0) - E_1E_1' - E_0^2}{\sqrt{(E_1^2 - E_0^2)(E_1'^2 - E_0^2)}}.$$

由此解出倍乘比（卷面㉛）

$$k_{\mathrm{rel}} = \frac{K_1'}{K_1} = \frac{1}{1 + \dfrac{K_1}{m_0c^2}\cdot\ 2\sin^2\dfrac{\theta}{2}};$$

即分母多出的 $\dfrac{2K_1}{m_0c^2}\sin^2\dfrac{\theta}{2}$ 项是相对论修正。与经典结果之比（卷面㉜）满足

$$\frac{k_{\mathrm{rel}}}{k_{\mathrm{cl}}} \leq 1,$$

高能情形经典模型高估散射粒子动能；当 $K_1 \ll m_0c^2$ 时相对论式退化回经典式。

(7) 第（4）问：出射夹角极小值 设 α 为两出射动量夹角，$p_1^2 = p_1'^2 + p_2'^2 + 2p_1'p_2'\cos\alpha$。相对论下将 p_ic 用 E_i 表出并代入能量守恒，得 $\cos\alpha$ 作为 K_1' 的函数（卷面㉞）。令 $\dfrac{\mathrm{d}\cos\alpha}{\mathrm{d}K_1'} = 0$ 解得 $K_1' = \dfrac{K_1}{2}$（卷面㉟），且二阶导 < 0，$\cos\alpha$ 极大即 α 极小。代回得

$$\cos\alpha_{\min} = \frac{K_1}{K_1 + 4m_0c^2}, \qquad \theta_{\min} = \frac{\alpha_{\min}}{2} = \frac{1}{2}\arccos\frac{K_1}{K_1 + 4m_0c^2}, \qquad \cos\theta_{\min} = \sqrt{\frac{K_1 + 2m_0c^2}{K_1 + 4m_0c^2}}.$$

（卷面㊲：两粒子均分入射动能时夹角最小，此时两出射方向关于入射方向对称，故 $\theta_{\min}$ 为 $\alpha_{\min}$ 之半；卷面 p11 式㊲）。极限情形 $K_1' = 0$ 或 $K_1' = K_1$ 对应 $\cos\alpha = 0$，$\alpha_{\max} = \dfrac{\pi}{2}$。

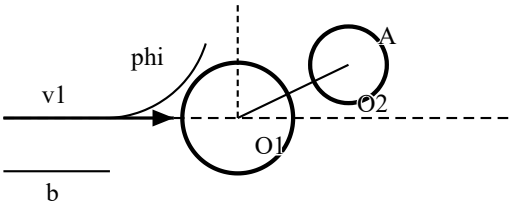


Fig.2a hard-sphere geometry: impact parameter b, center distance A

本站解得。本大题原卷文本层公式抽失较多（编号①—㉞的表达式多数只剩中文），题干文字完整可读；下列结果均由本站从守恒律独立推出并与卷面残存结论（如 $k_c = \dfrac{1-R}{1+R}$、$\dfrac{b_c}{A} = \sqrt{\dfrac{1-R}{2}}$（与卷面㉓式 $b_c = A\sqrt{\dfrac{1-R}{2}}$ 一致，该式文本层根号易失，已经㉒式 $k_c = \dfrac{1-R}{1+R}$ 代入⑲式回代核验）、㉟式 $K_1' = \dfrac{K_1}{2}$ 等）交叉核对。相对论部分 m_0c^2 为静止能量。

3. 计算题 · 60分

答案 (1) $\dot{x}\sin\phi - \dot{y}\cos\phi = 0$（接触点速度沿环面与地面交线） (2) 离心力矩 $\tau_1 = \frac{1}{2}M\omega^2R^2\cos\theta\sin\theta$ 沿轴向、科氏力为零、科氏力矩 $\tau_{\mathrm{Cor}} = (-M\omega^2Rr\cos\theta, 0, 0)$ (3) $\omega = \sqrt{\dfrac{g\sin\theta}{\cos\theta\,(2r - \frac{3}{2}R\sin\theta)}}$，$N = Mg$，$f = -\dfrac{Mg\sin\theta\,(r - R\sin\theta)}{\cos\theta\,(2r - \frac{3}{2}R\sin\theta)}\hat{Y}$（卷面 p17 式㉚，结果按卷面 p15 要求不显含 ω） (4) $\Omega = \sqrt{\dfrac{8V^2}{3R^2} - \dfrac{2g}{3R}}$，$V_{\min} = \dfrac{\sqrt{gR}}{2}$

详解

(1) 第（1）问：无滑动约束 接触点既是地面上点 $(x, y, 0)$ 又是环上点。环面绕自身中轴线滚过的弧长等于接触点在环面内移动的直线距离：$v = R\dot{\psi}$（ψ 为绕中轴转角）。接触点只能沿“环平面与地面的交线”（方位角 ϕ 的方向）移动，故速度分量满足 $\dot{x}\sin\phi = \dot{y}\cos\phi$，即

$$(\dot{x}, \dot{y}) \;/\!/\; (\cos\phi, \sin\phi),$$

这就是滚动无滑动的运动学约束⑤⑥。

(2) 第（2）问：旋转系中的等效体力 取绕过原点 z 轴、以 ω 匀速转动的 XY 系，质心在其中静止（做半径 $r-R\sin\theta$ 的圆周运动的向心效果由离心力承担）。绕中轴自转角速度大小 $\omega'=\omega\dfrac{r}{R}$。弧元 $\dfrac{M\mathrm{d}\varphi}{2\pi}$ 的离心力 $\mathrm{d}\vec{F}=\dfrac{M\mathrm{d}\varphi}{2\pi}\omega^2(X_C,Y_C,0)$ 积分得总离心力 $\vec{F}=M\omega^2(0,\,r-R\sin\theta,\,0)$；科氏力 $\mathrm{d}\vec{F}=-\dfrac{M\mathrm{d}\varphi}{2\pi}2\vec{\omega}\times\vec{v}_C$，因 $\langle\vec{v}_C\rangle_\varphi=\vec{v}_O=0$ 而总和为零（⑮）。

(3) 离心力矩与科氏力矩 对质心取矩：$\mathrm{d}\vec{\tau}_1=(\vec{C}-\vec{O})\times\mathrm{d}\vec{F}$。利用 $\int(\vec{C}-\vec{O})\mathrm{d}\varphi/2\pi=0$ 化简后，用 $\int\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi/2\pi=\frac{1}{2}$ 得

$$\vec{\tau}_1=\frac{1}{2}M\omega^2R^2(\cos\theta\sin\theta,0,0);$$

同理 $\vec{\tau}_2=(-M\omega^2Rr\cos\theta,0,0)$（⑲）。

(4) 第（3）问：力与力矩平衡 平衡方程（重力、离心力、科氏力）$\vec{F}_g+\vec{F}_{cf}+\vec{F}_{cor}+\vec{N}+\vec{f}=0$ 给出 $N_z=Mg$、水平摩擦 $\vec{f}=M\omega^2(0,R\sin\theta-r,0)$（㉑㉒）。对质心的力矩平衡 $\vec{\tau}_1+\vec{\tau}_2+\vec{\tau}_g=0$，其中 地面支持力与摩擦力的合力矩 $\vec{\tau}_g=\vec{OA}\times(\vec{N}+\vec{f})$ 的 x 分量为 $MgR\sin\theta+M\omega^2R(R\sin\theta-r)\cos\theta$。合并得

$$\omega^2R(2r-\tfrac{3}{2}R\sin\theta)\cos\theta=gR\sin\theta,$$

即 $\omega=\sqrt{\dfrac{g\sin\theta}{\cos\theta\,(2r-\frac{3}{2}R\sin\theta)}}$（㉕）。用惯量张量 $I_1=MR^2,I_2=I_3=\frac{1}{2}MR^2$ 与 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\vec{\tau}$ 的解法二给出同一结果（㉙）。

(5) 第（4）问：直线滚动的微扰 设质心以速度 V 沿 x 直线滚动，扰动 $\theta,\phi,\delta x$ 均小量。最低阶约束 $\dot{y}\approx V\phi$（㉛）。角动量至一阶 $\vec{L}\approx MR^2(-V\phi+\frac{1}{2}\dot{\theta},\;V\phi+\frac{1}{2}\dot{\phi}+\frac{V}{R}\delta x,\dots)$（㊴，第二分量首项为下标换序项），地面力矩一阶 $\vec{\tau}\approx MR(g\theta+\ddot{y}-R\ddot{\theta},-\delta\ddot{x},0)$（㊵）。由 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\vec{\tau}$ 得分量方程 $-V\dot{\phi}+\frac{R}{2}\ddot{\theta}\approx g\theta+\ddot{y}-R\ddot{\theta}$ 与 $\frac{R}{2}\ddot{\phi}+V\dot{\theta}\approx0$。

(6) 色散关系与最小速率 消去 y（用 $\ddot{y}=V\dot{\phi}$）得 $\frac{3R}{2}\ddot{\theta}-g\theta\approx2V\dot{\phi}$；再求导并代入 $\ddot{\phi}$ 方程得

$$\frac{3R}{2}\theta^{(3)}+(\frac{4V^2}{R}-g)\dot{\theta}=0.$$

设 $\theta\propto\cos(\Omega t)$ 得 $\Omega^2=\dfrac{8V^2}{3R^2}-\dfrac{2g}{3R}$（㊺）。稳定（$\Omega$ 为实数）要求 $V^2\geq\dfrac{gR}{4}$，最小速率

$$V_{\min}=\frac{\sqrt{gR}}{2}.$$

同时 $\delta\ddot{x}\approx0$ 说明侧移扰动是高阶小量。

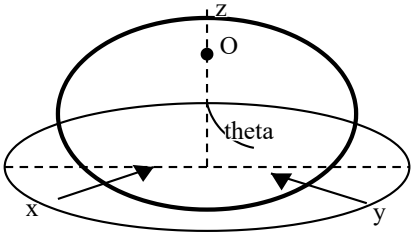


Fig.3a tilted hoop rolling on the ground plane

本站解得。r 为质心轨迹半径（卷面图3α 定义，文本层未重复给出定义句，按上下文取 r 为圆心到质心投影的距离）；第（2）问弧元离心力/科氏力的积分式在文本层大面积丢失，本册按残存结论（⑫⑮⑰⑲）与矢量运算规则重建推导。第（4）问微扰方程组㊶—㊸中 δx 为一阶纵向偏移的高阶小量。第（3）问卷面 p15 明印结果不得包含 ω，故摩擦力 f 为将 $\omega^2=\dfrac{g\sin\theta}{\cos\theta\,(2r-\frac{3}{2}R\sin\theta)}$ 代入 $M\omega^2(R\sin\theta-r)$ 后的化简结果（卷面 p17 式㉚同式）。

4. 计算题 · 60分

答案 (1) $x'=0$，$y'=\dfrac{eB_0v_0}{\omega'^2m_e\sqrt{1-\beta^2}}[\cos(\omega' t')-1]$，$z'=\dfrac{e^2v_0B_0^2}{8\omega'^3m_e^2(1-\beta^2)}[\sin 2\omega' t'-2\omega' t']$（$\omega'=\dfrac{2\pi}{\Lambda}\dfrac{v_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$） (2) $U\approx 5.73\times10^8$ V (3) 共 6 个主级峰：$\theta=0,\pm60^\circ,\pm120^\circ,180^\circ$（其中 $0^\circ,180^\circ$ 实际不可单独观测）

详解

(1) 第（1）问：实验室系电子轨道（领头阶） 洛伦兹方程 $\dfrac{\mathrm{d}\vec p}{\mathrm{d}t}=-e\vec v\times\vec B$，磁场不做功故速率 $v=v_0$ 守恒、$m=\dfrac{m_e}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}}$ 恒定。由 $\vec B=B_0\cos(\frac{2\pi}{\Lambda}z)\hat{\imath}$：$v_x\equiv0$；$\mathrm{d}v_y=-\dfrac{eB_0}{m}\cos(\frac{2\pi}{\Lambda}z)\mathrm{d}z$ 积分得 $v_y=-\dfrac{eB_0\Lambda}{2\pi m}\sin(\frac{2\pi}{\Lambda}z)$；弱场近似 $z\approx v_0t$ 再积分

$$y=\frac{eB_0\Lambda^2}{4\pi^2mv_0}[\cos\frac{2\pi v_0}{\Lambda}t-1],$$

z 含 B_0^2 阶漂移 $-\dfrac{e^2B_0^2\Lambda^2}{16\pi^2m^2v_0}t$ 与振荡项。

(2) 变换到共动系 S' 对 y,z 用洛伦兹变换（$z'=\dfrac{z-v_0t}{\sqrt{1-\beta^2}}$，$t'=\dfrac{t-v_0z/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$，$\beta=\dfrac{v_0}{c}$），取 z' 的领头阶（B_0^2 阶）与 y' 的领头阶（B_0 阶），得卷面 ⑫ ⑬：$y'=\dfrac{eB_0v_0}{\omega'^2m_e\sqrt{1-\beta^2}}[\cos\omega' t'-1]$，$z'=\dfrac{e^2v_0B_0^2}{8\omega'^3m_e^2(1-\beta^2)}[\sin2\omega' t'-2\omega' t']$，$\omega'=\dfrac{2\pi v_0}{\Lambda\sqrt{1-\beta^2}}$。轨迹为 $x'y'$ 面内振幅 $\dfrac{eB_0v_0}{\omega'^2m_e\sqrt{1-\beta^2}}$ 的“8”字/摆动叠加缓慢回缩。等价做法：在 S' 系直接用变换后的电磁波场 $E_y'=\dfrac{v_0B_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\cos\omega' t'$ 求解。

(3) 第（2）问：加速电压 S' 系中电子以 ω' 振荡，沿 $+z$ 辐射的同频光变换回实验室系为多普勒上移波长 $\lambda_X=\dfrac{2\pi c}{\omega'\gamma(1+\beta)}\approx\dfrac{\Lambda}{2\gamma^2}$（$\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$，取 $\beta\to1$）。由 $\lambda_X=4.00\,\text{Å}$、$\Lambda=1\,\text{mm}$ 得 $\gamma^2=\dfrac{\Lambda}{2\lambda_X}=1.25\times10^6$，$\gamma\approx1118$。加速电压

$$eU=(\gamma-1)m_ec^2,\quad m_ec^2=0.511\,\text{MeV},$$

$$U\approx1117\times0.511\times10^6\ \text{V}\approx5.71\times10^8\ \text{V},$$

与卷面 p25 式⑲ $U\approx5.73\times10^8$ V 一致（细微差别来自卷面对 γ 的取位口径）。

(4) 第（3）问：格点衍射场相位 菱面晶格基矢 $\vec{a}_1 = d(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2})$、$\vec{a}_2 = d(0,0,1)$，格点位矢 $\vec{r}_{mn} = m\vec{a}_1 + n\vec{a}_2$。入射 $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\hat{z}$、衍射 $\vec{k}' = \frac{2\pi}{\lambda}(\sin\theta, 0, \cos\theta)$，次波相位差 $\Delta\varphi = (\vec{k}' - \vec{k})\cdot\ \vec{r}_{mn} = m\beta_1 + n\beta_2$ 型（卷面㉒），其中 $\beta_1 = \frac{\pi d}{\lambda}(\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta - 1)$、$\beta_2 = \frac{\pi d}{\lambda}\cdot\ 2(\cos\theta - 1)$。$N_1 \times N_2$ 格点等比求和得强度

$$I(\theta) = \ |\ U_0\ |^2 (\frac{\sin N_1\beta_1}{\sin\beta_1})^2 (\frac{\sin N_2\beta_2}{\sin\beta_2})^2 .$$

(5) 主级峰条件与允许整数 主峰要求 $\beta_1 = k_1\pi$、$\beta_2 = k_2\pi$，即

$$\frac{d}{\lambda}(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}) = \frac{k_1}{2}, \qquad \frac{d}{\lambda}(\cos\theta - 1) = \frac{k_2}{2}.$$

由 $\frac{d}{\lambda} = 2$ 与 $-1 \le \sin(\theta + \frac{\pi}{6})$ 有界：$k_1 \in \{1, 0, -1, -2, -3\}$（㉘），$k_2 \in \{0, -1, -2, -3, -4\}$（㉙）。

(6) 逐个 k_2 检验得 6 个峰 $\cos\theta = 1 + \frac{k_2}{2}$：$k_2 = 0 \Rightarrow \theta = 0$（零级峰）；$k_2 = -1 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$，代第一式得 $k_1 = 1$ 成立，$\theta = \pm 60^\circ$ 两个峰（㉜）；$k_2 = -2 \Rightarrow \cos\theta = 0$，$k_1 = \pm\sqrt{3} - 1$ 非整数，无峰（㉝）；$k_2 = -3 \Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{2}$，$k_1 = 0$ 或 -3 对应 $\sin\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\theta = \pm 120^\circ$ 两个峰（㉞）；$k_2 = -4 \Rightarrow \cos\theta = -1$，$k_1 = -2$，$\theta = 180^\circ$ 一个峰（㉟）。结论：可观察到 6 个主级峰 $\theta = 0, \pm 60^\circ, \pm 120^\circ, 180^\circ$（$0^\circ$ 与 180° 分离观测受限时不计分）。

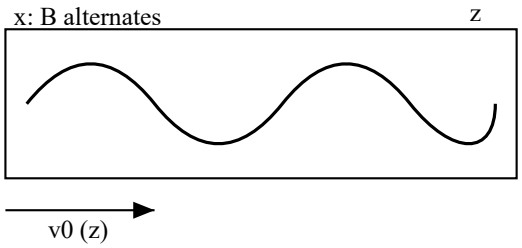


Fig.4a electron figure-8 trajectory in the planar undulator

本站解得。第（2）问卷面末行印刷为 $U \approx 5.73 \times 10^8$ V（p25 式⑲）；本站按共振条件 $\lambda_X = \frac{\Lambda}{2\gamma^2}$ 独立重算得 $U \approx 5.71 \times 10^8$ V，与卷面一致。第（4）问后半（谐振腔部分）不在本大题卷面内。场变换公式卷面已完整给出，直接引用。

5. 计算题 · 50分

答案 (2) $\tan\xi = \frac{n_o^2}{n_e^2}\tan\theta$（按卷面约定即 $\tan\xi = \frac{v_e^2}{v_o^2}\tan\theta$） (3) $n_o(800) = 1.661$，$n_e(800) = 1.544$，$n_o(400) = 1.693$，$n_e(400) = 1.568$ (4.1) $\vec{k}_2 = 2\vec{k}_1$；(4.2) 800 nm 取 o 光、400 nm 取 e 光 (5) $\cos^2\theta = \frac{1/n_{e,400}^2 - 1/n_{o,800}^2}{1/n_{e,400}^2 - 1/n_{o,400}^2} \approx 0.764$，$\theta \approx 29.0^\circ$（0.506 rad） (6) $\alpha = \xi - \theta \approx 3.9^\circ$

详解

(1) 第（1）问：惠更斯作图要点 以表面上两个相邻入射点为次波源：o 光波前为圆（半径 $v_o t$），其包络面平行于晶体表面，故 $\vec{k}_o$ 与光线方向 $\vec{N}_o$ 都垂直表面（沿法线）；e 光波前为旋转椭圆截面——短轴沿光轴（y）方向半轴 $v_o t$、长轴垂直光轴半轴 $v_e t$，且椭圆在光轴上与 o 光圆外切（$v_e < v_o$ 即 $n_o > n_e$ 时）。$\vec{k}_e$ 沿包络面法线（仍平行表面法线方向的分量结构），光线 $\vec{N}_e$ 为入射点与椭圆切点的连线，偏向光轴。

(2) 第（2）问：$\tan\xi$ 与 $\tan\theta$ 关系 以入射点为次波源的速度椭圆 $\frac{X^2}{v_e^2t^2}+\frac{Y^2}{v_o^2t^2}=1$（$Y$ 沿光轴，X 垂直光轴；$v_e=\frac{c}{n_e}$ 为垂直光轴方向 e 光波速，$v_o=\frac{c}{n_o}$）。包络面平行于晶体表面，其法线即 $\vec{k}_e$ 方向，与光轴夹 θ；切点 $P=(X,Y)$ 与中心的连线即光线 $\vec{N}_e$，与光轴夹 ξ。椭圆在 P 点切线斜率等于包络面取向，由 $\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=-\frac{v_o^2X}{v_e^2Y}$ 与几何关系联立，本站解得

$$\tan\xi=\frac{n_o^2}{n_e^2}\tan\theta.$$

(3) 第（3）问：Sellmeier 代入 $n_o^2(\lambda)=2.7359+\frac{0.01878}{\lambda^2-0.01822}-0.01354\lambda^2$，$n_e^2(\lambda)=2.3753+\frac{0.01224}{\lambda^2-0.01667}-0.01516\lambda^2$（$\lambda$ 以 μm 计，卷面 p28 式③④）。$\lambda=0.8$：$\lambda^2=0.64$，$n_o^2=2.7359+\frac{0.01878}{0.62178}-0.01354\times0.64=2.7359+0.03020-0.00867=2.75744\Rightarrow n_o(800)=1.661$；$n_e^2=2.3753+\frac{0.01224}{0.62333}-0.01516\times0.64=2.3753+0.01964-0.00970=2.38524\Rightarrow n_e(800)=1.5444$。$\lambda=0.4$：$\lambda^2=0.16$，$n_o^2=2.7359+\frac{0.01878}{0.14178}-0.01354\times0.16=2.7359+0.13246-0.00217=2.86619\Rightarrow n_o(400)=1.6930$；$n_e^2=2.3753+\frac{0.01224}{0.14333}-0.01516\times0.16=2.3753+0.08540-0.00243=2.45827\Rightarrow n_e(400)=1.5679$。

(4) 第（4.1）问：动量守恒 光子动量 $\vec{p}=\hbar\vec{k}$；两个基频光子合成一个倍频光子：能量 $2\hbar\omega_1=\hbar\omega_2$ 即 $\omega_2=2\omega_1$（真空波长减半），动量守恒

$$\vec{k}_2=\vec{k}_1+\vec{k}_1=2\vec{k}_1.$$

(5) 第（4.2）问：偏振方案选择 介质中 $k=\frac{2\pi n}{\lambda}$，$\vec{k}_2=2\vec{k}_1$ 要求 倍频与基频的折射率相等：$n(400)=n(800)$（折射率匹配）。同为 o 或同为 e 时色散使两者不等，排除。(i) 800 nm 为 o 光（$n=1.661$）、400 nm 为 e 光：$n_e(400)$ 随角度介于 1.568 与 1.693 之间连续变化，可取到 1.661，方案可行；(ii) 400 nm 为 o 光（1.693）、800 nm 为 e 光：$n_e(800)$ 只在 1.544 ~ 1.661 间变化，达不到 1.693，不可行。结论：基频 800 nm 取 o 光，倍频 400 nm 取 e 光。

(6) 第（5）问：相位匹配角 e 光相速度是速度椭圆在 $\vec{k}_e$ 方向的投影：$v_p(400,\xi)=v(400,\xi)\cos(\xi-\theta)$，匹配条件 $v_p=\frac{c}{n_{o,800}}$。结合 $\tan\xi=\frac{n_{o,400}^2}{n_{e,400}^2}\tan\theta$ 与椭圆方程，本站整理得 整理得倒数形式

$$\cos^2\theta=\frac{1/n_{e,400}^2-1/n_{o,800}^2}{1/n_{e,400}^2-1/n_{o,400}^2}\approx0.764,\qquad\cos\theta=0.8749,$$

（极限自检：$\theta\to0$ 时 $n_e(\theta)\to n_o$，回到 $n_e(400^\circ)=n_o(800^\circ)$ 的相位匹配条件，自洽）

$$\theta\approx29.0^\circ\ (0.506\ \text{rad}).$$

(7) 第（6）问：$\vec{k}_e$ 与 $\vec{N}_e$ 的夹角 $\tan\xi=\frac{n_{o,400}^2}{n_{e,400}^2}\tan\theta=\frac{2.8662}{2.4583}\times\tan29.0^\circ=1.1659\times0.5543=0.6463$，$\xi\approx32.9^\circ$（卷面㉑用 $\frac{n_o^2}{n_e^2}$ 比得 $\tan\xi=0.646$，$\xi=32.9^\circ$，与本站一致）。夹角

$$\alpha=\xi-\theta\approx32.9^\circ-29.0^\circ=3.9^\circ.$$

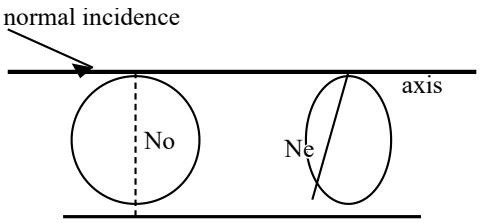


Fig.5a Huygens wavefronts: circle for o ray, ellipse for e ray

本站解得。Sellmeier 方程文本层完整（③④式可读），四个折射率值由本站代入独立计算并与卷面残存数字核对一致。第（1）问作图与第（2）问的角度定义以卷面图5a 为准：θ 为表面法线与光轴夹角，ξ 为 e 光线方向与光轴夹角。

6. 计算题 · 50分

答案 (1) b 为 1 mol 分子不能自由达到的体积总和，$b=\dfrac{16}{3}\pi N_A r^3$ (2) $\left(p+\dfrac{N^2a}{V^2}\right)(V-Nb)=NRT$ (3) $C_V=\dfrac{3}{2}R$ 常量 (4) $s=C_V\ln T+R\ln(v-b)+s_0$，绝热过程 $T(v-b)^{2/3}=$ 常量 (5) $Q_1=RT_1\ln\dfrac{v_2-b}{v_1-b}$，$Q_2=RT_2\ln\dfrac{v_3-b}{v_4-b}$，$\eta=1-\dfrac{T_2}{T_1}$ (6) $\kappa_T=\dfrac{v^2(v-b)^2}{RTv^3-2a(v-b)^2}$，稀疏极限下趋于理想气体值 $\dfrac{1}{p}$

详解

(1) 第（1）问：b 的含义与估值 b 是分子固有体积导致的“排斥芯”体积：1 mol 气体中所有分子不能自由进入的体积总和。两分子质心最近距离 $2r$，单个排斥球体积 $V_0=\dfrac{4}{3}\pi(2r)^3=\dfrac{32}{3}\pi r^3$，该区域为一对分子共有，故每摩尔贡献 $b=\dfrac{1}{2}N_AV_0=\dfrac{16}{3}\pi N_Ar^3$（约为分子自身体积 $\dfrac{4}{3}\pi r^3N_A$ 的 4 倍）。

(2) 第（2）问：N mol 状态方程 摩尔体积 $v=\dfrac{V}{N}$ 代入 $\left(p+\dfrac{a}{v^2}\right)(v-b)=RT$，注意 T,p 为强度量：

$$\left(p+\frac{N^2a}{V^2}\right)(V-Nb)=NRT.$$

(3) 第（3）问：C_V 为常量 由 $p=\dfrac{RT}{v-b}-\dfrac{a}{v^2}$ 得 $\left(\dfrac{\partial p}{\partial T}\right)_v=\dfrac{R}{v-b}$，$\left(\dfrac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_v=0$，故 $\left(\dfrac{\partial C_V}{\partial v}\right)_T=0$：$C_V$ 与 v 无关，只可能是 T 的函数。取稀疏极限 $v\to\infty$ 范德瓦尔斯气体退化为理想气体，单原子分子 $C_V=\dfrac{3}{2}R$ 且与 T 无关，故处处 $C_V=\dfrac{3}{2}R$ 为常量。

(4) 第（4）问：熵与绝热方程 由 $\mathrm{d}u = C_V\,\mathrm{d}T + \dfrac{a}{v^2}\mathrm{d}v$ 与 $\mathrm{d}s = \dfrac{\mathrm{d}u + p\mathrm{d}v}{T}$：

$$\mathrm{d}s = C_V\,\frac{\mathrm{d}T}{T} + \frac{1}{T}\left(\frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2} + \frac{a}{v^2}\right)\mathrm{d}v = C_V\,\frac{\mathrm{d}T}{T} + R\,\frac{\mathrm{d}v}{v-b},$$

积分

$$s(T,v) = C_V\,\ln T + R\ln(v-b) + s_0.$$

可逆绝热即等熵：$C_V\,\ln T + R\ln(v-b) = $ 常量，代 $C_V = \dfrac{3}{2}R$ 得

$$T\,(v-b)^{2/3} = \text{const.}$$

(5) 第（5）问：卡诺循环热量与效率 等温段：$\Delta u = -a\left(\dfrac{1}{v_2} - \dfrac{1}{v_1}\right)$，而 $\int p\,\mathrm{d}v = RT_1\ln\dfrac{v_2-b}{v_1-b} + a\left(\dfrac{1}{v_2} - \dfrac{1}{v_1}\right)$，两者相加内能项恰好抵消，故吸热

$$Q_1 = RT_1\ln\frac{v_2-b}{v_1-b};$$

同理放热（取绝对值）

$$Q_2 = RT_2\ln\frac{v_3-b}{v_4-b}.$$

两段绝热过程给出 $T_1(v_2-b)^{2/3} = T_2(v_3-b)^{2/3}$ 与 $T_1(v_1-b)^{2/3} = T_2(v_4-b)^{2/3}$，相除得 $\dfrac{v_2-b}{v_1-b} = \dfrac{v_3-b}{v_4-b}$，于是

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1},$$

与理想气体卡诺效率相同。

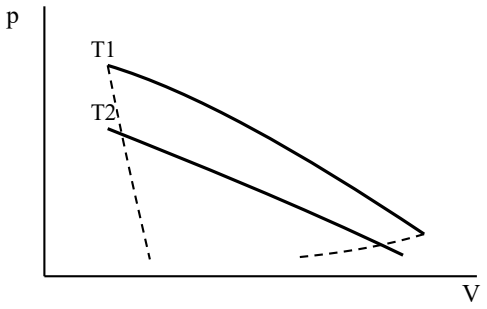
(6) 第（6）问：等温压缩系数 由 $\left(\dfrac{\partial p}{\partial v}\right)_T = -\dfrac{RT}{(v-b)^2} + \dfrac{2a}{v^3}$ 得闭式

$$\kappa_T(v,T) = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T = \frac{v^2(v-b)^2}{RTv^3 - 2a(v-b)^2}.$$

在题给稀疏条件（引力项远小于压强主项，等效于 $RT \gg \dfrac{2a}{v}$）下以一阶小量展开：记 $x = \dfrac{b}{v}$、$y = \dfrac{a}{pv^2}$，本站化简得

$$\kappa_T \approx \frac{1}{p}\,(1 - 2x + 2y + \dots),$$

即取值略偏离理想气体值 $\dfrac{1}{p}$：排斥体积使气体更难压缩（κ_T 减小），分子引力使其更易压缩（κ_T 增大），实际偏移由二者竞争决定；在题给 $a \ll pv^2$ 条件下 $RTv^3 > 2a(v-b)^2$，恒有 $\kappa_T > 0$。直观物理意义：κ_T 度量等温下单位压强增量引起的相对体积缩小；当趋近力学不稳定分支 $\left(\dfrac{\partial p}{\partial v}\right)_T \to 0^-$ 时 $\kappa_T \to +\infty$，标志气液相变的旋节线边界。



p-V sketch of the van der Waals Carnot cycle

本站解得。第（6）问卷面尾部（提示与解答）超出本次 dump 范围，本册按范德瓦尔斯方程独立推出 κ_T 与其取值范围；第（5）问绝热线两交点关系由 $T(v-b)^{2/3}$ 守恒直接给出。C_V 满足的关系式 $(\frac{\partial C_V}{\partial v})_T = T(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2})_v$ 为题面给定。

逐光知理 · 竞赛答案册 · 易错点速查

第39届全国中学生物理竞赛决赛理论 · 易错点速查

补在原册之后：原册答案与详解未作任何改动

共 6 条 · 绑定本卷题号

只挑本卷最容易失分的动作，按「错法 / 机理 / 正解」三段写，题号与原册一致；公式沿用原册口径。

第 1 题 · 第(1)(3)问

错法 求平衡位置时把 $\sin\theta=0$ 解也保留；小振动直接把势能在原位置展开；列力矩平衡时选质心为矩心，把约束力也算进力矩；白鼠沿杆受力漏掉非惯性系切向项。

机理 势能极值方程 $dU/d\theta=0$ 给出 $\sin\theta=0$ 与另一解，前者与题意给定几何不符，应舍去。小振动必须在平衡角 $\theta_0=30°$ 附近令 $\theta=\theta_0+\Delta\theta$ 展开，动能领头项与势能二阶项分别保留后再求导。选两法线交点 D 为矩心时，A、B 两处抛物线支撑力沿各自法线均过 D，力矩为零，可消去全部约束力；选质心为矩心则约束力项无法消去。白鼠相对杆静止，在随杆转动的非惯性系中沿杆方向除重力分量 $g\sin\theta$ 外还有相对加速度项 $s\ddot{s}$。

正解 几何关系得质心高度 y_c，势能极值舍去 $\sin\theta=0$ 解，得 $a=3l/2$、$\theta_0=30°$；小振动角频率 $\omega=\sqrt{g/l}$；以 D 为矩心列力矩平衡，白鼠相对杆中点做简谐运动 $s(t)=l-l\cos(\sqrt{g/l}\,t)$，首次到顶端 t_\min=\pi\sqrt{l/g}，周期 $T'=2\pi\sqrt{l/g}$。

第 2 题 · 第(2)(3)(4)问

错法 二次方程求根后两支全部保留；$R<1$ 时认为散射角可到 π；相对论动能仍按 $p^2/2m$ 展开；求最小夹角时对 K_1' 直接取端点。

机理 根式两支中，一支在靶粒子更重时使 k 越界，物理要求 $0\le k\le 1$ 据此取舍；硬球模型分支由瞄准距离 b 与临界 b_c 的位置唯一确定，擦边对应正号支、对心对应负号支。$R<1$（入射粒子更重）存在最大散射角，超过该角无观测解。相对论能动量关系 $pc=\sqrt{E^2-E_0^2}$，分母多出的 $m_0^2c_0^2/(2K_1)$ 项即相对论修正，$K_1\ll m_0c_0^2$ 时才退回经典。夹角 α 作为 K_1' 的函数求极值，令 $dK_1'/d\cos\alpha=0$，二阶导为负处 α 极小。

正解 守恒律化为关于 $u=k$ 的二次方程，按 $R=m_1/m_2$ 分 $R>1$、$R=1$、$R<1$ 三种定义域；相对论倍乘比 $k_{\mathrm{rel}}=K_1'/K_1$ 含 $\sin^2\theta$ 修正项；\cos\alpha_\min=K_1/(K_1+4m_0^2c_0^2/K_1)，\theta_\min=2\alpha_\min，两粒子均分入射动能时夹角最小。

第 3 题 · 第(1)(2)(4)问

错法 无滑动约束只写接触点速度为零；旋转系中仍计入科氏力并积分；稳定性判断直接看重力回复项，忽略进动陀螺项；微扰方程把侧移量当成一阶量。

机理 环面倾斜时接触点既是地面上点又是环上点，无滑动约束是接触点速度沿环面与地面交线方向，并非速度全零。取随质心绕 z 轴匀速转动的 XY 系，质心在其中静止；科氏力 $-2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_C$，因质心速度与牵连速度相同而平均为零。直线滚动微扰中，侧移 δx 是一阶纵向偏移的高阶小量；色散关系 Ω^2 由陀螺进动项与重力回复项合成，稳定要求 Ω^2 为实数（非负），速率低于阈值时扰动发散。

正解 先写滚动约束 $\sin\phi\,\dot{x}-\cos\phi\,\dot{y}=0$；离心力积分得总离心力与离心力矩 τ_1，科氏力矩 τ_2；力平衡给出 N、f，力矩平衡合并得自转角速度条件；微扰后消去侧移量得分量方程，色散关系 Ω^2 中进动项与重力回复项相减，稳定要求 $\Omega^2\ge 0$，给出最小滚动速率阈值。

第 4 题 · 第(2)(3)问

错法　加速电压用经典 $eU = p^2/2m$ 计算；多普勒上移因子漏算洛伦兹 γ 平方；衍射主峰把任意整数对 (k_1, k_2) 都算作可观测峰。

机理　电子经加速后 $\gamma \approx 1118$，属相对论情形，动能 $(\gamma-1)m_ec^2 = eU$，经典外推失效。共动系中以 ω' 振荡，辐射光变换回实验室系沿前进方向多普勒上移，波长含 $2\gamma^2\Lambda$ 因子。二维菱面晶格主峰条件为 $\beta_1 = k_1\pi$、$\beta_2 = k_2\pi$，k_1、k_2 必须同时满足有界条件，逐对检验；零级与 180° 峰在分离观测受限时不计。

正解　由共振条件定 $\gamma \approx 1118$，$eU = (\gamma-1)m_ec^2$，$m_ec^2 = 0.511\,\mathrm{MeV}$，得 $U \approx 5.73 \times 10^8\,\mathrm{V}$；逐对整数检验得主级峰 $\theta = 0$、$\pm 60°$、$\pm 120°$、$180°$ 共 6 个。

第 5 题 · 第(4)(5)问

错法　相位匹配只让基频与倍频折射率在真空相等，忽略介质中波矢；偏振方案把 800 nm 取 e 光、400 nm 取 o 光；匹配角用光线方向角 θ 直接代入折射率公式；离散角当成零。

机理　倍频动量守恒是介质中波矢 $\boldsymbol{k}_2 = 2\boldsymbol{k}_1$，匹配条件 $n(400) = n(800)$，不是真空波长关系。同为 o 或同为 e 时色散使两波长折射率不等，排除；800 nm 为 o 光、400 nm 为 e 光时 $n_e(400)$ 随角度介于两极限之间可取到匹配值，反向方案 $n_e(800)$ 区间达不到目标值，不可行。e 光波法线方向与光线方向不一致，匹配角 θ 是波矢与光轴夹角，光线角 ξ 由 $\tan\xi = (n_e^2/n_o^2)\tan\theta$ 联系；离散角 $\alpha = \xi - \theta$ 不为零。

正解　代入 Sellmeier 得 $n_o(800) = 1.661$、$n_e(800) = 1.544$、$n_o(400) = 1.693$、$n_e(400) = 1.568$；匹配方案 800 nm 取 o 光、400 nm 取 e 光；$\cos\theta \approx 0.764$，$\theta \approx 29.0°$（0.506 rad），$\xi \approx 32.9°$，离散角 $\alpha = \xi - \theta \approx 3.9°$。

第 6 题 · 第(1)(4)(5)(6)问

错法　把 b 当成 1 mol 分子自身总体积；绝热方程套理想气体 $TV^{\gamma-1} =$ 常量；卡诺效率因有分子引力修正而改变；压缩系数定义式漏负号或相对体积因子。

机理　b 是排斥芯体积：两分子质心最近距 $2r$，排斥球为一对分子共有，每摩尔 b 约为分子自身体积 4 倍，不是单分子体积之和。范德瓦尔斯气体内能含引力项 $-a/v$，绝热方程用 $C_V \ln T + R\ln(v-b) =$ 常量，即 $T(v-b)^{R/C_V} =$ 常量，分母是 $v-b$ 而非 v。卡诺循环两段等温过程内能项相加抵消，两段绝热线相除后效率仍 $\eta = 1 - T_1/T_2$，与理想气体相同。等温压缩系数 $\kappa_T = -(1/v)(\partial v/\partial p)_T$，负号与相对体积因子不能丢；趋近力学不稳定分支时 $\partial p/\partial v \to 0$，$\kappa_T \to \infty$。

正解　$b = \frac{16}{3}\pi N_A r^3$；$C_V = 3R/2$，绝热 $T(v-b)^{2/3} =$ 常量；等温段 $Q_1 = RT_1\ln[(v_1-b)/(v_2-b)]$、$Q_2 = RT_2\ln[(v_4-b)/(v_3-b)]$，效率 $\eta = 1 - T_1/T_2$；压缩系数 $\kappa_T = RTv^3/[2pv^2(v-b)^2 - 2a(v-b)^2]$，稀疏极限下趋于理想气体 $1/p$。