南京理工大学 2022 年硕士研究生招生考试

843 量子力学

南京理工大学 2022 年硕士研究生招生考试 · 满分 150 分 · 考试时间 180 分钟

考生须知

1. 本卷按招生单位公布的官方原卷逐题重排，题干、选项与图示据原卷整理。
2. 答案与解析由本站重新编撰，仅供教学研究；原卷文字与命题版权归命题单位。
3. 请在答题纸上作答，题号与原卷保持一致；作图题须写出必要的文字说明与公式。

一、简答题（共 60 分）

1. 为什么粒子的波动性在日常生活中不是很明显？计算下列物体的波长并说明。（已知灰尘的速度为 $0.1\mathrm{m/s}$，细菌运动的速度为 $0.1\mathrm{mm/s}$，核电站中慢中子的能量大约为 $5\times10^{3}\mathrm{eV}$，黄光照射金属钨逸出电子速度大约为 $3\times10^{5}\mathrm{m/s}$，不考虑相对论效应，保留两位有效数字）

2. 波函数的标准条件有哪些？波函数归一化的含义是什么？什么样的波函数可以归一化？归一化随时间变化吗？

3. 波函数 ψ 与 $K\psi$、ψe^{ia}（K、a 均为常数）是否描述同一个状态？为什么？

4. 简述量子力学 5 个公设。

5. 厄米算符有哪些特性？若 $\hat{A}$ 和 $\hat{B}$ 为厄米算符，证明算符 $\frac{1}{2}(\hat{A}\hat{B}+\hat{B}\hat{A})$、$\frac{1}{2i}(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A})$ 为厄米算符。

6. 如果两个算符 $\hat{F}$ 和 $\hat{G}$ 有一组共同本征函数 ϕ_n，且 ϕ_n 组成完全系，证明算符 $\hat{F}$ 和 $\hat{G}$ 对易。

7. 写出 N 个无相互作用粒子体系的非相对论含时薛定谔方程和定态薛定谔方程。

8. 写出一维自由单粒子的定态薛定谔方程并求解。

9. 设 $\hat{H}=\dfrac{\hat{p}_x^2}{2m}+V(x)$，在 $\hat{x}$ 表象中写出 $\hat{x}$，$\hat{p}_x$，$\hat{H}$ 的矩阵元。已知在 $\hat{x}$ 表象中 $\hat{x}$ 的本征态为 $\delta(x-x')$。

10. 一般波函数 ψ 的 $\hat{x}$ 表象 $\psi(x,t)$ 与 $\hat{p}_x$ 表象 $C(p_x,t)$ 之间的关系:

$$\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}C(p_x,t)e^{\frac{i}{\hbar}p_x x}dp_x\ ,\quad C(p_x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x,t)e^{-\frac{i}{\hbar}p_x x}dx$$

现已知动量算符 $\hat{p}_x$ 的本征态在 $\hat{p}_x$ 表象为 $\delta(p_x-p_x')$，求其本征态在 $\hat{x}$ 表象中的形式。

11. 什么是全同粒子？具有什么特性？

12. 什么是玻色子？什么是费米子？哪些基本粒子是玻色子？哪些基本粒子是费米子？

二、计算题（共 90 分）

13. 某体系哈密顿量为 H_0，有两个能级，$E_1^{(0)}$ 二重简并，$E_2^{(0)}$ 无简并。受微扰 H' 作用后，哈密顿变为(H_0 表象):

$$H = H_0 + H' = \begin{bmatrix} E_1^{(0)} & 0 & a \\ 0 & E_1^{(0)} & b \\ a & b & E_2^{(0)} \end{bmatrix}$$

（a）用微扰论公式求解能级（二级近似）。提示：设 ψ_α、ψ_β、$\psi_2^{(0)}$ 表示 H_0 的正交归一的本征函数，当 $\langle\psi_\alpha|H'|\psi_\alpha\rangle = \langle\psi_\beta|H'|\psi_\beta\rangle = \langle\psi_\alpha|H'|\psi_\beta\rangle = 0$ 时，一级近似下，简并能级不发生分裂，确定零级波函数，即 $\psi^{(0)}$，将和能量二级修正 $E_1^{(2)}$ 同时进行。

（b）求能级的精确值，再作近似展开，和微扰论结果比较。

14. 假设一个自旋 1/2 的粒子处在态 $\chi = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix}$ 中（S_z 表象）。那么如果测量 S_z 和 S_x，得到 $\frac{\hbar}{2}$ 和 $\frac{-\hbar}{2}$ 的几率分别是多少?

15. 求粒子在宽度为 a 的一维无限深方势阱中的波函数和能量本征值。其中

$$V(x)=\begin{cases}0 & 0<x<a\\ \infty & x\le 0,\ x\ge a\end{cases}。$$

16. 氢原子处在基态 $\psi(r,\theta,\varphi)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}}e^{-r/a_0}$，求：（1）$r$ 的平均值；（2）电子出现在 $r+dr$ 球壳内出现的几率以及最可几半径。注：附积分常用公式 $\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-ax}dx=\frac{n!}{a^{n+1}}$。

17. 求下列对易关系 $[\hat{L}_x,\hat{L}_y]=?$，$[\hat{L}_x,\hat{P}_x]=?$

18. 对自旋为 1/2 的粒子，是否存在态 $\eta=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$，使得 $\overline{S}_x=\overline{S}_y=\overline{S}_z=0$？