山东大学 2018 年硕士研究生招生考试

829 量子力学

山东大学 2018 年硕士研究生招生考试 · 满分 150 分 · 考试时间 180 分钟

考生须知

1. 本卷按招生单位公布的官方原卷逐题重排，题干、选项与图示据原卷整理。
2. 答案与解析由本站重新编撰，仅供教学研究；原卷文字与命题版权归命题单位。
3. 请在答题纸上作答，题号与原卷保持一致；作图题须写出必要的文字说明与公式。

一、计算（共 25 分）

1. 已知一维运动的粒子在态 $\psi(x)$ 中坐标 x 和动量 $\hat{p}$ 的平均值分别为 x_0 和 p_0。求在态 $\varphi(x)=e^{ip_0x/\hbar}\psi(x+x_0)$ 中 x 和 $\hat{p}$ 的平均值。

二、计算（共 25 分）

2. 一维无限深势阱，质量为 μ 的粒子在 $0 < x < a$ 中运动，势阱外势能为无穷大。（1）求解能量本征值 E_n 和归一化的本征函数 $\psi_n(x)$；（2）若已知 $t = 0$ 时，该粒子态为 $\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1(x) + \psi_2(x))$，求 t 时刻该粒子的波函数；（3）求 t 时刻测量到粒子的能量分别为 E_1 和 E_2 的几率；（4）求 t 时刻粒子的平均位置 $\langle x \rangle$ 和平均能量 $\langle E \rangle$。

三、证明（共 25 分）

3. 定义角动量升降算符 $\hat{J}_\pm = \hat{J}_x \pm i\hat{J}_y$。（1）证明算符 $\hat{J}_+$ 与 $\hat{J}_-$ 的厄米性，并求出它们的本征态与本征值；（2）若力学量算符 $\hat{F}$ 满足对易关系 $[\hat{F}, \hat{J}_\mu] = 0$（$\mu = x, y, z$），试证：$\hat{F}$ 在 $\hat{J}^2, \hat{J}_z$ 共同本征态上的平均值与磁量子数无关。

四、计算（共 25 分）

4. 粒子束缚在一维势场 $V(x)$ 中运动，能级为 E_n^0（$n=1,2,3,\cdots$），本征波函数为 $|n\rangle$，受到微扰 $H'=\dfrac{\lambda}{\mu}\hat{p}_x$ 的作用，其中 μ 是粒子质量，λ 是常数，$\hat{p}_x$ 为粒子动量。（1）证明 $\langle n|\hat{p}_x|m\rangle=\dfrac{i\mu}{\hbar}(E_n^0-E_m^0)\langle n|x|m\rangle$；（2）由此推导 $\sum_n(E_n^0-E_m^0)^2|\langle n|x|m\rangle|^2=\dfrac{\hbar^2}{\mu^2}\langle m|\hat{p}_x^2|m\rangle$；（3）证明 $\sum_n(E_n^0-E_m^0)|\langle n|x|m\rangle|^2=\dfrac{\hbar^2}{2\mu}$；（4）在二级近似下，证明第 n 个能级能量表示为 $E_n=E_n^0-\dfrac{\lambda^2}{2\mu}$。

五、计算题（共 25 分）

5. 假设两自旋系统的哈密顿量为 $\hat{H}=B(\hat{\sigma}_{1z}+\hat{\sigma}_{2z})+J\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}_2$。指标 1 表示自旋 1，指标 2 表示自旋 2。两自旋波函数可表示为自旋 1 与自旋 2 直积的形式：$\chi_1=|++\rangle,\chi_2=|--\rangle,\chi_3=|+-\rangle,\chi_4=|-+\rangle$。（1）求在此表示下，哈密顿量 $\hat{H}$ 的矩阵表示：$H_{ij}=\langle i|\hat{H}|j\rangle$；（2）波函数可表示为 $\psi=a\chi_1+b\chi_2+c\chi_3+d\chi_4$，求解 $\hat{H}$ 的本征值与相应的本征函数；（3）假设 $B=0,J>0$，求两自旋系统的基态能及对应的基态波函数。

六、计算题（共 25 分）

6. 两个无相互作用的粒子置于一维无限深方势阱（$0 < x < a$）中，对于以下两种情况，写出两粒子体系可具有的两个最低能量值、相应的简并度，以及上述能级对应的所有二粒子波函数：（1）两个自旋为 1/2 的可区分粒子；（2）两个自旋为 1/2 的全同粒子。

逐光知理 · 考研真题重排版