第36届全国中学生物理竞赛决赛理论试题

物　　理

2019 年 | 决赛理论部分

一、

1. 新型号汽车在出厂前都要通过破坏性试验。在某次汽车测试中，一个汽车轮子的三根辐条被撞掉了其中一根，轮子的横截面如图 a 所示。该轮子可视为内、外半径分别为 $R_1=\frac{4}{5}R_0$、R_0 的轮盘和两根辐条组成（假设轮盘可视为匀质环形圆盘，辐条可视为匀质细杆，每根辐条的质量为 m。轮盘的质量为$M=8m$），轮子从图 a 所示位置由静止开始释放，释放时轮子上两辐条所张角的平分线恰好水平，此后该轮子在水平地面上做纯滚动。求



图 a

1) 刚释放时轮子的角加速度；

2) 释放后辐条 OB 首次转到竖直位置时，轮子的角加速度、地面对轮子的摩擦力和支持力。

二、

2. 一个长为 l、内外半径分别为 a 和 b 的半圆柱体由两种不同的损耗电介质构成，它们的相对介电常数和电导率分别为：ε_{r1} 和 σ_1（$0\leq\varphi<\theta_0$ 区域），ε_{r2} 和 σ_2（$\theta_0<\varphi\leq\pi$ 区域），其横截面如图 a 所示；在半圆柱两侧底部镀有金属膜，两金属膜间加有直流电压 V_0，并达到稳定。已知真空介电常量为 ε_0，两种介质的相对介电常数大、电导率小。忽略边缘效应。

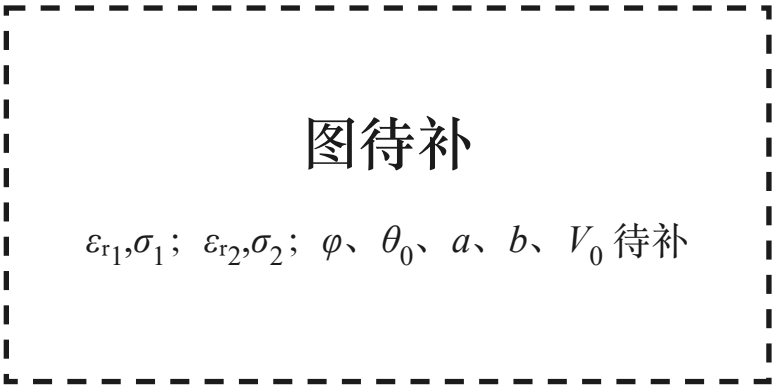

图 a

1) 求介质内电场强度和电势的分布；

2) 求 $\varphi=\theta_0$ 界面处的总电荷；

3) 分别计算两介质区域的电阻和电容；

4) 在 $t=0$ 时刻断开电源，求随后的两金属膜间电压随时间的变化（该过程可视为似稳过程），并画出相应的等效电路图。

三、

3. 用超导重力仪对地球表面重力加速度的微小变化及其分布进行长期高精度观测，可获得地幔运动、质量分布、固体潮汐、地下水和矿产分布等地球内部结构信息，以及海洋潮汐、气候变化等外部数据。超导重力仪灵敏度高、稳定性强，是目前地球科学领域广泛采用的重力观测装置。随着分布于全球的超导重力仪数目的增加、观测网络的建立和数据共享，为地球科学的发展、万有引力规律的精确检验等等提供了新的机遇。试就有关地下水分布引起的重力变化、超导重力仪原理等问题给出回答。

1) 假设地球可视为一个半径为 6370 km 的均匀球体，其表面重力加速度 $g_0=9.80\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$（不考虑地球自转）。现某处地下有一个直径为 20 km 充满水的球形地下湖，其球心离地面 15 km。求地下湖正上方地表处重力加速度的微小变化Δg。已知万有引力常量 $G=6.67\times10^{-11}\,\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}$，水的密度 $\rho_{水}=1.0\times10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$。

2) 超导重力仪的核心部件是悬浮在磁场中、由金属铌（Nb）制成的超导球壳，为计算方便起见，这里简化为超导细环（见图 a）。悬浮磁场由准亥姆霍兹（Helmholtz）线圈提供，它由匝数分别为 αN 和 N 的上、下两个同轴细超导线圈（$\alpha<1$）串联而成，两线圈的半径及其中心之间的距离均为 R。超导重力仪调试前，亥姆霍兹线圈和超导细环中的电流均为零，超导细环处在下线圈平面内（$z=0$），且与线圈同

轴。调试开始后，外电源对准亥姆霍兹线圈缓慢加上电流 i_0，在此过程中超导细环内会产生感应电流。调节 i_0 的大小，使超导细环正好悬浮在上线圈平面内（$z=R$），如图 a 所示。由于超导线圈和超导细环的电阻均为零（其所在处的温度为 4.2 K），超导环被稳定悬浮后，移去提供超导线圈电流的电源，超导线圈中的电流 i_0 以及由此产生的磁场均能长期保持稳定。已知超导细环的质量为 m、直径为 D（Dll2R）、自感系数为 L；在上线圈平面附近，由准亥姆霍兹线圈产生的磁感应强度 B 的 z 方向分量和径向分量可分别近似表示为

$$B_z=B_0[1-\beta(z-R)],\quad B_r=\frac{1}{2}\beta B_0 r$$

其中 B_0 为上线圈中心处的磁感应强度，β 为径向系数，r 是到轴线的距离。利用上述线圈和超导细环的已知参数、以及线圈中的外加电流 i_0，求

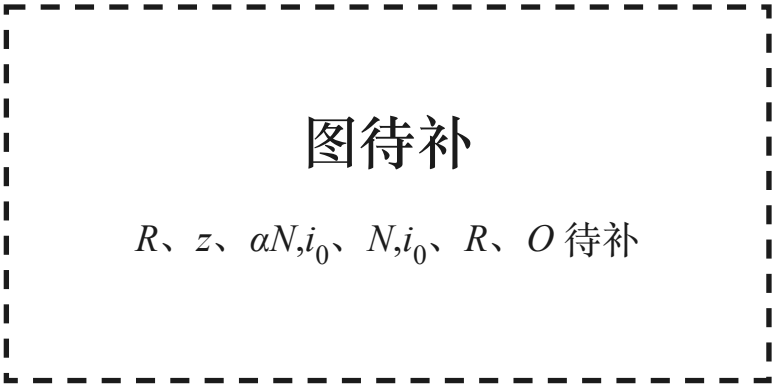

图 a

i) B_0 和 β 的表达式；

ii) 超导细环在平衡处（$z=R$）感应电流 I_0 的表达式；

iii) 超导重力仪放置地的重力加速度 g_0 的表达式。

3) 交流电桥平衡法：面积 A 薄“平板”，$R+d/2$、$R-d/2$ 极板，C_1、C_2；L_0、C_0；交流电源；g，平衡 $z=R$；C_1、C_2 加相同直流电压 V_C；Δg、ΔV，求 Δg 与 ΔV 关系式。

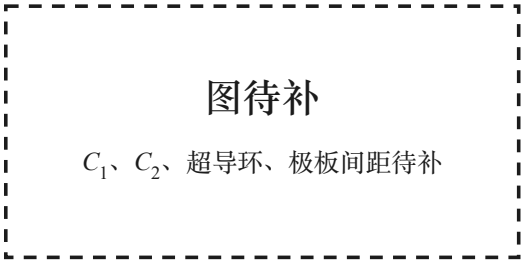

图 b

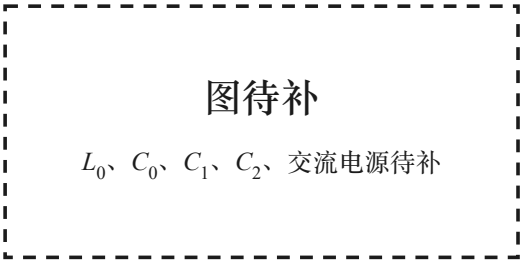

图 c

四、

4. 汽车以发动机气缸中的空气与汽油发生燃烧产生动力，发动机的输出功率与进入气缸中的空气质量成正比。为了提高动力，很多汽车加装了涡轮增压器，在空气进入发动机气缸之前对它进行压缩，以增加空气密度；为了进一步提高空气密度，还通过一个中间冷却器，使空气温度降低后再进入气缸。在一个典型的

装置中，进入涡轮增压器的初始空气压强为一个大气压 $p_0=1.01\times10^5\,\mathrm{Pa}$，温度 $T_0=15°\mathrm{C}$；通过涡轮增压器后，空气绝热压缩至 $p_1=1.45\times10^5\,\mathrm{Pa}$；然后又通过中间冷却器，让空气等压地降至初始温度 T_0 并充满气缸。假设空气为理想气体，已知气缸容积 $V_0=400\,\mathrm{cm}^3$，空气摩尔质量 $M=29.0\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$，摩尔热容比 $\gamma=7/5$；普适气体常量 $R=8.31\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$。

1) 求此时气缸内空气的质量；与未经增压和冷却的情形相比，发动机的输出功率增加到多少倍?

2) 如果没有中间冷却器，仅经过涡轮增压器把空气压缩后输入到气缸中，相应的空气质量为多少？与未经增压的情形相比，发动机输出功率增加到多少倍?

3) 在经过涡轮增压器和中间冷却器的热力学过程中，求外界对进入气缸的气体所做的功、及气缸中的气体在上述两个过程中各自的熵变。

五、

5. 波长 $\lambda=632.8\,\mathrm{nm}$、光束直径 $D_1=1.5\,\mathrm{mm}$、功率 $P=30\,\mathrm{mW}$ 的氦氖激光，经焦距 $f=4.0\,\mathrm{mm}$ 的物镜聚焦在折射率为 $n_w=1.33$ 的水样品池中，以捕获半径 $D_b=2.0\,\mu\mathrm{m}$、密度 $\rho_b=1.0\times10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ 的玻璃微球（$n_g=1.46$）。样品池厚 $d=1.0\,\mathrm{mm}$，池壁厚 $a=2.0\,\mathrm{mm}$，温度 $T=300\,\mathrm{K}$，空气折射率 $n_a=1.0$，$g=9.80\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$，$k_B=1.38\times10^{-23}\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}$。

图待补

激光、物镜、微球、样品池待补

图 a

图待补

L_1、L_2、x、小球待补

图 b

1) 不加扩束镜聚焦光斑直径；

2) 扩束镜 $f_1=-6.3\,\mathrm{mm}$ 凹透镜、$f_2=25.2\,\mathrm{mm}$ 凸透镜，求两镜间距和扩束后光束直径 D_2；

3) 傍轴近似下聚焦光斑中心到样品池底部内表面距离和光斑直径；

4) 图 b 中 L_1、L_2 沿 x 方向，$P_1=1.0\,\mathrm{mW}$，$P_2=2.0\,\mathrm{mW}$，夹角 15°，求小球所受 x、y 方向作用力及其与重力之比；

5) 求小球的方均根速率；

6) 光势阱 $U(r)$ 势深 $U_0=0.078\,\mathrm{eV}$，求可被捕获的小球最大速率；

7) 速率分布 $f(v)$，比较质量 m 与 $2m$ 小球被捕获的概率。

六、

6. 已知地球半径 $R_{\mathrm{earth}}=6370\,\mathrm{km}$，$G=6.67\times10^{-11}\,\mathrm{N\backslash cdot\ m^2\backslash cdot\ kg^{-2}}$，斯特藩-玻尔兹曼常量 $\sigma=5.67\times10^{-8}\,\mathrm{W\backslash cdot\ m^{-2}\backslash cdot\ K^{-4}}$，$k_B=1.38\times10^{-23}\,\mathrm{J\backslash cdot\ K^{-1}}$，$e=1.602\times10^{-19}\,\mathrm{C}$，$m_e=0.51\,\mathrm{MeV}/c^2$，$m_p=938.3\,\mathrm{MeV}/c^2$，$m_D=1875.6\,\mathrm{MeV}/c^2$，$m_{^3\mathrm{He}}=2808.4\,\mathrm{MeV}/c^2$，$m_{^4\mathrm{He}}=3727.5\,\mathrm{MeV}/c^2$，$c=3.00\times10^8\,\mathrm{m/s}$。

1) 《周髀算经》记载了以表影测量日地距离的方法。设太阳直径 D、日地距离 $S_{日地}$、表杆长 d、表影长 L，太阳视角 $\Phi=D/S_{日地}$。i）给出几何关系；ii）说明其他减小误差的办法；iii）$d=1$ 寸、$L=8$ 尺，估算 Φ。

2) 金星凌日：地球公转周期 365.256 天，金星 224.701 天。i）求 $r_{VE}=S_{日金}/S_{日地}$；ii）凌日圆面直径比 $D_P/S_{日地}$，$h_P=5D/16$，求 Φ；iii）由 Φ、r_{VE}、$T_{地}$、$T_{金}$、t_P、t_P'、H 求 $S_{日地}$；iv）北京 39.5°、香港 22.5°，$t_P=6{:}21{:}57$，$t_P'=6{:}19{:}31$。

图待补

原卷为实物照片

图 a

图待补

D、S 日地、r_VE、H、h_P 待补

图 b

3) 取 $S_{日地}=1.5\times10^8\,\mathrm{km}$，$D=1.4\times10^6\,\mathrm{km}$，$I=1.37\,\mathrm{kW\backslash cdot\ m^{-2}}$。i）求太阳总辐射能量；ii）70 亿人口，人均年耗 3 吨标准煤，1 kg 标准煤发电 4 度；iii）太阳总辐射；iv）求表面温度。

4) i）求太阳总质量与平均密度；ii）化学能维持寿命，50 亿年，效率倍数。

5) 热核反应：$p+p\rightarrow D+e^{+}!+!\nu_e$（α）。i）每秒参与反应质子数；ii）71% 为氢，求太阳寿命（年）与 P_{PP}；iii）地面单位面积中微子数（计 35%）；iv）求质量损失率。

6) $P=nR(T)$，图 c 为反应率随温度 T 变化曲线。



图 c

7) 估算单个中微子带走的最大能量，并估计第 5）问忽略中微子能量所致辐射能量计算的最大相对误差。

8) 太阳质量逐渐减少，地球绕太阳公转周期和平均轨道半径也将变化。i）一亿年内由辐射引起的质量减少量 ΔM；ii）由此引起的地球公转周期变化量。