第39届全国中学生物理竞赛决赛理论试题

物　　理

2022 年 | 决赛理论部分

一、

1. （40 分）

如图 1a，一段抛物线形状的刚性金属丝固定在竖直平面内，抛物线方程为 $y=ax^2$（y 轴竖直向上，a 为待定常量）；一长度为 $2l$ 的匀质刚性细杆的两端 A、B 各有一个小圆孔，两圆孔都套在金属丝上。圆孔和金属丝之间非常光滑，摩擦力非常小，在问题（1）、（2）和（3）中可忽略。若给细杆一个冲量，使其运动；经过足够长的时间，细杆静止于平衡位置，此时细杆和水平方向之间的夹角 $\theta=30°$。已知重力加速度大小为 g。

图待补

$y=ax^2$，A、B、θ、x、y 待补

图 1a

(1) 求待定常量 a；

(2) 若杆在上述平衡位置附近小幅振动，求振动的频率；

(3) 细杆静止在上述平衡位置。现有一只小白鼠，从静止开始由杆底端沿杆往上爬。在爬杆的过程中，细杆始终保持静止；假设小白鼠可视为质点，且小白鼠在杆端不接触金属丝。求小白鼠在时刻 t（以小白鼠开始爬杆的时刻为时刻零点）沿细杆的位移 $s(t)$，小白鼠是否可以爬到细杆顶端？如果可以，小白鼠爬到细杆顶端，最少用时多少？

二、

2. （60 分）

动能为 K_1 的粒子 1（入射粒子）从无穷远处入射，与静止的粒子 2（靶粒子）发生弹性碰撞，碰撞后粒子 1 的动能和运动方向都发生了变化。不考虑重力。

图待补

粒子 1、v_1、粒子 2、b 待补

图 2a　瞄准距离 b 的几何示意图

(1) 散射后（无穷远处）粒子 1 的动能为 K_1'，$k=K_1'/K_1$ 称为运动学因子。试给出 k 的取值范围。

(2) 本问采用牛顿力学理论。

(i) 将散射后粒子 1 的运动方向（散射方向）与入射方向之间的夹角（散射角）记为 θ。将粒子 2 与粒子 1 的质量之比记为 R。对于任意给定的 R，k 是 θ 的函数。分别在 $R>1$、$R=1$ 和 $R<1$ 三种情形下，导出 k 对 θ 的依赖关系 $k(\theta)$，并给出 θ 的取值范围。

(ii) 在某些 R 取值范围中，k 可能是 θ 的多值函数（每种函数形式称为 k 函数的一个分支）。要确定 k 的值，需要补充描述两粒子相互作用部分细节的参量。采用最简单的硬球模型，即把发生碰撞的两个粒子都视为表面光滑的匀质刚球，它们只在碰撞时有相互作用。设两粒子半径之和为 A，靶粒子 2 的质心到入射粒子 1 中心的速度所在直线的距离为 b（瞄准距离），如图 2a 所示。试求 k（用 R、A 和 b 表出），并用“擦边而过”和“对心碰撞”这两种特殊情形来验证可由 b 的取值判断同一个 θ 下 $k(\theta)$ 所在的分支。求出 $k(\theta)$ 各分支所对应的 b 的取值范围。

(3) 设两粒子（可视为质点）的静止质量均为 m_0。粒子 1 的入射速度很快，以至于需要考虑相对论效应。真空中的光速为 c。

(i) 求散射角为 θ 时的运动学因子 $k(\theta)$，并与牛顿力学的结果进行比较。

(ii) 求碰后粒子 1、2 速度之间的夹角 α 与 K_1' 的关系，α 在何种情况下取极值？并判断极值的性质（极大或极小），给出该极值以及相应的 θ 值。

三、

3. （60 分）

一匀质刚性细圆环半径为 R，质量为 M，在水平地面（x-y 坐标平面）上滚动。假定摩擦系数足够大，以至于圆环和地面之间始终无滑动。记 t 时刻圆环所在平面与竖直方向（z 方向）之间的夹角为 $\theta(t)$，圆环所在平面与地面之间的交线相对于 x 方向的夹角为 $\varphi(t)$，圆环与地面的瞬时接触点的直角坐标为 $(x(t),y(t),0)$，如图 3a 所示。重力加速度大小为 g。



图 3a

(1) 描述任意 t 时刻圆环空间位置的 $x(t)$、$y(t)$、$\theta(t)$、$\varphi(t)$ 并非完全相互独立，试求出它们及其对时间的一阶导数之间的所有约束条件。

(2) 设圆环做“匀速圆周运动”，圆环与地面的接触点以恒定速率绕 z 轴画出一个半径为 r 的圆，$\theta(t)=\theta$（θ 为常量），$\varphi(t)$ 是时间 t 的线性函数。在实验室参考系 Σ 中，不失一般性可设

$$\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}-\sin(\omega t)\\\cos(\omega t)\end{pmatrix}$$

这里 ω 是待求的角速度。在绕 z 轴以角速度 ω 匀速旋转的转动参考系 Σ' 中，θ 和 φ 均为常量，圆环绕垂直于环面的中轴线做定轴转动。在参考系 Σ' 中，圆环上各质元会“感受”到离心力和科里奥利力的作用。将圆环视为许多微元的集合，求所有微元所受到的离心力的合力 $\mathbf{F}_{离心}$、科里奥利力的合力 $\mathbf{F}_{科氏}$ 以及相对于圆环质心的离心力的合力矩 $\boldsymbol{\tau}_{离心}$、科里奥利力的合力矩 $\boldsymbol{\tau}_{科氏}$（结果可包含尚未求出的 ω）。

(3) 求（2）问中的 ω 以及地面对圆环施加的作用力（结果不得包含 ω）。

(4) 圆环高速滚动时，圆环可在竖直平面附近摆动而不倒下，具有较好的稳定性，从而圆环质心可近似视为沿直线运动，设该直线沿 x 轴方向，质心速度大小约为常量 V，即质心位置坐标 $x(t)=Vt+\delta x(t)$，而 $\delta x(t)$、$y(t)$、$\theta(t)$、$\varphi(t)$ 均为小量（注意，它们可能并非是同阶小量）。导出保留到最低阶小量的圆环的运动方程。假设最低阶小量按余弦函数随时间变化，求变化的角频率 Ω；并确定保持圆环运动稳定所需的常量 V 的最小值 $V_{\min}$。

四、

4. （60 分）

自由电子激光器是以自由电子束为工作物质，将相对论性电子束的动能转变成相干辐射能的装置，它在科研、生产等领域中都具有重大应用前景。如图 4a，自由电子激光器的基本结构有三个部分：电子束加速器、扭摆器和光学谐振腔；其中扭摆器是自由电子激光器的核心部分，它由沿 z 方向按空间周期 Λ 排列的永磁体组成，产生周期性横向静磁场，磁感应强度方向沿 x 轴，大小为

$$B=B_0\cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda}z\right)$$

电子束经过加速器加速到预定的速率 v_0，由弯曲磁体引导，沿 z 轴正方向注入扭摆器，高速运动的电子在扭摆器中受到交变磁场的作用做扭摆运动，同时辐射相干电磁波。设 B_0 不太强，磁场对电子运动速度的改变量的大小远小于 v_0，且电子束相干辐射电磁波对电子动能的损耗可忽略不计。电子的静止质量为 m_e，电子所带电量为 $-e$。不计重力。



图 4a

(1) 建立参考系 $S'(x',y',z')$，使 S' 相对于实验室参考系 $S(x,y,z)$ 沿 z 轴正方向以大小为 v_0 的速度做匀速直线运动，x' 轴和 x 轴、y' 轴和 y 轴两两相互平行，z' 轴和 z 轴重合。利用前述近似条件，在参考系 S' 中求出电子在 t' 时刻的位置坐标 (x',y',z')，并画出电子运动轨迹示意图。

(2) 如果扭摆器磁场的空间变化周期 $\Lambda=1\,\mathrm{mm}$（可视为准确值），沿 z 轴正方向辐射 X 激光的波长为 4.00\AA，求电子束加速器的加速电压。已知电子静止质量 $m_e=9.11\times10^{-31}\,\mathrm{kg}$，单位电荷量 $e=1.60\times10^{-19}\,\mathrm{C}$。

(3) 用波长为 4.00\AA 的激光作为入射光（可视为平面波），如图 4b 所示。在 x-z 平面内有等边菱形组成的共面二维晶体，菱形的边长 $d=8.00$\AA，两顶角各为 60°、120°，设二维晶体对入射波的散射较弱，可忽略散射波再次被散射的影响，试问在 x-z 平面内远处可以观察到多少衍射主级峰？并求相应主级峰的方位（用图 4b 中的 θ 表示）。

图待补

d、60°、θ、激光、衍射光待补

图 4b

五、

5. （50 分）

光在单轴晶体内传播呈现各向异性，按照偏振状态，可分为 o 光（寻常光）和 e 光（非常光）。单轴晶体内有一特定取向，光沿此方向传播时 o 光和 e 光的传播速度相同，传播方向不发生分离，该方向称为晶体光轴。o 光在晶体内感受到的折射率各向同性，为 n_o，波速各向同性为 $v_o=c/n_o$（c 为真空中的光速）；e 光在垂直于光轴的方向传播感受到的折射率为 n_e，波速为 $v_e=c/n_e$。当 e 光的传播方向介于平行于和垂直于光轴之间时，其感受到的折射率随其与光轴的夹角单调变化。对于晶体内点源或惠更斯原理中的次波源，其发出的光的波前是以光轴为对称轴的旋转椭球面。如图 5a，建立 y 轴与光轴取向重合的直角坐标系，以下对 o 光和 e 光传播过程的分析仅限于在 y-x 截面内的情形。

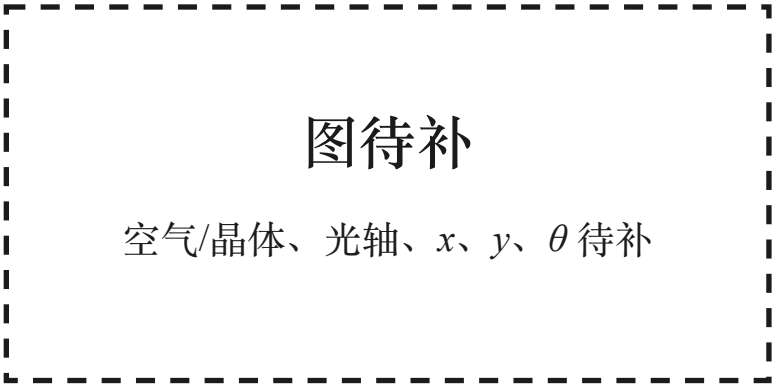


图 5a

(1) 根据惠更斯原理作图。在图 5a 中，真空波长为 λ 的平面光波从空气正入射到晶体表面，晶体表面法线方向与光轴的夹角为 θ。画出在晶体内传播的 o 光与 e 光的波前。标出分别与 o 光、e 光对应的波矢 $\bar{k}_o$、$\bar{k}_e$ 的方向（次波等相位面的包络面的法线方向，即等相位面的传播方向），以及由惠更斯原理确定的对应光线的传播方向 N_o、N_e。取 $n_o>n_e$，将 o 光和 e 光的传播情况示于同一图中。

(2) 记 e 光的光线传播方向 N_e 与光轴之间的夹角为 ξ，导出 ξ 和 θ 两个角度的正切之间的关系。

(3) 一种名为 BBO 的单轴晶体的折射率色散曲线方程为（λ 为真空波长，以 μm 为单位）：

$$n_o^2(\lambda)=2.7359+\frac{0.01878}{\lambda^2-0.01822}-0.01354\lambda^2$$

$$n_e^2(\lambda)=2.3753+\frac{0.01224}{\lambda^2-0.01667}-0.01516\lambda^2$$

分别求真空波长为 800.0 nm 和 400.0 nm 时，BBO 单轴晶体中的 n_o 和 n_e。

(4) 光学晶体的重要作用之一是实现频率转换，例如光学倍频过程，它是指两个同频率的基频光子转换为一个频率加倍的倍频光子，这个过程须满足能量守恒和动量守恒。在晶体中，波矢为 $\bar{k}$ 的光子的动量也可表示为 $\mathbf{p}=\hbar\bar{k}$，其中 $\hbar$ 为约化普朗克常量。

(4.1) 试表出倍频过程中基频光子波矢 $\bar{k}_1$ 与倍频光子波矢 $\bar{k}_2$ 之间的关系。

(4.2) 利用 BBO 晶体，将真空波长为 800.0 nm 的光波倍频为真空波长为 400.0 nm 的光波，基频光和倍频光可各自选为 o 光或 e 光，试给出实现此倍频过程的选择方案。

(5) 按照图 5a 的方式设置 BBO 晶体，使晶体表面法线与光轴夹角为 θ，让真空波长为 800.0 nm 的基频光以平面波形式垂直入射到此晶体，角度 θ 取值多大可以满足动量守恒条件，从而产生真空波长为 400.0 nm 的倍频光?

(6) 计算（5）中 e 光波矢 $\bar{k}_e$ 和传播方向 N_e 之间的夹角 α。

六、

6. （50 分）

仅考虑单一组分、单原子分子组成的非相对论性气体。

对上述气体，若忽略分子的大小以及除碰撞瞬间外分子间的相互作用，则可用理想气体模型描述；若考虑到分子的实际大小及其间的非碰撞相互作用，则理想气体模型不再适用。对此，范德瓦尔斯构建了范德瓦尔斯模型，该模型下，1 mol 气体的状态方程（称为范德瓦尔斯方程）为

$$(p+\frac{a}{v^2})(v-b)=RT$$

其中 T、p 和 v 分别表示气体的温度、压强和体积（即容器容积），R 是理想气体普适常量，a 和 b 是大于零的常量。在稀疏极限（对于任意给定的 T，$v\to\infty$）下，该模型退化为理想气体模型。

(1) 试直接给出 b 的物理含义（不必给出分析过程）。设气体分子可视为半径为 r 的刚性小球（按范德瓦尔斯模型，小球间有微弱的引力），试估计 b 的取值。已知阿伏伽德罗常数为 N_A。

(2) 直接写出 Nmol、体积为 V 的范德瓦尔斯气体的状态方程（表达式中不可出现摩尔体积 v）。

(3) 设气体的定容摩尔热容为 C_V，C_V 满足

$$(\frac{\partial C_V}{\partial v})_T=T(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2})_v$$

式中 $(\frac{\partial C_V}{\partial v})_T$ 表示当 T 视为常量时 C_V 对 v 的一阶导数，$(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2})_v$ 表示当 v 视为常量时 p 对 T 的二阶导数，余类推。试证明范德瓦尔斯气体的定容摩尔热容 C_V 为常量，并确定此常量（此常量的具体形式不必代入后续计算）。

(4) 已知 1 mol 范德瓦尔斯气体的内能 u 为

$$u=C_V T-\frac{a}{v}$$

试导出其摩尔熵 $s(T,v)$ 的表达式，其中可含有待定常量。试给出该气体经历准静态绝热过程的方程（用 T 和 v 表出，表达式中可含有待定常量）。

(5) 1 mol 范德瓦尔斯气体经历如下可逆卡诺循环过程：过程 I——等温膨胀：温度为 T_1，体积由 v_1 变为 v_2；过程 II——绝热降温：温度由 T_1 降为 T_2，体积由 v_2 变为 v_3；过程 III——等温压缩：温度为 T_2，体积由 v_3 变为 v_4；过程 IV——绝热升温：温度由 T_2 升为 T_1，体积由 v_4 变为 v_1。试计算该循环过程的吸热量 Q_1、放热量 Q_2 和循环效率 η（最终将 η 表示为仅依赖于 T_1 和 T_2 的函数）。

(6) 定义等温压缩系数为

$$\kappa_T=-\frac{1}{v}(\frac{\partial v}{\partial p})_T$$

试推出范德瓦尔斯气体的等温压缩系数 $\kappa_T(T,v)$ 的表达式；以满足条件 $all pv^2$ 的范德瓦尔斯气体为例，求 κ_T 的取值范围，并说明其直观物理意义。