第40届全国中学生物理竞赛决赛理论试题

物　　理

2023 年 | 决赛理论部分

一、

1. （40 分）

雨过天晴，空气内悬浮着大量小水滴，若阳光从背后以低角度照射，观察者便可能观察到彩虹（图 1a）。有时会同时出现两条彩虹，内层彩虹称为主虹（1 级虹），它来自阳光进入水滴后的一次反射；在主虹外边较暗的虹称为副虹或霓（2 级虹），它来自阳光在水滴内的两次反射。光线在水滴内还可能发生三次及以上的反射，并产生相应级次的虹。在自然界中通常只能观察到 1 级和 2 级虹，更高级次的虹可以在实验室环境下呈现。

图待补

原卷为实物照片

图 1a　大自然中的彩虹

图待补

入射光 i、0 级/1 级/2 级光、偏向角待补

图 1b

图待补

光线族待补

图 1c

考虑一个球形水滴，直径为 $10^2\mu$m 量级。如图 1b，一根入射光线与球心确定一个平面，该平面与球形水滴表面相交形成一个圆（大圆），进入水滴的光线经折射、反射后的出射光都在此平面内。把光线在水滴内经过 k（k=0,1,2,…）次反射后的出射光称为 k 级光，出射光相对入射光方向偏转的角度称为偏向角（见图 1b）。

(1) 已知入射光线在水滴外表面上的入射角为 i，空气和水的折射率分别为 1 和 n。试求 k 级光的偏向角 θ_k 的表达式。

(2) 当一束单色平行光照射水滴时，不同入射位置对应不同入射角（见图 1c）。当入射角 i 变化时，k 级光的偏向角 θ_k 有一极小值 θ_{km}，试求 θ_{km} 及其对应的入射角 i_k 的表达式。

(3) 由于色散，不同波长的光在水中的折射率 n 不同。对于确定的入射角 i，试求 k 级光偏向角 θ_k 对折射率 n 的变化率 $\frac{d\theta_k}{dn}$ 与入射角 i 的关系式，并求当 i 取第（2）问中的 i_k 时 $\frac{d\theta_k}{dn}|_{i=i_k}$ 的表达式。

(4) 图 1c 是单色平行光照射到水滴后出射的 1 级光示意图，在 1 级光偏向角极小值 θ_{1m} 附近出射的光线较为集中，即光强较大，此处出现 1 级虹，相应偏向角极小值 θ_{1m} 为 1 级虹的偏向角。类似地 θ_{km} 为 k 级虹的偏向角。当白光平行入射时，取红光和紫光在水中的折射率分别为 $n_{红}$=1.329 和 $n_{紫}$=1.344，试分别计算 k=1 和 k=2 级虹的偏向角 $\theta_{km}^{红}$ 和 $\theta_{km}^{紫}$ 以及虹的角宽度 δ_k（$\delta_k=|\theta_{km}^{紫}-\theta_{km}^{红}|$），并分别指出它们从内到外颜色排列的次序。角度的计算结果以度（°）为单位，精确到 0.01°。

(5) 透过偏振片观察彩虹，可发现彩虹的光是偏振光。设入射到水滴的光为单色自然光，出射光中 s 偏振（偏振方向垂直于入射面）的光强为 I_s，p 偏振（偏振方向平行于入射面）的光强为 I_p，光的偏振度定义为 $P=|\frac{I_s-I_p}{I_s+I_p}|$。当入射光为红光（$n_{红}$=1.329）时，试分别计算 k=1 和 k=2 级虹出射光的偏振度 P_k。

(6) 在某些条件下可观察到紧靠虹的边缘出现额外的彩色条纹，该现象称为“附属虹”，如图 1d 所示。试定性解释附属虹产生的原因。

图待补

原卷为实物照片

图 1d

二、

2. （50 分）

如图 2a，一根长度为 l、质量为 m 的匀质刚性细杆可绕过其一端的水平轴 O 转动。只考虑杆在垂直于转轴 O 的竖直平面内的运动，用杆与竖直向下方向之间的夹角 θ（$-\pi<\theta\leq\pi$，以逆时针方向为正）作为描述杆位置的坐标。忽略空气阻力和转轴的摩擦阻力。重力加速度大小为 g。



图 2a

已知杆的转轴 O 在竖直方向上作小振幅高频简谐振动，振动方程为 $z(t)=A\cos\omega t$，振幅 $A\ll l$，圆频率 $\omega\gg\sqrt{g/l}$。在随转轴 O 同步运动的平动参考系中讨论杆的运动。

(1) 试写出 $\theta(t)$ 满足的动力学方程。

(2) $\theta(t)$ 可表示为 $\varphi(t)$ 和 $\delta(t)$ 之和，其中 $\varphi(t)$ 表示平稳运动，$\delta(t)$ 表示圆频率为 ω 的高频小幅简谐振动。考虑到 $\omega\gg\sqrt{g/l}$（即 $\varphi(t)$ 和 $\delta(t)$ 的特征频率相差若干个量级），在 $\delta(t)$ 变化的一个周期内，$\varphi(t)$ 可视为不变；高频运动对平稳运动的影响可以由其在一个高频运动周期内的平均效果表示。在以上条件和近似下，导出 $\varphi(t)$ 满足的动力学方程。

(3) 由 $\varphi(t)$ 满足的动力学方程可知，杆的平稳运动等效于杆在一保守场中运动，试求相应的有效势能 $V_{\text{eff}}(\varphi)$（取 $\varphi=0$ 处势能为零）。

(4) 根据有效势能 $V_{\text{eff}}(\varphi)$，试确定杆的平衡位置 φ_0，并讨论各平衡位置的稳定性（不考虑参数取临界值的情况）；试求杆在各稳定平衡位置附近做小幅振动的频率。

(5) 初始时，杆位于转轴 O 的正下方，其初角速度 $\dot{\varphi}(0)=\omega_0$（$\omega_0>0$）。要使杆能运动至转轴 O 的正上方，$\omega_0$ 应大于一个临界值 ω_c，试求 ω_c；当 $\omega_0<\omega_c$ 时，求杆能运动到的最大角度 $\varphi_{\max}$。

三、

3. （40 分）

卢瑟福 α 粒子散射实验揭示了原子的核式结构。利用粒子散射实验可确定材料靶原子的种类、浓度及其深度分布等信息。典型的实验装置示意图如图 3a 所示，一束 α 粒子入射到待测材料靶（例如金箔）上，测量不同角度 θ 方向上散射 α 粒子的数目。



图 3a



图 3b



图 3c

(1) α 粒子可以通过放射性元素的衰变获得。静止的 $^{210}_{84}$Po 衰变到 $^{206}_{82}$Pb（铅），同时放出动能为 5.31 MeV 的 α 粒子。试写出此衰变过程的反应式，并计算衰变末态粒子的总动能（单位取 MeV，保留两位有效数字）。

(2) 如图 3b，质量为 m、电荷为 $2e$（$e>0$）、动能为 E 的 α 粒子从远处沿某直线入射，该直线与靶核 A 的距离为 b（瞄准距离）。该 α 粒子被核电荷数为 Z 的原子核 A 散射后，其在远处的运动方向与远处入射方向之间的夹角为 θ（散射角）。靶核 A 可视为始终静止不动，求 b 与 θ 之间的关系 $b(\theta)$。

(3) 在 α 粒子散射实验中，入射的实际上是一束 α 粒子流，其束流强度为 I（单位时间内、单位横截面积上入射的粒子数）。散射粒子的角分布相对于过 A 且与 α 粒子远处入射方向平行的直线是轴对称的，在以靶核 A 为中心的环带立体角元 $d\Omega=2\pi\sin\theta\, d\theta$ 内，单位时间出射的粒子数 $\frac{dN}{dt}$ 正比于 $I\,d\Omega$

$$\frac{dN}{dt}=\sigma(\theta)I\,d\Omega$$

其中 $\sigma(\theta)$ 具有面积量纲，称为微分散射截面。求 $\sigma(\theta)$ 的表达式（其中不可含有参量 b）。

(4) 实验上利用加速器获得动能不同的 α 粒子与金原子核发生散射。在散射角 $\theta=60°$ 时测得的微分散射截面（相对值）与入射 α 粒子动能的关系如图 3c 所示，实验数据在 α 粒子动能为 25 MeV 处出现拐点。试解释该拐点出现的原因，并计算该情形下 α 粒子到金原子核的最小距离。已知 $\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}=1.44\,\text{fm}\cdot\text{MeV}$，金原子核的核电荷数为 79。金原子核可视为始终静止不动。

(5) 在图 3a 所示的 α 粒子散射实验中，由于 α 粒子源或探测器（荧光屏和显微镜）的遮挡，无法实现散射角为 180° 左右的测量。试提出一个方案，以实现散射角为 180° 的测量，并画出实验方案示意图。

四、

4. （50 分）

当两个原子之间的距离较小时，两者之间的相互作用表现为强的排斥；距离较大时，其相互作用表现为弱的吸引。大量原子可通过此相互作用结合成晶体。温度趋于 0 K 时，原子排列为周期性的空间点阵，处于力平衡状态；温度高于 0 K 时，原子将在平衡位置附近做小幅振动。考虑由质量为 M 的同种原子组成的立方晶体，试用如下模型讨论原子如何结合成晶体以及晶体中原子振动对其热学性质的影响。

(1) 距离为 R 的两个原子之间的相互作用势能 $V(R)$ 可以近似表示为伦纳德-琼斯势

$$V(R)=\varepsilon\left[\left(\frac{r_0}{R}\right)^{12}-\left(\frac{r_0}{R}\right)^{6}\right]$$

其中 $\varepsilon>0$ 表征相互作用强度，r_0 表征力程。假设平衡时原子排列在立方点阵的顶点上，即原子的平衡位置为 $\mathbf{R}_{l_x,l_y,l_z}=(l_x a,l_y a,l_z a)$，$l_x,l_y,l_z=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots$，其中 a 是晶格常数。为简单起见，假设伦纳德-琼斯势的形式在晶体熔化前一直成立，参量 ε 和 r_0 也视为不变。试导出晶格常数 a 的表达式。计算结果中可包含如下常数：

$$A_n=\sum_{l_x,l_y,l_z}(l_x^2+l_y^2+l_z^2)^{-n/2}$$

其中 n 是任意正整数，$\sum\cdots$ 表示对所有不全为零的 l_x,l_y,l_z 求和。

(2) 试计算近邻原子、次近邻原子和次次近邻原子分别对 A_n 值的贡献。

(3) 严格求解晶体中原子在平衡位置 $\mathbf{R}_{l_x l_y l_z}$ 附近的小幅振动是非常复杂的。为简化起见，爱因斯坦假设原子的运动互不干扰，即考虑任意一个原子的振动时，假设其它原子都静止于各自的平衡位置处。在此模型下，求上述晶体中每个原子的小幅振动的圆频率 ω_E（结果可包含 a 和 A_n）。

(4) 以下假设爱因斯坦模型（包括上述关于圆频率 ω_E 的结果）仍然可适用于大振幅的情形：原子按振动状态的分布为玻尔兹曼分布：当绝对温度为 T 时，原子的动量大小在 $[p,p+dp]$ 内、相对于平衡位置的位移大小在 $[u,u+du]$ 内的概率正比于

$$\mathrm{e}^{\frac{E}{k_B T}} p^2 \mathrm{d}p u^2 \mathrm{d}u$$

其中 E 是动量大小为 p、位移大小为 u 时原子的能量，k_B 是玻尔兹曼常量。已知阿伏伽德罗常数为 N_A，试计算上述晶体的定容摩尔热容（须有必要的推导过程）。

(5) 原子振动的振幅随温度升高而增大。按照林德曼判据，当偏离平衡位置的距离的平均值大于 $C_L a$ 时，晶体就会熔化，其中 C_L 为常量（量级为 0.1）。试导出晶体熔点的表达式（结果可包含 a 和 ω_E）。

五、

5. （40 分）

黑洞是广义相对论预言的奇异天体，其宏观性质由质量 M、角动量 J 和电荷 Q 完全决定。对于一个 $J=0$、$Q=0$、质量为 M 的球对称简单黑洞（施瓦西黑洞），可以定义一个以黑洞中心为球心、半径为 r 的球面（称为视界）。按照经典理论，视界以内所有物质都无法逃离黑洞。

(1) 按照牛顿力学，如果一粒粒子在质量为 M 的球对称天体表面的逃逸速度恰好等于真空中的光速 c，此天体即为黑洞。试导出该天体半径 r 的表达式。已知太阳质量约为 $2\times10^{30}\,\mathrm{kg}$，引力常量 $G=6.67\times10^{-11}\,\mathrm{m^3/(kg\cdot s^2)}$，真空中的光速 $c=3\times10^8\,\mathrm{m/s}$，试问太阳半径至少收缩到多少时它将成为黑洞?

(2) 以上由牛顿力学得到的 r 恰好与广义相对论给出的同质量黑洞的视界半径结果一致。按照贝肯斯坦和霍金的理论，黑洞的熵 S 正比于其视界面积 A，即

$$S=\frac{k_B c^3}{4G\hbar}A$$

其中 $\hbar$ 是约化普朗克常量，k_B 是玻尔兹曼常量。当两个质量均为 M 的简单黑洞塌缩成一个质量为 M'（$M'<2M$）的简单黑洞时，求黑洞系统的熵的改变量（结果不含 A）。

(3) 对于一个绝对温度为 T、质量为 M 的简单黑洞，其内能 U 和熵 S 满足基本热力学关系 $\mathrm{d}U=T\mathrm{d}S$。按照相对论，黑洞的内能由爱因斯坦质能关系 $U=Mc^2$ 给出。试由此导出黑洞温度 T 与其质量 M 之间的关系式，并计算此黑洞的热容。

(4) 假设有一可逆热机工作在初始质量分别为 M_{10} 和 M_{20} 的两个简单黑洞之间，已知 $M_{20}>M_{10}$，求该热机从开始至最终的全过程对外所做的总功。

(5) 按照量子力学，霍金提出黑洞表面（即黑洞视界）可以向外辐射电磁波，且此辐射可以等价为与之同温度的黑体辐射，称为霍金辐射。求霍金辐射功率 P 与黑洞质量 M 之间的关系 $P(M)$。已知斯特藩-玻尔兹曼常量 $\sigma=\dfrac{\pi^2 k_B^4}{60\hbar^3 c^2}$。

(6) 由于发生霍金辐射，黑洞能量将减少，从而其质量随时间变小。令黑洞的初始质量为 M_0，不考虑其它因素，求该黑洞由于霍金辐射而最终消失所需要的时间。

六、

6. （50 分）

在制作玻璃时通过掺入熔融的金属（如金、银、铜等），可以制成彩色的玻璃。这些金属颗粒中的电子在光的电场驱动下，对入射白光中的特定频率成分产生共振吸收，导致光在此频率附近的成分转化为热，从而使透过玻璃的光呈现出颜色。这种共振称为等离激元共振。

(1) 考虑真空中一个半径为 R、相对介电常数为 ε_r 的均匀介质球，将其置于匀强外电场 E_0 中。试求稳定后球内的电场强度 E_m 和球的电偶极矩 $\mathbf{p}$。已知均匀介质球在均匀外场中是均匀极化的，真空介电常量为 ε_0。

(2) 考虑一块均匀金属导体，其导电电子数密度为 n、质量为 m、电荷量为 $-e$（$e>0$），电子在外场作用下定向漂移速度为 $\mathbf{v}$ 时，被晶格散射的平均作用等效为一阻力 $\mathbf{f}=-\gamma m\mathbf{v}$，$\gamma$ 为阻力系数。不考虑电子间的相互作用。

(i) 若此金属导体中有匀强恒定电场 E，试求稳定后金属内的电流密度 $\mathbf{j}$，以及此金属的电导率 σ_0。

(ii) 若此金属导体中有振幅为 E_m、圆频率为 ω 的匀强交变电场 $E(t)=E_m\cos\omega t$，电子将会运动形成电流。若稳定后金属内的电流密度表示为 $j(t)=j_m\cos(\omega t+\varphi_j)$，记 $\sigma=j_m/E_m$，可类比交流电的复数表示引入复电导率 $\tilde{\sigma}=\sigma e^{\mathrm{i}\varphi_j}$，在复数形式下金属内复电流密度 $\tilde{\mathbf{j}}=j_m e^{\mathrm{i}(\omega t+\varphi_j)}$ 和复电场强度 $\tilde{\mathbf{E}}=E_m e^{\mathrm{i}\omega t}$ 的关系可表述为 $\tilde{\mathbf{j}}=\tilde{\sigma}\tilde{\mathbf{E}}$。求此金属的复电导率 $\tilde{\sigma}=\mathrm{Re}\tilde{\sigma}+\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\tilde{\sigma}$ 的表达式（用 ω、γ、ε_0 和参量 $\omega_p=\sqrt{\dfrac{ne^2}{\varepsilon_0 m}}$ 表示）。

(iii) 在上述匀强交变电场中，电子将会整体同步地运动，可类比电介质定义金属导体中的极化强度。在复数形式下金属内复极化强度 $\tilde{\mathbf{P}}$ 和复电场强度 $\tilde{\mathbf{E}}$ 的关系可表述为 $\tilde{\mathbf{P}}=\tilde{\chi}\varepsilon_0\tilde{\mathbf{E}}$，其中 $\tilde{\chi}$ 为复极化率。进而可引入复电位移矢量 $\tilde{\mathbf{D}}=\varepsilon_0\tilde{\mathbf{E}}+\tilde{\mathbf{P}}=\tilde{\varepsilon}_r\varepsilon_0\tilde{\mathbf{E}}$ 和复相对介电常数 $\tilde{\varepsilon}_r$。求此金属的复相对介电常数 $\tilde{\varepsilon}_r(\omega)=\mathrm{Re}\tilde{\varepsilon}_r+\mathrm{i}\mathrm{Im}\tilde{\varepsilon}_r(\omega)$ 的表达式（用 ω、γ 和参量 $\omega_p=\sqrt{\dfrac{ne^2}{\varepsilon_0 m}}$ 表示）。

(3) 用上述金属导体制成半径为 R 的纳米球形颗粒，放入圆频率为 ω（$\omega<\omega_p$）的平面简谐电磁波中，其电场振幅大小为 E_0，波长远大于 R。只考虑金属颗粒在电场中的极化，且在复数形式下可与第（1）问中介质球的极化类比。已知 $\gamma\ll\omega_p$，不考虑电磁辐射。

(i) 试求稳定后金属纳米颗粒内的电场振幅大小 $E_{\mathrm{in}}(\omega)$；当 $\omega=\omega_r$ 时 E_m 达到最大，发生等离激元共振，试求共振圆频率 ω_r（为简单起见，求 ω_r 时可取 $\gamma=0$）。

(ii) 试求共振时该颗粒内的电场振幅大小 $E_r=E_{\mathrm{in}}(\omega_r)$，以及共振时该颗粒内的平均发热功率 P_r（考虑到 $\gamma\ll\omega_p$，略去 γ 的高阶小量）。

七、

7. （50 分）

假设磁单极子（点磁荷）g 的磁场满足所谓的磁荷库仑定律，即

$$\mathbf{B}(\mathbf{r})=\frac{\mu_0 g}{4\pi r^3}\mathbf{r}$$

其中 μ_0 为真空磁导率，$\mathbf{r}$ 是场点相对于该磁荷所在处的位矢。通常的电磁学理论认为磁单极子不存在，且迄今为止实验上也没有发现磁单极子。1931 年，狄拉克提出了一个模型，该模型构造了一根由无数个首尾相接的（磁荷）磁偶极子组成的弦（即狄拉克弦），该弦从一个端点延伸至无限远，如图 7a 左图所示。若将每一个小磁偶极子等效为一个小电流环，则整个狄拉克弦等效为截面相同、均匀密绕的半无限长极细通

电螺线管，如图 7a 右图所示。这种等效意味着狄拉克弦上的微元磁偶极矩 $g\mathbf{dl}$ 与螺线管轴线上相应线元 $\mathrm{d}l$ 的微元磁矩 $\mathbf{dm}$ 相等，即 $\mathbf{dm}=g\mathbf{dl}$（见图 7a）。在这种图像下，螺线管端点处也等效存在一个“磁单极子”，这样引入的磁单极子遵循通常的电磁学规律。以下引入矢势来讨论狄拉克弦及相关问题。



图 7a

按通常的电磁学理论，磁感应强度 **B** 的通量可表示为矢势 **A** 的环量，即

$$\text{iint}_S \mathbf{B}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}=\oint_L \mathbf{A}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l}$$

其中 L 为曲面 S 的边界环路。磁矩为 **m** 的小电流环所激发的矢势为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{m}\times\mathbf{r}}{r^3}$$

其中 **r** 是场点相对于电流环所在处的位矢。

(1) 如图 7b，与狄拉克弦等效的极细通电螺线管端点的磁荷为 g，从原点沿负 z 轴伸向无穷远。



图 7b

(i) 导出此螺线管在位置 (r,θ,φ) 处（$0\le\theta<\pi$）的矢势 **A** 的表达式。提示：displaystyle$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{x}{a\sqrt{x^2+a^2}}+$ 任意常数。

(ii) 对于图中以 z 轴为轴线、球坐标 r,θ（$0\le\theta<\pi$）固定的有向圆形环路 L，请先计算矢势 **A** 的环量 Γ_L，再按磁荷库仑定律计算点磁荷 g 的磁场通过以圆环 L 为边界的圆面的通量 Φ_L（面元法向沿 z 轴正向，且与环路绕向成右手螺旋关系。不考虑 $\theta=\pi/2$ 情形），并比较 Γ_L 与 Φ_L 的异同（如有差异，请分析差异的来源）。

(2) 从原点沿负 z 轴延伸的、与狄拉克弦等效的极细通电螺线管中，其电流 $I(t)=I_0\cos\omega t$ 为低频交变电流，已知螺线管的横截面积为 S，单位长度匝数为 n。



图 7c

(i) 求原点处的等效磁荷 $g(t)$。

(ii) 将一单位长度电阻为 R_0 的导线弯成正三角形回路，其边长为 a。该三角形位于 $z=-\frac{\sqrt{6}}{12}a$ 的平面上，螺线管穿过其中心，如图 7c 所示。求此三角形回路的平均热功率。不考虑辐射以及三角形回路的自感。提示：可考虑正三角形对 g 所张的立体角。