上海大学 2025 年硕士研究生招生考试

812 量子力学

满分 150 分 · 考试时间 180 分钟

考生须知

1. 本卷据公开整理的试题图片逐题重排，题干、题序与题型按图片核对；整理版并非招生单位官方原卷。
2. 答案与解析由本站独立编撰，仅供教学研究；原卷文字与命题版权归命题单位。
3. 请在答题纸上作答，题号按重排卷保持一致；作图题须写出必要的文字说明与公式。

一、判断题（共 24 分）

1. 量子力学中所有的能量都是分立的。（　）

2. 氢原子波函数是球对称的。（　）

3. 五夸克自旋为 $\frac{1}{2}$，所以夸克是费米子。（　）

4. 三维谐振子的第一激发态是非简并的。（　）

5. 密度矩阵可以用来描述纯态也可以用来描述混态。（　）

6. 变分法只能用来估算基态能量。（　）

7. 量子力学中波函数一定为实数。（　）

8. 厄米算符的平方大于等于 0。（　）

二、计算题（共 90 分）

1. 质量为 m 的粒子在一维无限深势阱中，

$$V(x)=\begin{cases}0, & 0<x<a\\ \infty, & \text{其他}\end{cases}$$

$t=0$ 时，

$$\psi(x,0)=\frac{1}{\sqrt{1+|b|^2}}\left[\psi_1(x)+b\,\psi_2(x)\right]$$

（1）给出波函数所有的本征态和本征值。

（2）求任意 t 时刻的波函数 $\psi(x,t)$。

（3）求任意 t 时刻时能量的平均值。

2. 哈密顿量为

$$\hat{H} = A\left(\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2\right) + B\left(S_{1z} - S_{2z}\right)$$

两自旋为 $\frac{1}{2}$ 的 $\vec{S}_1$ 和 $\vec{S}_2$，总角动量为 $\vec{S}$。

（1）写出所有耦合态 $|s, m_s\rangle$。

（2）用非耦合态表示耦合态。

（3）用耦合态表示出能量的本征值。

（4）讨论能级的简并度。

3. 体系的哈密顿量为

$$\hat{H} = E_0 \begin{pmatrix} 1+2\varepsilon & \varepsilon & 3\varepsilon \\ \varepsilon & 1+2\varepsilon & 3\varepsilon \\ 3\varepsilon & 3\varepsilon & 2+2\varepsilon \end{pmatrix}$$

（1）$\varepsilon = 0$ 时，计算能量的本征值和本征态，并讨论能级的简并度。

（2）$\varepsilon \neq 0$ 时，用微扰计算基态能量的一级近似。

（3）$\varepsilon \neq 0$ 时，用微扰计算第一激发态能量至二级近似。

三、证明题（共 36 分）

(1) 证明：$\langle n|\hat{p}|m\rangle = \dfrac{\mathrm{i}m}{\hbar}\left(E_n - E_m\right)\langle n|\hat{x}|m\rangle$。

(2) 用第（1）问中的结论证明：

$$\sum_n \left(E_n - E_m\right)^2 \left|\langle n|\hat{x}|m\rangle\right|^2 = \frac{\hbar^2}{m^2}\langle m|\hat{p}^2|m\rangle。$$

(3) 证明：

$$\sum_n \left(E_n - E_m\right)\left|\langle n|\hat{x}|m\rangle\right|^2 = \frac{\hbar^2}{2m}。$$